

Algebra

A. Potenze

Prerequisiti: per fare le potenze devi conoscere le regole di esecuzione delle [Operazioni sui numeri interi](#).

1. Definizione di potenza

La potenza non e' altro che una moltiplicazione ripetuta: se devo scrivere $6 \times 6 \times 6$, e' piu' facile e comodo scrivere 6^3 ; quindi:

$$6^3 = 6 \times 6 \times 6$$

il 6 si chiama base, il 3 si chiama esponente e 6^3 tutto quanto si chiama **potenza**.

DEFINIZIONE: la potenza e' il prodotto della base tante volte quant'e' l'esponente

Per rendere la definizione piu' generale occorre usare le lettere, allora, poiche' talvolta useremo x come lettera sostituiamo il segno di prodotto x con il simbolo $\cdot$.

allora ad esempio a^3 sara': $a \cdot a \cdot a$

Piu' in generale a^n sara': $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, ove i puntini indicano che la moltiplicazione e' fatta tante volte quant'e' l'esponente cioe' n volte.

2. Prodotto di potenze con la stessa base

Se devo moltiplicare $2^3 \times 2^4$ poiche' $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ e $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ otterrai:

$$2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 2^{3+4}$$

quindi per fare il prodotto, quando hanno la stessa base, basta sommare gli esponenti. Ora rendiamo il risultato piu' generale possibile usando le lettere:

$$a^r \cdot a^s = (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a) = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a =$$

i primi sono r, gli altri sono s in totale saranno $r+s = a^{r+s}$

Per trovare la regola basta leggere il primo termine e l'ultimo termine dell'uguaglianza

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

REGOLA: il prodotto di due potenze con la stessa base e' una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

Se hai bisogno di aiuto per leggere la regola, ecco come fare:

Per leggere la regola devi cominciare prima dell'uguale $a^r \cdot a^s$ leggendo l'operazione che coinvolge tutti i termini (il prodotto) poi devi dire fra chi e' quest'operazione (fra 2 potenze) descrivendo i termini, indicando cos'hanno di uguale (aventi la stessa base.)

A questo punto hai finito di leggere la prima parte e c'e' l'uguale che si legge come un verbo (e' uguale a).

Ora devi leggere il secondo termine a^{r+s} ; non essendoci operazioni descrivi il secondo termine (*una potenza*) e descrivendola indica in cosa e' uguale (*avente per base la stessa base*) e cosa ha di diverso (*e per esponente la somma degli esponenti*).

Se metti assieme il tutto ottieni la regola

REGOLA: il prodotto fra due potenze aventi la stessa base e' uguale a una potenza avente per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

3. Quoziente di potenze

Se devo dividere $2^8 : 2^5$ poiche' $2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ e $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
Otterrai:

$$2^8 / 2^5 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) / (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) =$$

ricordando che nelle frazioni puoi togliere sopra e sotto gli stessi fattori (*solo quando il numeratore e il denominatore sono in forma di prodotto*) restano solo tre 2 al numeratore (sopra):

$$= 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 2^{8-5}$$

quindi per fare il quoziente quando hanno la stessa base basta sottrarre gli esponenti ora rendiamo il risultato piu' generale possibile usando le lettere:

$$a^r / a^s = (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) / (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) =$$

dalle r lettere di sopra devo togliere le s lettere di sotto (*cio' potro' farlo solo se r e' piu' grande di s*) restera' quindi:

$$= a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^{r-s}$$

Per trovare la regola basta leggere il primo termine e l'ultimo termine dell'uguaglianza se $r > s$ allora

$$a^r / a^s = a^{r-s}$$

REGOLA: il quoziente di due potenze con la stessa base e' una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

Se hai bisogno di aiuto per leggere la regola, ecco come fare:

Per leggere la regola devi cominciare prima dell'uguale a^r / a^s leggendo l'operazione che coinvolge tutti in termini (*il quoziente*) poi devi dire fra chi e' quest'operazione (*fra 2 potenze*) descrivendo i termini, indicando cos'hanno di uguale (*aventi la stessa base.*)

A questo punto hai finito di leggere la prima parte e c'e' l'uguale che si legge come un verbo (*e' uguale a*) ora devi leggere il secondo termine a^{r-s} ; non essendoci operazioni descrivi il secondo termine (*una potenza*) e descrivendola indica in cosa e' uguale (*avente per base la stessa base*) e cosa ha di diverso (*e per esponente la differenza degli esponenti*).

Se metti assieme il tutto ottieni la regola:

REGOLA: il quoziente di due potenze con la stessa base e' una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

Caso in cui r e' minore di s

Se devo dividere $2^5 : 2^8$ poiche'

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

otterrai

$$2^5 / 2^8 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) / (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) =$$

ricordando che nelle frazioni puoi togliere sopra e sotto gli stessi fattori (solo quando il numeratore e il denominatore sono in forma di prodotto) restano solo tre 2 sotto

$= 1 / (2 \times 2 \times 2) = 1 / 2^3$ cioè restano 3 termini al denominatore; ma se ora noi applichiamo la regola otteniamo:

$$= 2^{5-8} = 2^{-3}$$

Evidentemente due elevato alla meno tre non ha significato perché equivarrebbe a dire che devo moltiplicare la base 2 per meno 3 volte per se' stessa; allora diamogli noi un significato ponendola uguale a uno diviso il numero 2 elevato alla terza:

$$2^{-3} = (1/2)^3$$

Se accettiamo questo significato allora la regola è ancora valida.

D'ora in avanti qualunque ente elevato a potenza negativa sarà uguale a uno fratto lo stesso ente elevato a potenza positiva

In generale:

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Caso in cui r è uguale ad s

Se devo dividere $2^5 : 2^5$ poiché'

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

otterrai

$$2^5 / 2^5 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) / (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) =$$

ricordando che nelle frazioni puoi togliere sopra e sotto gli stessi fattori (solo quando il numeratore e il denominatore sono in forma di prodotto) stavolta i fattori vanno via tutti ma resta l'elemento neutro della moltiplicazione cioè 1

$$= 1/1 = 1$$

ma se ora noi applichiamo la regola otteniamo:

$= 2^{5-5} = 2^0$ evidentemente due elevato a zero non ha significato perché equivarrebbe a dire che devo moltiplicare la base 2 per zero volte per se' stessa; allora diamogli noi un significato ponendola uguale a uno; in questo modo la regola della divisione sarà valida anche quando il primo esponente è maggiore del secondo

Allora d'ora in avanti sarà sempre:

$$2^0 = 1$$

quindi d'ora in avanti sarà $a^0 = 1$

REGOLA: ogni numero elevato a potenza 0 vale 1

Da notare che si pone anche $0^0 = 1$, come verrà dimostrato in analisi

Quindi, anche quando le potenze sono uguali, per fare il quoziente quando hanno la stessa base basta sottrarre gli esponenti.

4. Potenza di potenza

Se devo fare $(2^3)^4$ poichè prima devo sempre considerare le operazioni che coinvolgono tutto, dovrò considerare la potenza quattro, cioè $= 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 =$ e poichè $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ otterrai:

$(2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12} = 2^{3 \times 4}$
in quanto vi sono quattro gruppi di tre 2 ciascuno; quindi, per fare il prodotto quando hanno la stessa base, basta moltiplicare gli esponenti; ora rendiamo il risultato più generale possibile usando le lettere:

$$(a^r)^s = (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \cdot \dots \cdot (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) =$$

togliendo le parentesi

$$= a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^{r \cdot s}$$

perchè saranno s gruppi di r lettere ciascuno

Per trovare la regola basta leggere il primo termine e l'ultimo termine dell'uguaglianza

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

REGOLA: la potenza di una potenza è ancora una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

Se hai bisogno di aiuto per leggere la regola, ecco come fare:

Per leggere la regola devi cominciare prima dell'uguale $(a^r)^s$ leggendo l'operazione che coinvolge tutti in termini, essendovi un termine solo, descrivi il termine partendo da ciò che coinvolge tutto (la potenza), poi devi dire su chi è quest'operazione (di una potenza).

A questo punto hai finito di leggere la prima parte e c'è l'uguale che si legge come un verbo (è uguale a).

Ora devi leggere il secondo termine $a^{r \cdot s}$; non essendoci operazioni descrivi il secondo termine (una potenza) e descrivendola indica in cosa è uguale (avente per base la stessa base) e cosa ha di diverso (e per esponente il prodotto degli esponenti).

Se metti assieme il tutto ottieni la regola

REGOLA: la potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

5. Potenza di un prodotto

Quando devo eseguire la potenza di un prodotto talvolta può essere utile trasformarla nella potenza dei fattori; ad esempio se ho $(2 \times 3)^4$, talvolta (ad esempio in una frazione per semplificare) mi può servire fare la potenza senza eseguire la moltiplicazione, così otterro'

$$(2 \times 3)^4 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 =$$

Ho messo assieme assieme i 2 e i 3 (**proprietà associativa della moltiplicazione**)

$$= 2^4 \times 3^4$$

cioè per fare la potenza di un prodotto basta fare la potenza dei singoli fattori.

Ora, per rendere il risultato più generale possibile passiamo alle lettere (in questo caso mettiamo sempre i segni di prodotto · anche se talvolta potremmo sottointenderli).

Usiamo 3 lettere $(a \cdot b \cdot c)^n = (a \cdot b \cdot c) \cdot (a \cdot b \cdot c) \cdot \dots \cdot (a \cdot b \cdot c)$; i puntini in basso indicano che di parentesi moltiplicate ce ne sono n $a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b \cdot c \cdot c \cdot \dots \cdot c =$ (**proprietà associativa della moltiplicazione**) di a ce ne sono n, di b ce ne sono n e di c ce ne sono n, cioè $= a^n \cdot b^n \cdot c^n$.

Per trovare la regola basta leggere il primo termine e l'ultimo termine dell'uguaglianza:

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

REGOLA: la potenza di un prodotto e' uguale al prodotto delle potenze dei fattori

Se hai bisogno di aiuto per leggere la regola, ecco come fare:

Per leggere la regola devi cominciare prima dell'uguale $(a \cdot b \cdot c)^n$ leggendo l'operazione che coinvolge tutti in termini (la potenza) poi devi dire fra chi e' quest'operazione (di un prodotto) descrivendo i termini (di fattori).

A questo punto hai finito di leggere la prima parte e c'e' l'uguale che si legge come un verbo (e' uguale a).

Ora devi leggere il secondo termine, descrivi le operazioni sul secondo termine (un prodotto) e indica fra chi sono le operazioni (fra le potenze dei fattori).

Se metti assieme il tutto ottieni la regola

REGOLA: la potenza di un prodotto di fattori e' uguale al prodotto della potenza dei fattori

Per vedere se hai capito bene prova a trovare la regola nei seguenti casi:

$$(a \cdot b)^n =$$

$$(x \cdot y \cdot z)^s =$$

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n =$$

B. Introduzione al calcolo letterale

Perché il calcolo letterale?

Guardati intorno e descrivi il numero di cio' che vedi:

1 computer - 1 schermo - 2 sedie - 3 penne - 12 libri

In pratica, quando parli di numeri nel mondo reale, hai sempre i numeri con appiccicata un'etichetta: il fatto di essere libri o penne.

Non esistono numeri senza una qualita'; se dici 2 non ha significato mentre se dici 2 sedie, 2 mele e cosi' via ha significato.

Allora noi dobbiamo studiare le proprieta' dei numeri che hanno un'etichetta: come si comportano 2 mele oppure 2 sedie rispetto alle operazioni?.

Senza scomodare mele o sedie semplificheremo chiamando i numeri con relative proprieta' 2a oppure 2b (utilizzando cioe' il minor numero possibile di lettere dell'alfabeto).

PROVA A FARE QUESTO GIOCO:

pensa un numero,

moltiplicalo per 3,

aggiungi 4 al risultato,

a quello che hai ottenuto aggiungi ancora il numero di partenza,

dividi quello che viene per 4,

togli il numero che hai pensato all'inizio.

IL RISULTATO E' 1.

Come ho fatto? non sono certo un mago, ti ho semplicemente fatto fare alcune operazioni e poi le stesse operazioni al contrario fino a farti giungere al risultato e, qualunque numero tu scegli, il risultato e' sempre 1 di questo fatto potresti renderti conto immediatamente se al posto del numero mettesti una lettera; se vuoi provare fai:

PROVIAMO ASSIEME A FARE QUESTO GIOCO:

pensa un numero a

moltiplicalo per 3 3a

aggiungi 4 al risultato 3a+4

a quello che hai ottenuto aggiungi ancora il numero di partenza 3a+4+a = 4a+4

dividi quello che viene per 4 $(4a+4)/4 = a+1$

togli il numero che hai pensato all'inizio $a+1-a = 1$

IL RISULTATO E' 1

Cio' dovrebbe farti capire l'importanza delle lettere: possiamo utilizzare nelle operazioni le lettere al posto dei numeri ed in questo modo potremo fare tantissime (infinite) operazioni al prezzo di 1; non solo ma potremo vedere meglio cosa succede fra gli enti su cui lavoriamo, infatti se lavoriamo con i numeri la nostra mente e' distratta dai numeri, mentre lavorando con le lettere siamo portati a fare piu' attenzione alle operazioni cosi' che il giochetto di un aspirante mago ci appare subito una cosa elementare, come hai visto.

Se hai capito bene prova come esercizio a costruire qualche giochetto come quello che ti ho mostrato facendo in modo che il risultato sia

1) il numero di partenza

2) il doppio del numero di partenza

3) zero

e, senza spiegare il trucco, fai il giochetto a qualche tuo compagno

C. Monomi

PREREQUISITI: PER FARE QUESTO ARGOMENTO DEVI SAPERE FARE:

- LE OPERAZIONI DI SOMMA, DIFFERENZA, PRODOTTO E QUOZIENTE SUI NUMERI NATURALI, INTERI E RAZIONALI
- DEVI CONOSCERE LE PRINCIPALI REGOLE DELL'ELEVAMENTO A POTENZA.

1. Cos'e' un monomio

Supponiamo di avere 2 mele; cosa significa? Che abbiamo un numero (2) seguito dalla proprieta' di essere mele; ecco questo e' un monomio, cioe' intuitivamente un monomio e' un numero seguito da una proprieta'.

Ad esempio saranno monomi 2 case, 3 quaderni, ed anche un numero e' considerato monomio. In greco MONOS significa uno solo cioe' noi consideriamo piu' cose come un tutto unico:

$$-2a^2b$$

e' un monomio ed il numero -2 ha la proprieta' di essere a^2b cioe'

-2 moltiplicato a moltiplicato a moltiplicato b

Infatti e' per nostra comodita' che noi scriviamo ad esempio:

$$2a^3$$

mentre dovremmo scrivere

$$2 \times a \times a \times a.$$

Da notare che il segno di prodotto tra il numero e le lettere e tra le lettere e' sottointeso. Ogni volta che potrai, toglierai il simbolo del prodotto fra i fattori del prodotto stesso; inoltre dovrai usare le seguenti convenzioni: non scrivere il numero 1 davanti alle lettere cioe' invece di scrivere $-1a^2b$ scriverai $-a^2b$.

Non scrivere il segno + davanti ad un monomio, cioe' invece di scrivere $+7ab^2$ scriverai $7ab^2$; infine, devi mettere le lettere in ordine alfabetico; quindi invece di scrivere $+1ba$ scriverai semplicemente **ab**

NOTA: le lettere piu' usate sono di solito le prime dell'alfabeto a, b, c,... ma per far capire agli studenti che le lettere possono essere qualunque talvolta di usano x, y, z, t. (queste a dire il vero servono per abituarsi ai problemi dove al posto di una lettera devi trovare un numero) e talvolta addirittura m, n, p,...

Nel monomio si distinguono 3 parti:

$$-3a^2b^3$$

il segno - il numero **3** le lettere **a^2b^3** ,

Intuitivamente possiamo dire che:

- sui segni devi usare le regole studiate nei numeri interi relativi
- sui numeri devi usare le regole dei numeri razionali (frazioni)
- sulle lettere devi usare le regole delle potenze.

La definizione matematica di monomio e':

Un insieme di numeri e lettere in cui **non** compaiono operazioni di addizione e sottrazione ma solamente di moltiplicazione e divisione.

(Ricorda che l'elevamento a potenza e' una moltiplicazione ripetuta)

Esempi di monomi

$-3a$ e' un monomio

$7ab$ e' un monomio

$\frac{3}{4}a^3bc^2$ è un monomio

$\frac{1}{4} - a$ non e' un monomio

2. Grado di un monomio

Proviamo a scrivere **2case** e poi scriviamo **2casse**; sono due cose diverse, perche? Evidentemente perche' i numeri *due* si riferiscono ad oggetti diversi; ma perche' sono diversi? Perche' nel primo oggetto c'e' una lettera **s** in meno e nel secondo c'e' una lettera **s** in piu'; quindi e' importante contare quante lettere fanno parte del monomio, perche' quantita' diverse di lettere rappresentano cose diverse:

cioe' **ab^2** e' diverso da **a^2b**

Il numero delle lettere che fanno parte del monomio si chiama grado del monomio: i due monomi sopra hanno lo stesso grado ma rappresentano cose diverse.

Esempio:

$2abc$ ha grado 3 mentre

$2a^3b^2c$ ha grado 6 in totale perche'

$a^3=aaa$ e' formato da tre lettere

$b^2=bb$ e' formato da due lettere

mentre **c** e' una lettera sola .

Quindi il monomio ha:

grado **3** rispetto alla lettera **a**

grado **2** rispetto alla lettera **b**

grado **1** rispetto alla lettera **c**

in totale rispetto a tutte le lettere ha grado **6**

3. Somma e differenza di monomi

Per capire le regole che guidano la somma fra monomi devi pensare al seguente esempio:

$2 \text{ mele} + 3 \text{ banchi} = (2 \text{ mele} + 3 \text{ banchi})$

$2 \text{ mele} + 3 \text{ mele} = 5 \text{ mele}$

Infatti puoi sommare fra loro degli oggetti solamente se sono dello stesso tipo cioe' se dopo il numero hai le stesse lettere, altrimenti se proprio vuoi indicare che quegli oggetti li vuoi considerare insieme puoi mettere una parentesi.

Fai attenzione che le lettere dopo i numeri oltre ad essere uguali devono anche avere gli stessi esponenti.

Cioe':

$$2 \text{ case} + 5 \text{ casse} = (2 \text{ case} + 5 \text{ casse})$$

$$2 \text{ case} + 5 \text{ case} = 7 \text{ case}$$

Due monomi che abbiano *le stesse lettere* con *le stesse potenze* si dicono **SIMILI**

Quindi, se devi definire due monomi simili, devi dire:

Due monomi sono simili se hanno la stessa parte letterale.

REGOLA: Puoi sommare due monomi se sono simili e in tal caso farai la somma dei coefficienti numerici (i numeri davanti alle lettere) senza modificare la parte letterale

Esempi di somma:

$$2a + 3a = 5a$$

$$3a + a = 4a \text{ (ricorda che 1 davanti ad } a \text{ e' sottointeso)}$$

$$3a + 2b = 3a + 2b \text{ oppure } (3a + 2b)$$

$$3a^2b + 2ab + 5a^2b = 8a^2b + 2ab$$

Per la **differenza**, le regole sono le stesse che per la somma; infatti, basterà sottrarre invece di sommare; quindi:

$$5a^3b^2 - 2a^3b^2 = 3a^3b^2$$

mentre

$$5a^3b^2 - 2a^2b^2$$

resta così perché i monomi non hanno la stessa parte letterale (le lettere sono le stesse ma non sono uguali le potenze).

QUINDI D'ORA IN AVANTI, QUANDO PARLEREMO DI SOMMA, SI INTENDERÀ LA SOMMA ALGEBRICA, CIOE' SIA LA SOMMA CHE LA DIFFERENZA.

4. Prodotto di monomi

Per fare il prodotto fra monomi devi seguire queste semplici regole:

- Il segno va moltiplicato con il segno secondo le **regole dei segni** della moltiplicazione fra i numeri interi.
(se il segno non c'è, è sottointeso +).
- Il numero (coefficiente numerico) va moltiplicato con il numero secondo le **regole del prodotto dei numeri razionali**.
(se il numero non c'è, è sottointeso 1).
- Le lettere vanno moltiplicate con le lettere secondo le **regole delle potenze**
(se la lettera non c'è è sottointeso a^0b^0 ecc..)

quindi

$$(-3a^2b)(+4ab^2) =$$

- moltiplicato + e' uguale a -

3 moltiplicato 4 e' uguale a 12

a^2 moltiplicato a e' uguale ad a^3

b moltiplicato b^2 e' uguale a b^3

$$(-3a^2b)(+4ab^2) = -12a^3b^3$$

Se poi devi fare il prodotto fra più monomi prima moltiplica il primo per il secondo, poi quello che viene per il terzo e così via.

5. Divisione o Quoziente fra monomi

PER *DIVISIONE* SI INTENDE L'OPERAZIONE, PER *QUOZIENTE* IL RISULTATO

Per fare il quoziente fra monomi devi seguire queste semplici regole come per il prodotto; infatti il quoziente e' ancora un prodotto (anche se e' visto alla rovescia; come una discesa vista dall'altra parte e' una salita).

- Il segno va diviso (moltiplicato) con il segno secondo le **regole dei segni** della moltiplicazione fra i numeri interi. Infatti:
(se il segno non c'e' e' sottointeso +).
- Il numero (coefficiente numerico) va diviso per il numero secondo le regole del **quoziente dei numeri razionali**
(se il numero non c'e', e' sottointeso 1).
- Le lettere vanno divise con le lettere secondo le **regole delle potenze**.
(se la lettera non c'e', e' sottointeso $a^0 b^0$ ecc..)

Quindi

$$(-6a^2b^3c) : (+2ab^2) =$$

- *diviso* + *e' uguale a* -

6 *diviso* 2 *e' uguale a* 3

a^2 *diviso* a *e' uguale ad* a

b^3 *diviso* b^2 *e' uguale a* b

c *non viene diviso (oppure se vuoi c^1 viene diviso per c^0) quindi resta uguale*

$$(-6a^2b^3c) : (+2ab^2) = -3abc$$

Se poi devi fare il quoziente fra piu' monomi prima dividi il primo per il secondo, poi quello che viene per il terzo e cosi' via.

6. Elevamento a potenza di monomi

Se ricordi che l'elevamento a potenza e' semplicemente una moltiplicazione ripetuta tante volte quant'e' l'esponente, puoi trovare da solo quali sono le regole per l'elevamento a potenza cioe' al solito devi moltiplicare tra loro i segni, i numeri, le lettere

Per il segno, se e' + non vi sono problemi: resta +; se e' - devi vedere se l'esponente e' pari o dispari: moltiplicando il - per un numero pari di volte (2,4,6,8,..) il risultato e' +

Una piccola nota, la forma italiana e' piuttosto inesatta; in matematica, moltiplicare qualcosa 6 volte non significa fare 6 moltiplicazioni ma fare il prodotto fra 6 fattori e quindi le moltiplicazioni sono 5. Il pari si riferisce al numero di fattori non al numero di moltiplicazioni; ricorda che per moltiplicare ad esempio il segno - per 4 volte: (-per-per-per-) devi moltiplicare il primo - per il secondo -, quello che viene va moltiplicato per il terzo - e il risultato va moltiplicato per il quarto segno -

Moltiplicando il segno - per un numero dispari di volte (3,5,7,9,..) il risultato e' -
Il numero (coefficiente numerico) va moltiplicato con se stesso tante volte quant'e' l'esponente secondo le **regole del prodotto dei numeri razionali**.

Le lettere vanno moltiplicate con le lettere stesse tante volte quant'e' l'esponente, ma e' meglio usare la regola di potenza di una potenza che troverai nelle **regole delle potenze**.

7. Massimo Comune Divisore fra monomi

Per la definizione generale di M.C.D. (*Scheda C1*)

Intuitivamente, anche se non e' del tutto esatto per capire il concetto di M.C.D. fra monomi puoi pensare al seguente esempio:

Siete tre amici e volete organizzare una vacanza insieme; quanto mettete in comune?

Perche' nessuno ci rimetta ognuno dovra' versare nella cassa comune la stessa cifra e poiche' siete in tre se il primo dispone di 100 euro, il secondo di 200 euro ed il terzo di 300 euro metterete assieme 100 euro a testa.

Questo e' il concetto di M.C.D. quando i numeri (i simboli matematici) sono in forma di prodotto (come nei monomi) devi mettere in comune quello che c'e' di uguale

Nota: attenzione nel Massimo Comune Divisore la parola che conta e' DIVISORE non MASSIMO cioe' il M.C.D. e' generalmente piu' piccolo dei monomi di partenza, quindi non farti portare fuori strada dalla parola MASSIMO.

Allora per fare il M.C.D. prima di tutto devi scomporre in fattori il numero davanti ai monomi poi sceglierai quello che hanno di uguale

Il Massimo Comun Divisore in Matematica viene usato quasi esclusivamente per eseguire il [Raccoglimento a Fattor Comune Totale](#) cui puoi fare riferimento per vedere un esercizio sviluppato.

Scheda C1: Massimo Comune Divisore

Massimo Comun Divisore e' il piu' grande fra i divisori comuni di due o piu' numeri (termini).

Prendiamo ad esempio due numeri 8 e 12 il M.C.D. e' 4 perche' i divisori comuni sono 1,2,4 il maggiore fra i divisori e' 4

Da notare che essendo il Massimo Comun Divisore il piu' grande dei divisori e' sempre minore od uguale di ciascuno dei numeri su cui si calcola.

Quindi non farti portare fuori strada dalla parola Massimo

8. mimimo comune multiplo fra monomi

Il *minimo comune multiplo* e' il piu' piccolo fra i multipli comuni, cioe' devi trovare un monomio tanto grande che possa essere diviso fra tutti i monomi che consideri (e questo e' il multiplo) ma di monomi cosi' ce ne sono tanti e tu devi prendere il piu' piccolo (e questo e' il minimo), in pratica il minimo comune multiplo per essere divisibile deve contenere tutti i monomi di partenza quindi deve essere o piu' grosso od almeno uguale al monomio di partenza

Cioe' dovremo prendere tutti i fattori con l'esponente piu' alto facciamo un esenpio:

Trovare il m.c.m. fra

$6a^2b^3c$ e $4ab^2$

Allora il multiplo tra 6 e 4 e' 12 poi

Tra a^2 ed a sceglieremo a^2

Tra b^3 e b^2 sceglieremo b^3

Nel primo c'e' c e nel secondo non c'e', quindi prendiamo c

Quindi il minimo comune multiplo e' $12a^2b^3c$

D. *Polinomi*

1. Perche' i polinomi

Finora in classe sei partito dai numeri naturali:

N 1,2,3,..

ed hai visto che su di essi si possono fare sempre solamente le operazioni di somma e prodotto; poi per poter fare anche la differenza sei passato ai numeri interi relativi:

Z ..-2,-1,0,+1,+2,..

e su di essi hai definito le operazioni di somma, differenza e prodotto; infine, per poter fare anche il quoziente sei passato ai numeri razionali **Q**.

Ora, secondo te, sono piu' importanti i numeri o le operazioni? Evidentemente, se ho variato i numeri per poter fare le operazioni, saranno piu' importanti le operazioni. Qual'e' quindi il passo successivo?

Costruire un insieme il piu' ampio possibile in cui studiare le operazioni: ebbene questo insieme e' quello dei **polinomi**.

Ti avviso subito che studiare i polinomi purtroppo e' abbastanza noioso, perche' e' come se ti mettessi a studiare un vocabolario, pero' ne vale la pena: una volta che avrai studiato le proprieta' di un'operazione queste resteranno sempre uguali per tutti gli enti matematici.

Ti ho detto che l'insieme dei polinomi e' l'insieme piu' ampio su cui fare le operazioni. Allora ora ti mostro che anche i numeri sono compresi nei polinomi; consideriamo ad esempio il numero:

4657

Esso si puo' pensare come 4 migliaia piu' 6 centinaia piu' 5 decine piu' 7 unita' cioe'

$$4 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

se ora al posto di **10** metto **a**, ottengo un polinomio:

$$4a^3 + 6a^2 + 5a + 7$$

E cosı il numero $4 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0$ si dice scritto in forma **polinomiale**.

Esercizio: ricordando che

$$10^{-1} = 1/(10) \quad \text{e} \quad 10^{-2} = 1/(10)^2$$

trasforma prima in forma polinomiale e poi in polinomio (con **a** al posto di **10**) il numero 103.456,78

a) Definizione di un polinomio

Polinomio deriva anche lui dal greco e significa piu' termini (**Scheda D1**).

Quindi un polinomio e' un insieme di piu' monomi. i polinomi vengono classificati per il numero di termini irriducibili (*cioe' che non si possono piu' sommare*):

$2a^5 + 3b$ e' un binomio

$a + 1$ e' un binomio

$2a^5 + 3b + 2c$ e' un trinomio

$2a + 3b + 4a$ e' un binomio perche' $2a + 4a = 6a$ e i termini diventano 2

$2a^2 + 3b + 4a + 1$ e' un quadrinomio

Oltre 4 termini piuttosto che parlare di quinquinomio, esanomio,... si preferisce dire polinomio di 5 termini, di 6 termini,....

Scheda D1: COS'E' UN TERMINE

Per **termine** si intende cio' che c'e' fra un segno PIU' o MENO e il segno PIU' o MENO successivo (se c'e') (fanno eccezione le parentesi) cosi' ad esempio se prendiamo

$$2a + 3ab - 4a$$

il monomio **$+3ab$** e' un termine essendo compreso fra il suo **+** ed il **-** successivo

il monomio **$-4a$** e' un termine essendo l'ultimo della fila

il monomio **$2a$** e' un termine (ricorda che se un monomio non ha segno davanti e' sottointeso il segno **+**)

se ora prendiamo

$$2a + (-3ab)(-4a)/(-3bc) - 4a$$

tutto il blocco

$+(-3ab)(-4a)/(-3bc)$ e' un solo termine

b) Grado di un polinomio

Consideriamo ad esempio il polinomio:

$$2a^4 + 3a^6b - 4a + 5$$

$2a^4$ ha grado 4

$+3a^6b$ ha grado 7

$-4a$ ha grado 1

5 ha grado 0

Il polinomio in totale ha grado 7.

infatti prendiamo il grado dei monomi e scegliamo quello piu' alto.

DEFINIZIONE: il grado di un polinomio e' uguale al grado del suo monomio di grado piu' alto.

Esempio:

Qual'e' il grado di $a^3 + 3a^2b^2 - 4b^2$?

Il grado in generale e' 4

rispetto alla lettera a e' 3

rispetto alla lettera b e' 2

rispetto alla lettera c e' 0 (la lettera c non c'e')

c) Polinomio ordinato

Considera i 2 polinomi

1) $a^3 + b^3 + c + ab$

2) $4a^3 + 6a^2 + 4a + 5$

osserva i gradi dei monomi rispetto alla lettera **a**:

➤ nel primo polinomio sono 3 0 0 1

➤ nel secondo polinomio sono 3 2 1 0

Il secondo polinomio, dove i gradi sono in fila, viene detto **polinomio ordinato secondo la lettera a**

Esempi:

$$a^3 + a^2 + ab + b$$

il polinomio e' ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera **a**;

$$a^3 + 2a^2b + 5ab^2 + 6b^3$$

il polinomio e' ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera a e secondo le potenze crescenti della lettera **b**;

$$a + ab + 5b^2 + b^3 - 5b^4$$

il polinomio e' ordinato secondo le potenze crescenti della lettera **b**; 4444444444444444

Attenzione!: talvolta un polinomio puo' essere ordinato senza sembrarlo; esempio:

$$a^3 + a + 1$$

non sembra ordinato; ma se lo scrivo:

$$a^3 + 0a^2 + a + 1$$

(tanto lo 0 non cambia niente); allora e' ordinato anche il polinomio:

$$1 + a + ab^2 + a^3 + a^3bc$$

non sembra ordinato, ma se lo scrivo

$$1a^0 + a(1 + b^2) + 0a^2 + a^3(1 + bc)$$

allora diventa ordinato secondo le potenze crescenti della lettera **a**.

Per esercizio prova ad ordinarlo secondo le potenze crescenti della lettera **b**; ordinalo infine rispetto alla lettera **c**.

d) Polinomio completo

Il polinomio:

$$a^3 + a + 1$$

non sembra ordinato ma se lo scrivo:

$$a^3 + 0a^2 + a + 1$$

allora si vede che e' ordinato.

Un polinomio che e' ordinato e in cui vi siano tutti i termini (con coefficiente non nullo) tra il grado maggiore e 0 e' **completo** (intuitivamente se e' ordinato da solo senza aggiungere niente).

Esempi:

$5a^3 - 7a^2 + 4a + 1$ e' completo

$5a^3 - 7a^2 + 4a$ non e' completo (manca il termine a grado 0).

Per esercizio scrivi un polinomio di almeno 6 termini che sia completo ed uno di 7 che non sia completo.

2. Somma fra polinomi

Come si fa la somma fra numeri? Sommi le unita' con le unita' (e se superi 9 riporti le decine) poi le decine con le decine, eccetera.

Nei polinomi e' piu' facile, perche' non c'e' il riporto: devi far cadere le parentesi e poi sommare i termini simili come nei monomi. se hai bisogno di ripassare la somma fra monomi.

Esempio:

$$5a^4 + 6a^2 - 4a + 2 + (a^4 - 3a^3 - 2a^2 + 2a + 5) = 5a^4 + 6a^2 - 4a + 2 + a^4 - 3a^3 - 2a^2 + 2a + 5 =$$

ora metto vicini i termini simili (di solito a scuola, senza raggrupparli, si sottolineano con simboli particolari):

$$5a^4 + a^4 - 3a^3 + 6a^2 - 2a^2 - 4a + 2a + 2 + 5 =$$

sommo i termini simili:

$$= 6a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a + 7$$

Ricordati che i polinomi ordinati comprendono anche i numeri, quindi per fare l'addizione fra polinomi, puoi mettere in colonna come con i numeri e qui non c'e' bisogno di riportare!

Esempio:

$$5a^4 + 6a^2 - 4a + 2 + (a^4 - 3a^3 - 2a^2 + 2a + 5) + (6a^3 - 4a^2 + a - 1) =$$

$$5a^4 \quad \quad + 6a^2 \quad - 4a \quad + 2 \quad +$$

$$a^4 \quad - 3a^3 \quad - 2a^2 \quad + 2a \quad + 5 \quad +$$

$$\quad \quad 6a^3 \quad - 4a^2 \quad + a \quad - 1 =$$

$$6a^4 + 3a^3 \quad \quad - a \quad + 6$$

poi scrivo il risultato $= 6a^4 + 3a^3 - a + 6$

3. Differenza di polinomi

Per fare la differenza fra polinomi occorre far cadere le parentesi (**Scheda D2**) ed eseguire la somma fra i monomi simili:

$$5a^4 + 6a^2 - 4a + 2 - (a^4 - 3a^3 - 2a^2 + 2a + 5) = 5a^4 + 6a^2 - 4a + 2 - a^4 + 3a^3 + 2a^2 - 2a - 5$$

Ora metto vicini i termini simili (di solito a scuola, senza raggrupparli, si sottolineano con simboli particolari):

$$5a^4 - a^4 + 3a^3 + 6a^2 + 2a^2 - 4a - 2a + 2 - 5$$

sommo i termini simili:

$$4a^4 + 3a^3 + 8a^2 - 6a - 3$$

Scheda D2: USO DELLE PARENTESI

In matematica le parentesi hanno 2 significati:

il primo, che abbiamo già visto e' far considerare un tutto unico quello che e' dentro parentesi come ad esempio

$$2a+3=(2a+3)$$

per indicare che se anche non posso fare la somma considero la somma come fatta.

Ma c'e' un altro significato molto importante ed e' che i termini dentro parentesi hanno tutti gli stessi diritti e l'operazione (o il segno) che e' fuori parentesi appartiene a tutti. Cioe' in

$-(3a^2+2a-3)$ il segno meno appartiene a tutti e tre i termini dentro parentesi quindi devi fare

$$-(3a^2) = -9a^2$$

$$-(+2a) = -2a$$

$$-(-3) = +3$$

secondo le regole dei segni .

Piu' in generale se hai $-2b(3a^2+2a-3)$ otterrai $-6a^2b-4ab+6b$ e, come vedi, $-2b$ appartiene a ciascuno dei monomi interni.

4. Prodotto nei polinomi

Nei polinomi possiamo considerare vari tipi di prodotto:

a) Prodotto fra un monomio e un polinomio

Per moltiplicare un monomio per un polinomio occorre ricordare il significato di parentesi: tutti i termini interni hanno lo stesso diritto rispetto all'operazione esterna; quindi bastera' moltiplicare il monomio esterno per ogni termine del polinomio.

esempio:

$$-3a^3b(6a^2-4ab+5b^2) =$$

faccio i calcoli parziali

$$(-3a^3b) \cdot (6a^2) = -18a^5b$$

$$(-3a^3b) \cdot (-4ab) = +12a^4b^2$$

$$(-3a^3b) \cdot (5b^2) = -15a^3b^3$$

quindi il risultato e'

$$= -18a^5b + 12a^4b^2 - 15a^3b^3$$

Per esercizio prova ad inventare dei prodotti fra un monomio ed un polinomio di 3 termini, di 4 termini, di 5 termini.

Quando moltiplichi puoi moltiplicare il monomio per il polinomio oppure il polinomio per il monomio, il risultato e' identico perche' per la moltiplicazione vale la proprieta' commutativa cioe' $3 \times 2 = 2 \times 3$.

Esercizio n. 1.

$$(5a^4-3a+2)(4a^2-ab) =$$

$$5a^4 \cdot 4a^2 = 20a^6$$

$$5a^4 \cdot (-ab) = -5a^5b$$

$$(-3a) \cdot 4a^2 = -12a^3$$

$$(-3a) \cdot (-ab) = +3a^2b$$

$$(+2) \cdot 4a^2 = +8a^2$$

$$(+2) \cdot (-ab) = -2ab$$

$$= 20a^6 - 5a^5b - 12a^3 + 3a^2b + 8a^2 - 2ab$$

Non essendovi termini simili l'esercizio e' terminato.

Di solito invece di fare i calcoli a parte si preferisce farli all'interno dell'esercizio nel seguente modo:

$$(5a^4-3a+2)(4a^2-ab) =$$

$$= 5a^4 \cdot 4a^2 + 5a^4 \cdot (-ab) + (-3a) \cdot 4a^2 + (-3a) \cdot (-ab) + (+2) \cdot 4a^2 + (+2) \cdot (-ab) =$$

$$= 20a^6 - 5a^5b - 12a^3 + 3a^2b + 8a^2 - 2ab$$

D'ora in avanti faremo gli esercizi con quest'ultimo metodo.

Esercizio n. 2

$$(5a^3+4a^2-6ab^2+7b^3)(2a^3-3a^2b+4ab^2+b^3) =$$

$$5a^3 \cdot 2a^3 + 5a^3 \cdot (-3a^2b) + 5a^3 \cdot 4ab^2 + 5a^3 \cdot b^3 + 4a^2 \cdot 2a^3 + 4a^2 \cdot (-3a^2b) + 4a^2 \cdot 4ab^2 + 4a^2 \cdot b^3 + (-6ab^2) \cdot 2a^3 + (-6ab^2) \cdot (-3a^2b) + (-6ab^2) \cdot 4ab^2 + (-6ab^2) \cdot b^3 + 7b^3 \cdot 2a^3 + 7b^3 \cdot (-3a^2b) + 7b^3 \cdot 4ab^2 + 7b^3 \cdot b^3 =$$

ATTENZIONE: per andare a capo si ripete il segno che c'è; fa eccezione il meno poichè meno per meno fa più, allora per andare a capo con il meno si scrive + e a capo si mette -

$$= 10a^6 - 15a^5b + 20a^4b^2 + 5a^3b^3 + 8a^5 - 12a^4b + 16a^3b^2 + 4a^2b^3 +$$

$$- 12a^4b^2 + 18a^3b^3 - 24a^2b^4 - 6ab^5 + 14a^3b^3 - 21a^2b^4 + 28ab^5 + 7b^6 =$$

ora sommo i termini simili.

$$= 10a^6 - 15a^5b + 8a^4b^2 + 37a^3b^3 - 45a^2b^4 + 22ab^5 + 7b^6 + 8a^5 - 12a^4b + 16a^3b^2 + 4a^2b^3.$$

Esercizio n. 3

$$(3xy+2xz-4yz)(x-2y^2+yz) =$$

prova da solo.

b) Prodotto fra due polinomi

Anche per fare il prodotto fra 2 polinomi occorre tener presente il concetto di parentesi: tutti i termini interni hanno lo stesso diritto rispetto all'operazione esterna; quindi basterà moltiplicare tutti i monomi del primo polinomio per ogni termine del secondo polinomio.

Qui sotto un esempio ed a fianco un esempio grafico:

$$(3a-5b)(4a+3b) =$$

faccio i calcoli parziali:

$$(3a)(4a) = 12a^2$$

$$(3a)(+3b) = +9ab$$

$$(-5b)(4a) = -20ab$$

$$(-5b)(3b) = -15b^2$$

Ora metto assieme i risultati

parziali:

$$= 12a^2 + 9ab - 20ab - 15b^2 =$$

da notare che sono 4 termini perchè hai moltiplicato un binomio (2 termini) per un binomio (2 termini); quanti termini avresti avuto moltiplicando un trinomio per un quadrinomio? Ora sommiamo:

$$= 12a^2 - 11ab - 15b^2$$

Se devi moltiplicare due polinomi ordinati con un numero elevato di termini, conviene ricordare che, per i polinomi ordinati, posso moltiplicare in colonna come per i numeri; vediamo un esempio: moltiplichiamo un trinomio per un quadrinomio:

$$(a^3+5a^2-4a-1)(2a^2-a+4) =$$

$$a^3 \quad +5a^2 \quad -4a \quad -1$$

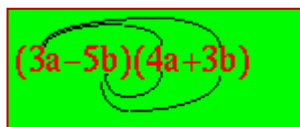
$$2a^2 \quad -a \quad +4$$

$$+ 4a^3 + 20a^2 - 16a - 4$$

$$- a^4 - 5a^3 + 4a^2 + a -$$

$$2a^5 + 10a^4 - 8a^3 - 2a^2 - -$$

$$2a^5 + 9a^4 - 9a^3 + 22a^2 - 15a - 4$$



Osserva questo schema

devi moltiplicare il primo monomio della prima parentesi per il primo della seconda parentesi, poi il primo della prima parentesi per il secondo della seconda parentesi, poi il secondo della prima parentesi per il primo della seconda parentesi infine il secondo della prima parentesi per il secondo della seconda parentesi

Attenzione! quando moltiplichi puoi moltiplicare il primo polinomio per il secondo oppure il secondo polinomio per il primo, il risultato e' identico perche' per la moltiplicazione vale la proprieta' commutativa cioe' $3 \times 2 = 2 \times 3$ pero' quando moltiplicheremo un polinomio per un altro polinomio noi moltiplicheremo sempre i termini del primo per i termini del secondo: troppe volte ho visto un alunno confondersi alla lavagna per non rispettare questa semplice regola.

Esercizio n. 1

$$(5a^4 - 3a + 2)(4a^2 - ab) =$$

$$5a^4 \cdot 4a^2 = 20a^6$$

$$5a^4 \cdot (-ab) = -5a^5b$$

$$(-3a) \cdot 4a^2 = -12a^3$$

$$(-3a) \cdot (-ab) = +3a^2b$$

$$(+2) \cdot 4a^2 = +8a^2$$

$$(+2) \cdot (-ab) = -2ab$$

$$= 20a^6 - 5a^5b - 12a^3 + 3a^2b + 8a^2 - 2ab$$

Non essendovi termini simili l'esercizio e' terminato.

Di solito invece di fare i calcoli a parte si preferisce farli all'interno dell'esercizio nel seguente modo:

$$(5a^4 - 3a + 2)(4a^2 - ab) = 5a^4 \cdot 4a^2 + 5a^4 \cdot (-ab) + (-3a) \cdot 4a^2 + (-3a) \cdot (-ab) + (+2) \cdot 4a^2 + (+2) \cdot (-ab) =$$

$$= 20a^6 - 5a^5b - 12a^3 + 3a^2b + 8a^2 - 2ab.$$

Esercizio n. 2

$$(5a^3 + 4a^2 - 6ab^2 + 7b^3)(2a^3 - 3a^2b + 4ab^2 + b^3) =$$

$$5a^3 \cdot 2a^3 + 5a^3 \cdot (-3a^2b) + 5a^3 \cdot 4ab^2 + 5a^3 \cdot b^3 + 4a^2 \cdot 2a^3 + 4a^2 \cdot (-3a^2b) + 4a^2 \cdot 4ab^2 + 4a^2 \cdot b^3 +$$

$$(-6ab^2) \cdot 2a^3 + (-6ab^2) \cdot (-3a^2b) + (-6ab^2) \cdot 4ab^2 + (-6ab^2) \cdot b^3 + 7b^3 \cdot 2a^3 + 7b^3 \cdot (-3a^2b) + 7b^3 \cdot 4ab^2 + 7b^3 \cdot b^3 =$$

ATTENZIONE: per andare a capo si ripete il segno che c'e'; fa eccezione il meno poiche' meno per meno fa piu', allora per andare a capo con il meno si scrive + e a capo si mette -

$$= 10a^6 - 15a^5b + 20a^4b^2 + 5a^3b^3 + 8a^5 - 12a^4b + 16a^3b^2 + 4a^2b^3 +$$

$$- 12a^4b^2 + 18a^3b^3 - 24a^2b^4 - 6ab^5 + 14a^3b^3 - 21a^2b^4 + 28ab^5 + 7b^6 =$$

ora sommo i termini simili

$$= 10a^6 - 15a^5b + 8a^4b^2 + 37a^3b^3 - 45a^2b^4 + 22ab^5 + 7b^6 + 8a^5 - 12a^4b + 16a^3b^2 + 4a^2b^3.$$

c) Prodotti notevoli

Perche' servono i prodotti notevoli?

I prodotti notevoli sono sempre la "Bestia Nera" degli studenti che non capiscono perche' debbono faticare di piu' per ottenere risultati che non sempre sembrano apprezzabili. Vedi, se noi facciamo sempre la stessa operazione ci stanchiamo e cerchiamo di abbreviare e di trovare delle regolarita' che ci permettano di scrivere il risultato senza dover sempre eseguire tutte le operazioni; cioe' possiamo generalizzare, e' come in certi giochi dove si accumulano punti e ad un certo momento si sale ad un livello superiore: e' il caso dei prodotti notevoli dove sali dal livello di operazioni fra lettere al livello di operazioni sulle operazioni (prodotti). E' diciamo, il primo passo per capire che la matematica non e' solo un insieme di operazioni e di numeri, noi possiamo anche fare delle operazioni sulle operazioni, operazioni sulle operazioni sulle operazioni

Troppo difficile? Non importa, vai avanti e vedrai che ti diventera' chiaro in seguito.

Si definiscono **prodotti notevoli** quei prodotti dove posso scrivere il risultato senza eseguire la moltiplicazione

Ecco i prodotti notevoli da studiare:

(1) Somma di due monomi per la loro differenza

Proviamo a scrivere $(2a+3b)(2a-3b) =$

$$2a \cdot 2a = 4a^2$$

$$2a \cdot (-3b) = -6ab$$

$$3b \cdot 2a = 6ab$$

$$3b \cdot (-3b) = -9b^2$$

e siccome $6ab-6ab$ si annullano, otterremo:

$$= 4a^2 - 9b^2$$

Proviamo a scrivere $(2x+4y)(2x-4y) =$

$$2x \cdot 2x = 4x^2$$

$$2x \cdot (-4y) = -8xy$$

$$4y \cdot 2x = 8xy$$

$$4y \cdot (-4y) = -16y^2$$

e siccome $8xy-8xy$ si annullano, otterremo:

$$= 4x^2 - 16y^2$$

Proviamo ora a scrivere $(3a+5b)(3a-5b) =$

$$3a \cdot 3a = 9a^2$$

$$3a \cdot (-5b) = -15ab$$

$$5b \cdot 3a = 15ab$$

$$5b \cdot (-5b) = -25b^2$$

e siccome $15ab-15ab$ si annullano, otterremo:

$$= 9a^2 - 25b^2$$

Non so tu, ma io mi sto stancando: se dovessi fare 50 operazioni come le precedenti mi annoierei a morte, allora e' il caso di vedere se e' possibile trovare qualche scorciatoia: hai notato che vengono sempre due termini che sommandosi vanno via? A cosa e' dovuto? Evidentemente al fatto che i termini sono uguali e che i segni in mezzo ai monomi sono uno piu' e l'altro meno; ma allora senza fare tutte le operazioni io posso fare il primo monomio per il primo ed il secondo monomio per il secondo tanto gli altri termini del prodotto vanno via!

Quindi se devo fare $(3x+4y)(3x-4y) =$

faro'

$$3x \cdot 3x = 9x^2$$

$$4y \cdot (-4y) = -16y^2$$

e scrivero'

$$= 9x^2 - 16y^2$$

ora scriviamo la regola prendendo i monomi piu' semplici possibili

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

REGOLA: la somma di due monomi per la loro differenza e' uguale al quadrato del primo monomio meno il quadrato del secondo monomio

Se hai bisogno di aiuto per leggere la regola, leggi quanto segue:

Per leggere la regola devi cominciare prima dell'uguale leggendo l'operazione che coinvolge tutti in termini (*il prodotto*), poi devi dire fra chi e' quest'operazione descrivendo il primo fattore (*fra la somma di due monomi*) ed il secondo fattore (*e la loro differenza*); a questo punto hai finito di leggere la prima parte e c'e' l'uguale che si legge come un verbo (*e' uguale a*), ora devi leggere il secondo termine a^2-b^2 ; leggi l'operazione (*la differenza*) descrivendo fra chi e' l'operazione (*fra il quadrato del primo monomio ed il quadrato del secondo*). Se metti assieme il tutto ottieni la regola:

Il prodotto fra la somma di due monomi e la loro differenza e' uguale alla differenza fra il quadrato del primo monomio ed il quadrato del secondo monomio.

Se hai bisogno di una spiegazione piu' particolareggiata, leggi quanto segue:

Proviamo a scrivere $(2a+3b)(2a-3b)$

$$2a \cdot 2a = 4a^2$$

$$2a \cdot (-3b) = -6ab$$

$$3b \cdot 2a = 6ab$$

$$3b \cdot (-3b) = -9b^2$$

otterremo $4a^2 - 6ab + 6ab - 9b^2$

Osserviamo che i due monomi interni sono uguali e di segno contrario, quindi si eliminano ed otteniamo:

$$4a^2 - 9b^2$$

I due monomi interni sono uguali e di segno contrario perche' dentro entrambe le parentesi i primi monomi sono uguali mentre i secondi monomi sono una volta piu' ed una volta meno (sono uguali ed opposti). Quindi quando vedi il prodotto fra due parentesi dove i primi monomi sono uguali ed i secondi sono uguali ma di segno contrario puoi abbreviare, tanto i due termini in mezzo andranno sempre via.

Proviamo con $(2x+4y)(2x-4y)$:

sapresti scrivere il risultato senza fare tutte le operazioni?

essendo i primi monomi uguali in entrambe le parentesi mentre i secondi sono uguali ma di segno contrario c'e' da pensare che il prodotto tra $2x$ e $-4y$ e quello tra $4y$ e $2x$ andranno via ed allora bastera' fare:

$$2x \cdot 2x = 4x^2$$

$$4y \cdot (-4y) = -16y^2$$

ed otterremo

$$4x^2 - 16y^2$$

Da notare che hai eseguito delle operazioni (il **prodotto**) su delle operazioni (**somma e differenza**) quindi vedi che aumenta il livello su cui stai operando.

(2) Quadrato del binomio

Calcoliamo $(2a+3b) \cdot (2a+3b)$

$$2a \cdot 2a = 4a^2$$

$$2a \cdot 3b = 6ab$$

$$3b \cdot 2a = 6ab$$

$$3b \cdot 3b = 9b^2$$

Quindi:

$$4a^2 + 6ab + 6ab + 9b^2$$

Osserviamo che i due monomi interni sono uguali e (contrariamente a prima) con lo stesso segno quindi li debbo sommare ed ottengo:

$$4a^2 + 12ab + 9b^2$$

Quindi io posso moltiplicare il primo termine con il primo, poi il primo per il secondo e, siccome mi verrebbero due termini uguali, senza sommarli dopo faccio subito il risultato moltiplicando per 2, infine il secondo termine per il secondo.

Osserviamo che invece di $(2a+3b) \cdot (2a+3b)$ posso scrivere $(2a + 3b)^2$

Proviamo ora a scrivere $(2x+4y)^2 = (2x+4y)(2x+4y)$

$$2x \cdot 2x = 4x^2$$

$$2x \cdot 4y = 8xy$$

$$4y \cdot 2x = 8xy$$

$$4y \cdot 4y = 16y^2$$

quindi $4x^2 + 16xy + 16y^2$

e siccome $8xy + 8xy$ sono uguali e si sommano, otterremo:

$$4x^2 + 16xy + 16y^2$$

Ora se ti dico di calcolare:

$$(4a+3b)^2$$

saresti scrivere subito il risultato? Osserva i calcoli fatti prima:

dovrai moltiplicare il primo monomio per se' stesso

$$4a \cdot 4a = 16a^2$$

poi dovrai moltiplicare il primo monomio per il secondo e questo dovrai farlo due volte (cioe' basta moltiplicare per 2) perche' hai visto che vengono sempre due termini uguali che poi si sommano quindi $4a \cdot 3b \cdot 2 = 24ab$; poi dovrai moltiplicare il secondo monomio per se' stesso cioe':

$$3b \cdot 3b = 9b^2 \text{ quindi:}$$

$$16a^2 + 24ab + 9b^2$$

Sembra una cosa stupida, vero? Fare tanta fatica per saltare un passaggio, ma non devi pensare in questi termini, devi pensare in termini di livelli: tu non stai piu' lavorando sui numeri o sui monomi, stai lavorando sulle operazioni fra operazioni, cioe' sei su un livello superiore e vedrai piu' avanti che questi concetti possono portarti a fare operazioni molto piu' complicate con pochi passaggi.

Ora leggiamo la regola considerando i monomi piu' semplici possibili

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

cioe'

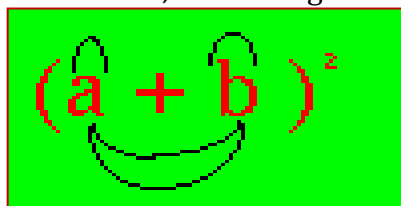
REGOLA: il quadrato di un binomio e' uguale al quadrato del primo monomio piu' il doppio del prodotto del primo per il secondo piu' il quadrato del secondo

Se hai bisogno di aiuto per leggere la regola, leggi quanto segue:

*Per leggere la regola devi cominciare prima dell'uguale leggendo l'operazione che coinvolge tutti i termini (**il quadrato**), poi devi dire fra chi e' quest'operazione descrivendo il primo termine (**di un binomio**), a questo punto hai finito di leggere la prima parte e c'e' l'uguale che si legge come un verbo (**e' uguale a**); ora devi leggere il secondo termine **$a^2 + 2ab + b^2$** ; leggi i termini in successione partendo dal primo termine e cominciando dalle operazioni (**il quadrato**) descrivendo fra chi e' l'operazione (**del primo monomio**), proseguendo col secondo termine (**piu' il doppio del prodotto del primo per il secondo**) e continuando con il terzo termine (**piu' il quadrato del secondo monomio**). Se metti assieme il tutto ottieni la regola:*

Il quadrato di un binomio e' uguale al quadrato del primo monomio piu' il doppio del prodotto del primo termine per il secondo, piu' il quadrato del secondo monomio

Se la regola ti sembra difficile da ricordare, ecco di seguito un semplice metodo:



Osserva la seguente figura e dimmi cosa ti sembra.

Sembra una faccia che sorride: e' il nostro binomio al quadrato con disegnate 2 sopracciglia ed una bocca; il primo sopracciglio significa il primo monomio per se' stesso $a \cdot a$. Il secondo sopracciglio significa il secondo monomio per se' stesso $b \cdot b$. La bocca formata da 2 linee significa due volte il primo per il secondo $2 \cdot a \cdot b$.

Semplice, no?

E se ora ti chiedo di trovare:

$$(a-b)^2 =$$

Bastera' ricordare le regole dei segni quindi:

$$a \cdot a = a^2$$

$$a \cdot (-b) \cdot 2 = -2ab$$

$$(-b) \cdot (-b) = +b^2$$

Quindi:

$$a^2 - 2ab + b^2$$

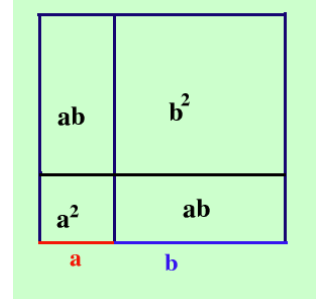
Da notare che il segno meno resta solo nel doppio prodotto mentre i quadrati sono sempre positivi.

Sapevi che i Greci già 2000 anni fa conoscevano questa regola? E questo senza conoscere il calcolo letterale ma utilizzando semplicemente i segmenti. Leggi di seguito:

i Greci lavoravano solo con la geometria, quindi invece dei monomi usavano i segmenti: osserva quest'illustrazione: Il lato del quadrato grosso è ottenuto sommando i due segmenti a e b quindi vale a+b ed è composto da un quadrato di lato a, da un quadrato di lato b e da 2 rettangoli di area ab. Quindi:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

cioè



Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo termine più il doppio del prodotto del primo per il secondo più il quadrato del secondo

(3) Quadrato del trinomio

Abbiamo visto come trovare la regola (cioè si prendono i monomi più semplici possibili) possiamo provare a trovare le regole per altri prodotti: quello che viene più spontaneo è il quadrato quando invece di due termini ne abbiamo tre, cioè il quadrato del trinomio. Ora hai capito il meccanismo dei prodotti notevoli, quindi, senza fare la parte introduttiva, (cioè senza fare tutti i prodotti per trovare dei metodi per abbreviarli) passiamo a trovare la regola finale:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c) \cdot (a+b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Se hai bisogno di vedere i passaggi, ecco:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c) \cdot (a+b+c) =$$

devi moltiplicare ogni termine del primo monomio per ogni termine del secondo

$$a \cdot a = a^2$$

$$a \cdot b = ab$$

$$a \cdot c = ac$$

$$b \cdot a = ab$$

$$b \cdot b = b^2$$

$$b \cdot c = bc$$

$$c \cdot a = ac$$

$$c \cdot b = bc$$

$$c \cdot c = c^2$$

$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 =$$

Ora raccolgo i termini simili e li sommo a^2 c'è solo lui e lo lascio e così faccio anche per b^2 e c^2 poi

$$ab + ab = 2ab$$

$$ac + ac = 2ac$$

$$bc + bc = 2bc$$

raccogliendo il tutto

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

REGOLA: il quadrato di un trinomio è uguale al quadrato del primo monomio più il quadrato del secondo monomio più il quadrato del terzo più il doppio del prodotto del primo monomio per il secondo, più il doppio del prodotto del secondo monomio per il terzo più il doppio del prodotto del primo monomio per il terzo

Se hai bisogno di aiuto per leggere la regola, leggi sotto:

Per leggere la regola devi cominciare prima dell'uguale leggendo l'operazione che coinvolge tutti i termini (*il quadrato*), poi devi dire fra chi e' quest'operazione descrivendo il primo termine (*di un trinomio*); a questo punto hai finito di leggere la prima parte e c'e' l'uguale che si legge come un verbo (*e' uguale a*); ora devi leggere il secondo termine:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

Leggi i termini in successione partendo dal primo termine e cominciando dalle operazioni (*il quadrato*) descrivendo fra chi e' l'operazione (*del primo monomio*), proseguendo col secondo termine (*piu' il quadrato del secondo*) e continuando con il terzo termine (*piu' il quadrato del terzo monomio*); ora il quarto (*piu' il doppio prodotto del primo monomio per il secondo*) e il quinto (*piu' il doppio prodotto del secondo monomio per il terzo*); infine l'ultimo termine (*piu' il doppio prodotto del primo per il terzo monomio*) se metti assieme il tutto ottieni la regola.

Il quadrato di un trinomio e' uguale al quadrato del primo monomio piu' il quadrato del secondo monomio piu' il quadrato del terzo piu' il doppio del prodotto del primo monomio per il secondo, piu' il doppio del prodotto del secondo monomio per il terzo piu' il doppio del prodotto del primo monomio per il terzo.

Allora ora prova a calcolare:

$$(2a^2b - 3ab^2 + 6)^2 =$$

Devi fare il quadrato del primo monomio: $(2a^2b)^2 = (2a^2b) \cdot (2a^2b) = 4a^4b^2$

poi il quadrato del secondo: $(-3ab^2)^2 = (-3ab^2) \cdot (-3ab^2) = +9a^2b^4$

e il quadrato del terzo: $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

Ora fai il primo per il secondo per due: $2a^2b \cdot (-3ab^2) \cdot 2 = -12a^3b^3$

poi il secondo per il terzo per due: $(-3ab^2) \cdot 6 \cdot 2 = -36ab^2$

infine il primo per il terzo per due: $2a^2b \cdot 6 \cdot 2 = 24a^2b$

Metti ora assieme i risultati ed ottieni:

$$4a^4b^2 + 9a^2b^4 + 36 - 12a^3b^3 - 36ab^2 + 24a^2b$$

Abbastanza semplice vero?

(4) Cubo del binomio

Anche per il cubo troviamo la regola come abbiamo fatto per il prodotto notevole precedente: infatti basta che applichiamo l'operazione sul binomio piu' semplice possibile e poi leggiamo il risultato:

$$(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) =$$

ora so che: $(a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$ quindi dovro' fare:

$$= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Se vuoi vedere i passaggi:

$$(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) =$$

moltiplico fra loro i primi due:

$$a \cdot a = a^2$$

$$a \cdot b = ab$$

$$b \cdot a = ab$$

$$b \cdot b = b^2$$

e poiche' $ab + ab = 2ab$

otterro':

$$= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) =$$

Eseguo la moltiplicazione:

$$a^2 \cdot a = a^3$$

$$a^2 \cdot b = a^2b$$

$$2ab \cdot a = 2a^2b$$

$$2ab \cdot b = 2ab^2$$

$$b^2 \cdot a = ab^2$$

$$b^2 \cdot b = b^3$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 =$$

ora sommo i termini simili:

$$a^2b + 2a^2b = 3a^2b$$

$$2ab^2 + ab^2 = 3ab^2$$

quindi:

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Quindi leggendo il primo e l'ultimo passaggio abbiamo la regola:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

cioe'

REGOLA: il cubo di un binomio e' uguale al cubo del primo monomio piu' il triplo del prodotto del quadrato del primo per il secondo, piu' il triplo del prodotto del primo per il quadrato del secondo, piu' il cubo del secondo.

Se hai bisogno di aiuto per leggere la regola, ecco:

Per leggere la regola devi cominciare prima dell'uguale leggendo l'operazione che coinvolge tutti i termini (il cubo); poi devi dire fra chi e' quest'operazione descrivendo il primo termine (di un binomio); a questo punto hai finito di leggere la prima parte e c'e' l'uguale che si legge come un verbo (e' uguale a); ora devi leggere il secondo termine $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$;

leggi i termini in successione partendo dal primo termine e cominciando dalle operazioni (il cubo), descrivendo fra chi e' l'operazione (del primo monomio) proseguendo col secondo termine (piu' il triplo del prodotto del quadrato del primo per il secondo) e continuando con il terzo termine (piu' il triplo del prodotto del primo per il quadrato del secondo), concludendo con l'ultimo termine (piu' il cubo del secondo)

Raccogliendo

Il cubo di un binomio e' uguale al cubo del primo monomio piu' il triplo del prodotto del quadrato del primo per il secondo, piu' il triplo del prodotto del primo per il quadrato del secondo, piu' il cubo del secondo

Ora vediamo su alcuni esempi come applicare questa regola.

Ad esempio supponiamo di dover eseguire:

$$(2x+3y)^3$$

Al posto di a ho $2x$ ed al posto di b ho $3y$; quindi nella regola quando ho il primo monomio metto $2x$ e quando ho il secondo metto $3y$. Facciamolo assieme:

Il cubo di un binomio	$(2x+3y)^3$	
e' uguale	=	
al cubo del primo monomio	$(2x)^3$	
piu' il triplo del prodotto del quadrato del primo per il secondo	$+3 \cdot (2x)^2 \cdot (3y)$	
piu' il triplo del prodotto del primo per il quadrato del secondo	$+3 \cdot (2x) \cdot (3y)^2$	
piu' il cubo del secondo	$+(3y)^3$	

quindi raccogliendo:

$$(2x+3y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot (3y) + 3 \cdot (2x) \cdot (3y)^2 + (3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

Se vuoi vedere i calcoli per esteso, ecco:

$$(2x+3y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot (3y) + 3 \cdot (2x) \cdot (3y)^2 + (3y)^3 =$$

Ora devi fare il cubo del primo termine:

$$(2x) \cdot (2x) \cdot (2x) = 8x^3$$

Poi devi moltiplicare 3 per il quadrato del primo e quello che viene per il secondo: per farlo prima facciamo il quadrato poi calcoliamo i prodotti:

$$+3 \cdot (2x)^2 \cdot (3y) = +3 \cdot (4x^2) \cdot (3y) = +36x^2y$$

Poi devo moltiplicare 3 per il primo monomio e quello che viene per il quadrato del secondo, anche qui prima facciamo il quadrato poi le moltiplicazioni:

$$+3 \cdot (2x) \cdot (3y)^2 = +3 \cdot (2x) \cdot (9y^2) = +54xy^2$$

Ora faccio il cubo del secondo:

$$+(3y)^3 = +(3y) \cdot (3y) \cdot (3y) = +27y^3$$

Raccogliendo il tutto:

$$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

Vediamo ora come comportarci se invece che la somma abbiamo la differenza fra 2 monomi.

Lavoriamo su un esempio:

$$(3x-2y)^3 =$$

Bastera' considerare il segno meno non come operazione fra i due monomi ma come segno appartenente al secondo monomio:

$$[3x + (-2y)]^3 =$$

allora il primo monomio e' $3x$ ed il secondo e' $-2y$

Quindi avremo:

$$(3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot (-2y) + 3 \cdot (3x) \cdot (-2y)^2 + (-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$$

Se vuoi vedere i calcoli per esteso, ecco:

$$(3x-2y)^3 = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot (-2y) + 3 \cdot (3x) \cdot (-2y)^2 + (-2y)^3 =$$

Ora devi fare il cubo del primo termine:

$$(3x) \cdot (3x) \cdot (3x) = 27x^3$$

Poi devi moltiplicare 3 per il quadrato del primo e quello che viene per il secondo: per farlo prima facciamo il quadrato poi calcoliamo i prodotti:

$$+3 \cdot (3x)^2 \cdot (-2y) = +3 \cdot (9x^2) \cdot (-2y) = -54x^2y$$

poi devo moltiplicare 3 per il primo monomio e quello che viene per il quadrato del secondo, anche qui prima facciamo il quadrato poi le moltiplicazioni:

$$+3 \cdot (3x) \cdot (-2y)^2 = +3 \cdot (3x) \cdot (+4y^2) = +36xy^2$$

Ora faccio il cubo del secondo:

$$+(-2y)^3 = +(-2y) \cdot (-2y) \cdot (-2y) = -8y^3$$

Raccogliendo il tutto :

$$= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$$

Da notare che i segni vengono **alternati**: il primo *positivo*, il secondo *negativo*, il terzo *positivo* ed il quarto *negativo*, cioè, se non vuoi fare troppi conti, puoi mettere al risultato i segni alternati partendo dal primo positivo.

Perché i segni vengono alternati? Quando fai un elevamento a potenza di un binomio pensa a che potenze ha il secondo monomio: nel primo termine del risultato non c'è quindi è come se avesse potenza 0, nel secondo termine ha potenza 1, nel terzo termine ha potenza 2, nel quarto termine ha potenza 3 e quando una potenza è pari(0,2,4,6,...) il risultato è positivo, mentre quando la potenza è dispari(1,3,5,7,...) il risultato ha lo stesso segno del secondo monomio quindi i segni dei termini del risultato, ad esempio, di

$$(3x-2y)^3$$

saranno :

+ il primo

- il secondo

+ il terzo

- il quarto

e questa regola è generale cioè vale per tutte le potenze del binomio

(5) Cubo del trinomio

Si tratta di trovare la regola che permette di scrivere il risultato di:

$$(a+b+c)^3 =$$

Al solito faremo i calcoli per trovare il risultato e poi lo useremo per tutti i trinomi:

$$(a+b+c) \cdot (a+b+c) \cdot (a+b+c) =$$

Ora so che:

$$(a+b+c) \cdot (a+b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Quindi dovrò fare:

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) \cdot (a + b + c) =$$

$$= a^3 + a^2b + a^2c + ab^2 + b^3 + b^2c + ac^3 + bc^2 + c^3 + 2a^2b + 2ab^2 + 2abc + 2a^2c + 2abc + 2ac^2 + 2abc + 2b^2c + 2bc^2 =$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

Quindi leggendo il primo e l'ultimo passaggio abbiamo la regola:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

cioè

REGOLA: Il cubo di un trinomio è uguale al cubo del primo monomio più il cubo del secondo più il cubo del terzo più il triplo del prodotto del quadrato del primo per il

secondo, piu' il triplo prodotto del quadrato del primo per il terzo, piu' il triplo del prodotto del primo per il quadrato del secondo, piu' il triplo prodotto del primo per il quadrato del terzo, piu' il triplo prodotto del quadrato del secondo per il terzo piu' il triplo prodotto del secondo per il quadrato del terzo, piu' sei volte il prodotto del primo per il secondo per il terzo.

Piuttosto complicato, vero? Quasi quasi conviene farsi i calcoli ogni volta.

(6) Potenza qualunque del binomio

Se io ora ti chiedessi di calcolare:

$$(a+b)^4 =$$

evidentemente basterebbe fare:

$$= (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b)$$

e poi giu' a fare tanti calcoli fino a trovare la formula finale;

e se volessi fare:

$$(a+b)^7 =$$

sai quanti calcoli dovro' fare!

Pero' se invece di annoiarci a fare i calcoli osserviamo bene ed usiamo il cervello forse possiamo trovare subito il risultato finale senza eseguire le operazioni.

Possiamo utilizzare due metodi:

- Metodo di Tartaglia
- Regola di Newton

(a) *Metodo di Tartaglia per calcolare la potenza di un binomio*

Proviamo a scrivere le potenze del binomio che conosciamo:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Possiamo subito osservare che tutti i risultati sono **polinomi ordinati** secondo la potenza decrescente della lettera **a** e secondo la potenza crescente della lettera **b**, sono anche **completi** ed infine la potenza del primo termine corrisponde alla potenza del binomio; quindi se devo calcolare:

$$(a+b)^4 =$$

per la parte letterale (senza mettere i coefficienti numerici) dovro' fare

$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$ ora come trovare i coefficienti numerici? Proviamo a scrivere quelli che abbiamo:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1 \quad 1$$

$$(a+b)^2 = 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(a+b)^3 = 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

I numeri sono distribuiti su di un triangolo (Triangolo di Tartaglia – *Scheda n. D2*) ed ogni numero sotto e' somma dei 2 numeri sopra (se sono in due) oppure vale 1 – *Scheda n. D3* ;

Scheda n. D2: Il triangolo di Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
 & 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Scheda n. D3

I numeri sotto sono la somma dei 2 numeri sopra oppure, se sopra c'e' un solo numero, valgono 1; infatti:

$$\begin{array}{l}
 (a+b)^0 = 1 \\
 (a+b)^1 = 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 = 1 \quad 1+1 \quad 1 \\
 \text{per la riga successiva:} \\
 (a+b)^0 = 1 \\
 (a+b)^1 = 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 = 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 = 1 \quad 1+2 \quad 2+1 \quad 1 \\
 \text{e cosi' via di seguito:} \\
 (a+b)^0 = 1 \\
 (a+b)^1 = 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 = 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 = 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 = 1 \quad 1+3 \quad 3+3 \quad 3+1 \quad 1
 \end{array}$$

Quindi si puo' pensare che se devo fare:

$$\begin{array}{l}
 (a+b)^4 = \\
 \text{i numeri saranno:} \\
 (a+b)^0 = 1 \\
 (a+b)^1 = 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 = 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 = 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 = 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
 \end{array}$$

Se hai bisogno di ulteriori spiegazioni – *Scheda n. D4*

Quindi avrai:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Scheda n. D4

Considerando le potenze che hai gia' calcolato, hai i seguenti valori:

$$\begin{array}{l}
 (a+b)^0 = 1 \\
 (a+b)^1 = 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 = 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 = 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 \text{Oer calcolare i termini successivi basta fare:} \\
 (a+b)^0 = 1 \\
 (a+b)^1 = 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 = 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 = 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 = 1 \quad 1+3 \quad 3+3 \quad 3+1 \quad 1 \\
 \text{cioe' }
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 &= 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 &= 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 &= 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
 \end{aligned}$$

Proseguendo avro'

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 &= 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 &= 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 &= 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 (a+b)^5 &= 1 \quad 1+4 \quad 4+6 \quad 6+4 \quad 4+1 \quad 1
 \end{aligned}$$

cioe'

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 &= 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 &= 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 &= 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 (a+b)^5 &= 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
 \end{aligned}$$

Se vuoi vedere altre potenze vai al triangolo di [Tartaglia](#)

Per vedere se hai capito bene, fai da solo:

$$(a+b)^5 =$$

e quando hai finito confronta il risultato qui di seguito:

Devo calcolare:

$$(a+b)^5 =$$

Le potenze della parte letterale saranno:

$$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$$

Ora devo mettere i coefficienti numerici partendo dagli ultimi che ho trovato:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 &= 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 &= 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 &= 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
 \end{aligned}$$

Scrivero' i numeri in mezzo sommando i due numeri che sono sopra, e, se sono all'inizio o alla fine, metto solo 1:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 &= 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 &= 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 &= 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 (a+b)^5 &= 1 \quad 1+4 \quad 4+6 \quad 6+4 \quad 4+1 \quad 1
 \end{aligned}$$

cioe':

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 &= 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 &= 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 &= 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 (a+b)^5 &= 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
 \end{aligned}$$

Ora metto questi numeri come coefficienti alla parte letterale trovata prima:

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Scrivo la formula finale:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Come utilizzare queste regole?

Facciamo un esempio:

se devo calcolare:

$$(2x+3y)^4 =$$

so che la regola vale:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Al posto di a ho $2x$ ed al posto di b ho $3y$; quindi vado a sostituire:

$$(2x+3y)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3(3y) + 6(2x)^2(3y)^2 + 4(2x)(3y)^3 + (3y)^4 =$$

ed eseguendo i calcoli:

$$= 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4$$

se hai bisogno di vedere i calcoli, leggi di seguito:

$$(2x+3y)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3(3y) + 6(2x)^2(3y)^2 + 4(2x)(3y)^3 + (3y)^4 =$$

Ora prima calcolo le potenze poi faccio i prodotti:

$$= (16x^4) + 4(8x^3)(3y) + 6(4x^2)(9y^2) + 4(2x)(27y^3) + (81y^4) =$$

Quindi ottengo:

$$= 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4$$

Fai i seguenti esercizi poi confronta con quelli che ho sviluppato io.

$$(x-2y)^4 =$$

$$(2x+y)^5 =$$

$$(3x-y)^5 =$$

$$(2a-3b)^5 =$$

$$(x-2y)^6 =$$

$$(2x^2+y^3)^6 =$$

(b) Regola di Newton

Se ora volessimo calcolare:

$$(a+b)^8 =$$

potremmo sempre calcolarlo in ordine, facendo tutte le potenze precedenti; ma pensa che noia, se dovessi calcolare ad esempio:

$$(a+b)^{20} =$$

ci vorrebbero ore!

Un grande Matematico Newton ha trovato il modo per calcolare la potenza senza calcolare tutte le potenze precedenti: il metodo e' un po' laborioso ma, visto il tempo che ci fa risparmiare, ne vale certo la pena.

Vediamolo assieme, passaggio per passaggio, sei pronto?

Proviamo a calcolare:

$$(a+b)^8 =$$

Prima di tutto osserviamo che il primo termine del risultato sara':

$$1a^8$$

Per il secondo termine consideriamo il primo termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del primo termine:

$$1$$

e l'esponente della potenza di a nel primo termine:

$$8$$

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato; essendo il primo termine, devo dividere per 1 il risultato e':

$$(1 \cdot 8) / 1 = 8$$

allora il secondo termine sara':

$$8a^7b$$

Proseguendo faccio sempre lo stesso: per il terzo termine consideriamo il secondo termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del secondo termine:

$$8$$

e l'esponente della potenza di a nel secondo termine:

7

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato; essendo il secondo termine, devo dividere per 2 il risultato e':

$$(8 \cdot 7)/2 = 28$$

allora il terzo termine sarà:

$$28a^6b^2$$

Per il quarto termine consideriamo il terzo termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del terzo termine:

28

e l'esponente della potenza di **a** nel terzo termine:

6

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato essendo il terzo termine devo dividere per:

3

il risultato e' :

$$(28 \cdot 6)/3 = 56$$

allora il quarto termine sarà :

$$56a^5b^3$$

Per il quinto termine consideriamo il quarto termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del quarto termine:

56

e l'esponente della potenza di **a** nel quarto termine:

5

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato essendo il quarto termine devo dividere per :

4

il risultato e':

$$(56 \cdot 5)/4 = 70$$

allora il quinto termine sarà:

$$70a^4b^4$$

Per il sesto termine consideriamo il quinto termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del quinto termine:

70

e l'esponente della potenza di **a** nel quinto termine:

4

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato essendo il quinto termine devo dividere per:

5

il risultato e':

$$(70 \cdot 4)/5 = 56$$

allora il sesto termine sarà:

$$56a^3b^5$$

Per il settimo termine consideriamo il sesto termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del sesto termine:

56

e l'esponente della potenza di **a** nel sesto termine:

3

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato essendo il sesto termine devo dividere per:

6

il risultato e':

$$(56 \cdot 3)/6 = 28$$

allora il settimo termine sara':

$$28a^2b^6$$

Per l'ottavo termine consideriamo il settimo termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del settimo termine:

28

e l'esponente della potenza di a nel settimo termine:

2

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato essendo il settimo termine devo dividere per:

7

Il risultato e':

$$(28 \cdot 2)/7 = 8$$

allora l'ottavo termine sara':

$$8a^1b^7$$

Per il nono termine consideriamo l'ottavo termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del settimo termine :

8

e l'esponente della potenza di a nell'ottavo termine:

1

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato essendo l'ottavo termine devo dividere per:

8

il risultato e':

$$(8 \cdot 1)/8 = 1$$

Allora il nono termine sara' :

$$1a^0b^8 = b^8$$

e non posso piu' proseguire.

Difficile? forse no, ma complicato si' ed anche molto, consoliamoci pensando che per calcolare:

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

Avrei dovuto fare:

$$(a+b)^7 =$$

$$(a+b)^6 =$$

$$(a+b)^5 =$$

eccetera eccetera

5. Quoziente (divisione nei polinomi)

Studieremo:

- Divisione fra un polinomio ed un monomio
- Divisione fra 2 polinomi

a) Divisione fra un polinomio ed un monomio

Per eseguire la divisione fra un polinomio ed un monomio basta ricordare il significato delle parentesi: "tutti i termini dentro parentesi hanno gli stessi diritti, quindi tutti devono essere divisi per il monomio fuori":

$$(-18a^5b + 12a^4b^2 - 15a^3b^3) : (-3a^3b) =$$

Quindi dovrò fare:

$$-18a^5b : (-3a^3b) = +6a^2$$

$$+12a^4b^2 : (-3a^3b) = -4ab$$

$$-15a^3b^3 : (-3a^3b) = +5b^2$$

Raccogliendo:

$$= 6a^2 - 4ab + 5b^2$$

Se vuoi vedere i calcoli nei particolari, leggi quanto segue:

Devo eseguire:

$$(-18a^5b + 12a^4b^2 - 15a^3b^3) : (-3a^3b) =$$

$$-18a^5b : (-3a^3b) =$$

devo fare segno con segno:

$$- : - = +$$

poi numero con numero:

$$18 : 3 = 6$$

quindi lettere con lettere:

$$a^5 : a^3 = a^2$$

$$b : b = b^0 = 1 \text{ (questo non lo scrivo)}$$

raccogliendo:

$$= +6a^2$$

$$+12a^4b^2 : (-3a^3b) =$$

devo fare segno con segno:

$$+ : - = -$$

poi numero con numero:

$$12 : 3 = 4$$

quindi lettere con lettere:

$$a^4 : a^3 = a$$

$$b^2 : b = b$$

raccogliendo:

$$= -4ab$$

$$-15a^3b^3 : (-3a^3b) =$$

Devo fare segno con segno:

$$- : - = +$$

poi numero con numero:

$$15 : 3 = 5$$

quindi lettere con lettere:

$$a^3 : a^3 = a^0 = 1 \text{ (questo non lo scrivo)}$$

$$b^3 : b = b^2$$

raccogliendo:

$$= +5b^2$$

Raccogliendo il tutto:

$$= 6a^2 - 4ab + 5b^2$$

b) Divisione fra due polinomi

Per la divisione fra due polinomi possono essere usati due metodi diversi: uno più veloce (il metodo di Ruffini, ma può essere usato solo in alcuni casi) ed uno più complicato (il metodo canonico che può essere usato per tutti i polinomi ordinati).

Inoltre ho messo qui un teorema che ti permette di trovare il resto senza fare la divisione .
Scegli il metodo che vuoi studiare:

- Metodo Canonico
- Metodo di Ruffini
- Teorema di Ruffini

(1) Metodo canonico

In matematica, per poter procedere quando abbiamo un nuovo argomento, possiamo usare due metodi diversi:

Il primo consiste nel rifarsi a qualcosa di già fatto simile a ciò che si vuol fare .

Il secondo nell'usare il buon senso ed usare le regole più "logiche" .

Non è troppo chiaro? Forse questo aneddoto potrà farti capire meglio .

Era l'anno 1966 e io ed il mio compagno prima di classe poi di università Riccardo frequentavamo il corso di Geometria tenuto dal Prof. Villa, un professore vecchio tipo grande matematico.

Riccardo non era proprio quello che si può definire uno studente modello e non era troppo preparato, ma per ragioni di borsa di studio doveva sostenere un esame.

All'esame Riccardo, piuttosto abbacchiato, capì proprio a dare l'esame da Villa.

Prima domanda: scena muta, seconda domanda: scena muta, alla fine Villa si arrabbiò e disse a Riccardo:

"Ma insomma! Lei non saprebbe nemmeno cuocere due uova al tegamino!". "Certo che so farlo!" rispose Riccardo.

"Allora" fece Villa "me lo spieghi"

"Prendo il tegamino dal credenzino, accendo il gas, metto il tegamino sul gas, vi metto un cucchiaino d'olio e quando è caldo vi sguscio le uova e le tengo sul fuoco finché non sono cotte"

"Bene," fece Villa "adesso supponiamo che il tegamino sia già sul gas, mi spieghi come farebbe!"

"Prendo il tegamino, apro il credenzino, vi metto dentro il tegamino poi procedo come prima!"

*Villa diede a Riccardo 18 in quell'esame! Infatti Riccardo aveva dimostrato di conoscere una delle principali regole della matematica: **Se possibile fai riferimento a qualcosa che hai già fatto***

Ora noi sappiamo già fare la divisione fra numeri naturali, quindi per fare la divisione fra polinomi ci rifaremo a quella che sappiamo già fare:

Ad esempio se devo fare $256 : 12$ come procedo?

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 5 & 6 & 1 & 2 \\
 2 & 4 & & 2 & 1 \\
 \hline
 // & 1 & 6 & & \\
 & 1 & 2 & & \\
 \hline
 // & & 4 & &
 \end{array}$$

Il 12 nel 25 ci sta 2 volte, scrivo il 2 nel risultato; poi faccio $2 \text{ per } 12 = 24$ e lo riporto sotto il 25.

Sottraggo 24 da 25 e scrivo 1, riporto il 6 e ricomincio da capo.

Il 12 nel 16 ci sta 1 volta, scrivo 1 nel risultato poi moltiplico 1 per $12 = 12$ e lo riporto sotto il 16.

Sottraggo 12 da 16 e scrivo 4. Poiché non posso riportare più termini questo è il resto.

Quindi posso scrivere:

$256 : 12$ da 21 con resto di 4

o meglio, in forma di uguaglianza:

$$256 = 12 \cdot 21 + 4$$

Nei polinomi faremo nello stesso modo: proviamo ad esempio ad eseguire la seguente divisione:

$$(2x^2 + 5x + 6) : (x + 2)$$

Procediamo come per la divisione normale:

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 -2x^2 & -4x & \\
 \hline
 // & +x & +6 \\
 & -x & -2 \\
 \hline
 // & +4 &
 \end{array}$$

Intanto il divisore e' di due termini $x+2$, quindi anche nel dividendo consideriamo i primi due termini $2x^2+5x$; poi invece di fare il 12 sta nel 25, facciamo il primo termine sta nel primo termine cioe' $2x^2 : x = 2x$ e scriviamo il risultato. Ora moltiplichiamo il risultato per

il divisore e, siccome quello che viene dovremo sottrarlo, ma nei polinomi si fa la somma algebrica, quindi per non fare la sottrazione cambiamo ogni termine di segno: $2x \cdot x = 2x^2$ lo cambio di segno $-2x^2$ e lo scrivo sotto il primo poi faccio $2x \cdot 2 = 4x$ lo cambio di segno $-4x$ e lo scrivo sotto il secondo.

Ora faccio la somma algebrica e scrivo il risultato: il primo termine deve sempre andare via mentre nel secondo termine avro' $5x-4x = x$.

Vicino alla x sposto un'altra cifra della divisione, in questo caso il 6 e ricomincio come prima.

Divido il primo termine per il primo termine cioe' $x:x=1$ e lo scrivo nel risultato, poi moltiplico il valore che ho ottenuto per il divisore e cambio di segno: $1 \cdot x = x$ cambio di segno $-x$ e lo scrivo sotto il primo poi calcolo $1 \cdot 2 = 2$ cambio di segno -2 e lo scrivo sotto il secondo; poi faccio la somma algebrica.

Il primo va via ed il secondo viene 4 , questo e' il resto. Raccogliendo: $(2x^2+5x+6):(x+2)$ da' come quoziente $2x+1$ e come resto 4 o meglio puoi scrivere

$$(2x^2+5x+6) = (x+2) \cdot (2x+1) + 4$$

Piuttosto complicato vero? Se vuoi, puoi seguire i calcoli uno ad uno. Leggi di seguito:

$$(2x^2+5x+6):(x+2) =$$

Impostiamo la divisione; scrivo il polinomio ed il divisore:

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 & &
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 x & +2 &
 \end{array}$$

Essendo il divisore $x+2$ composto da due termini, considero nel polinomio i primi due termini $2x^2 + 5x$

Faccio il primo termine del polinomio diviso il primo termine del divisore:

$$2x^2 : x = 2x$$

Scrivo $2x$ nello spazio del quoziente:

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 & &
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 x & +2 & \\
 2x & &
 \end{array}$$

Ora moltiplico $2x$ per il divisore cominciando dal primo termine (puoi anche cominciare dal secondo, e' lo stesso):

$$2x \cdot x = 2x^2$$

Scrivo questo risultato (pero' cambiandolo di segno) sotto il primo termine (se iniziavi dal secondo dovevi scriverlo sotto il secondo):

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 -2x^2 & &
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 x & +2 & \\
 2x & &
 \end{array}$$

Continuo a moltiplicare $2x$ per il secondo termine del divisore:

$$2x \cdot 2 = 4x$$

Scrivo questo risultato cambiandolo di segno sotto il secondo termine:

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 -2x^2 & -4x &
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 x & +2 & \\
 2x & &
 \end{array}$$

Ora sommo i termini verticalmente: il primo si deve sempre annullare:

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 -2x^2 & -4x & \\
 \hline
 // & +x &
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 x & +2 & \\
 2x & &
 \end{array}$$

Abbasso l'altro termine $+6$:

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 -2x^2 & -4x & \\
 \hline
 // & +x & +6
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 x & +2 \\
 2x & \\
 \hline
 \end{array}$$

Ricomincio da capo: considero nel polinomio i due termini abbassati $+x + 6$.

Faccio il primo termine diviso il primo termine del divisore:

$$+x : x = +1$$

Scrivo $+1$ nello spazio successivo del quoziente:

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 -2x^2 & -4x & \\
 \hline
 // & +x & +6
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 x & +2 \\
 2x & +1 \\
 \hline
 \end{array}$$

Ora multiplico $+1$ per il divisore cominciando dal primo termine:

$$+1 \cdot x = +x$$

Scrivo questo risultato (pero' cambiandolo di segno) sotto il primo termine:

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 -2x^2 & -4x & \\
 \hline
 // & +x & +6 \\
 & -x &
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 x & +2 \\
 2x & +1 \\
 \hline
 \end{array}$$

Continuo a moltiplicare $+1$ per il secondo termine del divisore:

$$+1 \cdot 2 = +2$$

Scrivo questo risultato (pero' cambiandolo di segno) sotto il secondo termine:

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 -2x^2 & -4x & \\
 \hline
 // & +x & +6 \\
 & -x & -2
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 x & +2 \\
 2x & +1 \\
 \hline
 \end{array}$$

Sommo in verticale ed ho finito:

$$\begin{array}{r|rr}
 2x^2 & +5x & +6 \\
 -2x^2 & -4x & \\
 \hline
 // & +x & +6 \\
 & -x & -2 \\
 \hline
 // & +4 &
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 x & +2 \\
 2x & +1 \\
 \hline
 \end{array}$$

Prova adesso a fare le seguenti divisioni :

$$(6x^2 - 5x + 4) : (2x + 3) =$$

impostiamo la divisione: scrivo il polinomio ed il divisore:

$$\begin{array}{r|rr}
 6x^2 & -5x & +4 \\
 2x & +3 \\
 \hline
 \end{array}$$

Essendo il divisore $2x+3$ composto da due termini, considero nel polinomio i primi due termini $6x^2 - 5x$.

Faccio il primo termine del polinomio diviso il primo termine del divisore:

$$6x^2 : 2x = 3x$$

Scrivo $3x$ nello spazio del quoziente:

$$\begin{array}{r|rr}
 6x^2 & -5x & +4 \\
 2x & +3 \\
 \hline
 3x &
 \end{array}$$

Ora multiplico $3x$ per il divisore cominciando dal primo termine (puoi anche cominciare dal secondo, e' lo stesso):

$$3x \cdot 2x = 6x^2$$

Scrivo questo risultato (pero' cambiandolo di segno) sotto il primo termine (se iniziavi dal secondo dovevi scriverlo sotto il secondo):

$$\begin{array}{r|rr} 6x^2 & -5x & +4 \\ -6x^2 & & \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} 2x & +3 \\ 3x & & \end{array}$$

Continuo a moltiplicare $3x$ per il secondo termine del divisore:

$$3x \cdot 3 = 9x$$

Scrivo questo risultato (pero' cambiandolo di segno) sotto il secondo termine:

$$\begin{array}{r|rr} 6x^2 & -5x & +4 \\ -6x^2 & -9x & \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} 2x & +3 \\ 3x & & \end{array}$$

Ora sommo i termini verticalmente: il primo si deve sempre annullare:

$$\begin{array}{r|rr} 6x^2 & -5x & +4 \\ -6x^2 & -9x & \\ \hline // & -14x & \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} 2x & +3 \\ 3x & & \end{array}$$

Abbasso l'altro termine $+4$:

$$\begin{array}{r|rr} 6x^2 & -5x & +4 \\ -6x^2 & -9x & \\ \hline // & -14x & +4 \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} 2x & +3 \\ 3x & & \end{array}$$

Ricomincio da capo: considero nel polinomio i due termini abbassati: $-14x + 4$

Faccio il primo termine diviso il primo termine del divisore: $-14x : 2x = -7$

Scrivo -7 nello spazio successivo del quoziente:

$$\begin{array}{r|rr} 6x^2 & -5x & +4 \\ -6x^2 & -9x & \\ \hline // & -14x & +4 \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} 2x & +3 \\ 3x & -7 & \end{array}$$

Ora moltiplico -7 per il divisore cominciando dal primo termine: $-7 \cdot 2x = -14x$ e scrivo questo risultato (pero' cambiandolo di segno) sotto il primo termine:

$$\begin{array}{r|rr} 6x^2 & -5x & +4 \\ -6x^2 & -9x & \\ \hline // & -14x & +4 \\ & +14x & \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} 2x & +3 \\ 3x & -7 & \end{array}$$

Continuo a moltiplicare -7 per il secondo termine del divisore: $-7 \cdot 3 = -21$

Scrivo questo risultato (pero' cambiandolo di segno) sotto il secondo termine:

$$\begin{array}{r|rr} 6x^2 & -5x & +4 \\ -6x^2 & -9x & \\ \hline // & -14x & +4 \\ & +14x & +21 \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} 2x & +3 \\ 3x & -7 & \end{array}$$

Sommo in verticale ed ottengo:

$$\begin{array}{r|rr} 6x^2 & -5x & +4 \\ -6x^2 & -9x & \\ \hline // & -14x & +4 \\ & +14x & +21 \\ \hline // & & +25 \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} 2x & +3 \\ 3x & -7 & \end{array}$$

Quindi:

$$(6x^2 - 5x + 4) : (2x + 3) \text{ da' } (3x - 7) \text{ con Resto} = 25$$

o puoi scrivere (forma migliore) :

$$(6x^2 - 5x + 4) = (2x + 3) \cdot (3x - 7) + 25$$

Il quoziente vale $3x - 7$; il resto vale 25

Puoi controllare se hai fatto giusto facendone la prova con la regola:

Divisore · Quoziente + Resto = polinomio di partenza; quindi fai:

$$(2x + 3)(3x - 7) + 25 =$$

e, se hai fatto giusto e non fai nessun errore, troverai come risultato:

$$6x^2 - 5x + 4$$

$$- (4x^3 - 7x^2 - 4x + 2) : (x - 3) =$$

Impostiamo la divisione:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 4x^3 & -7x^2 & -4x & +2 & x & -3 \\
 -4x^3 & +12x^2 & & & 4x^2 & +5x & +11 \\
 \hline
 // & +5x^2 & -4x & & & & \\
 & -5x^2 & +15x & & & & \\
 \hline
 & // & +11x & +2 & & & \\
 & & -11x & +33 & & & \\
 & & // & +35 & & &
 \end{array}$$

Il quoziente vale $4x^2 + 5x + 11$; il resto vale 35

Quindi:

$$(4x^3 - 7x^2 - 4x + 2) : (x - 3) \text{ da' } (4x^2 + 5x + 11) \text{ con Resto} = 35$$

o puoi scrivere (forma migliore):

$$(4x^3 - 7x^2 - 4x + 2) = (4x^2 + 5x + 11) \cdot (x - 3) + 35$$

usando la regola:

$$\text{Polinomio di partenza} = \text{Divisore} \cdot \text{Quoziente} + \text{Resto}$$

Puoi controllare se hai fatto giusto facendone la prova con la stessa regola:

$$\text{Divisore} \cdot \text{Quoziente} + \text{Resto} = \text{Polinomio di partenza}$$

quindi fai:

$$(4x^2 + 5x + 11)(x - 3) + 35 =$$

e, se hai fatto giusto e non fai nessun errore di calcolo, troverai come risultato:

$$4x^3 - 7x^2 - 4x + 2$$

$$- (2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6) : (a^2 + 3a - 2) =$$

Impostiamo la divisione:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2a^4 & +2a^3 & -13a^2 & +17a & -6 & a^2 & +3a & -2 \\
 \hline
 & & & & & & &
 \end{array}$$

Essendo il divisore $a^2 + 3a - 2$ composto da tre termini, considero nel polinomio i primi tre termini:

$$2a^4 + 2a^3 - 13a^2$$

Faccio il primo termine del polinomio diviso il primo termine del divisore:

$$2a^4 : a^2 = 2a^2$$

scrivo $2a^2$ nello spazio del quoziente:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2a^4 & +2a^3 & -13a^2 & +17a & -6 & a^2 & +3a & -2 \\
 \hline
 & & & & & 2a^2 & &
 \end{array}$$

Ora moltiplico $2a^2$ per il divisore:

$$2a^2 \cdot (a^2 + 3a - 2) = 2a^4 + 6a^3 - 4a^2$$

Scrivo questo risultato cambiandolo di segno sotto i primi tre termini (in colonna devono sempre esservi lettere alla stessa potenza, cioè a^3 sotto a^3):

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2a^4 & +2a^3 & -13a^2 & +17a & -6 & a^2 & +3a & -2 \\
 \hline
 -2a^4 & -6a^3 & +4a^2 & & & 2a^2 & &
 \end{array}$$

Ora sommo i termini verticalmente: il primo si deve sempre annullare:

$$\begin{array}{r}
 2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6 \quad | \quad a^2 + 3a - 2 \\
 \underline{-2a^4 - 6a^3 + 4a^2} \\
 // \quad -4a^3 - 9a^2
 \end{array}$$

Abbasso un altro termine $+17a$ in modo da considerare sempre tre termini:

$$\begin{array}{r}
 2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6 \quad | \quad a^2 + 3a - 2 \\
 \underline{-2a^4 - 6a^3 + 4a^2} \\
 // \quad -4a^3 - 9a^2 + 17a
 \end{array}$$

Ricomincio da capo:

considero nel polinomio i tre termini abbassati $-4a^3 - 9a^2 + 17a$

Faccio il primo termine diviso il primo termine del divisore:

$$-4a^3 : a^2 = -4a$$

Scrivo $-4a$ nello spazio successivo del quoziente:

$$\begin{array}{r}
 2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6 \quad | \quad a^2 + 3a - 2 \\
 \underline{-2a^4 - 6a^3 + 4a^2} \\
 // \quad -4a^3 - 9a^2 + 17a \quad -4a
 \end{array}$$

Moltiplico $-4a$ per il divisore:

$$-4a \cdot (a^2 + 3a - 2) = -4a^3 - 12a^2 + 8a$$

Scrivo questo risultato (però cambiando i segni) sotto i tre termini considerati (in colonna deve sempre esservi la stessa potenza):

$$\begin{array}{r}
 2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6 \quad | \quad a^2 + 3a - 2 \\
 \underline{-2a^4 - 6a^3 + 4a^2} \\
 // \quad -4a^3 - 9a^2 + 17a \\
 \quad \quad +4a^3 + 12a^2 - 8a
 \end{array}$$

Sommo in verticale ed ottengo:

$$\begin{array}{r}
 2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6 \quad | \quad a^2 + 3a - 2 \\
 \underline{-2a^4 - 6a^3 + 4a^2} \\
 // \quad -4a^3 - 9a^2 + 17a \\
 \quad \quad +4a^3 + 12a^2 - 8a \\
 \quad \quad // \quad +3a^2 + 9a
 \end{array}$$

Abbasso l'ultimo termine -6 :

$$\begin{array}{r}
 2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6 \quad | \quad a^2 + 3a - 2 \\
 \underline{-2a^4 - 6a^3 + 4a^2} \\
 // \quad -4a^3 - 9a^2 + 17a \\
 \quad \quad +4a^3 + 12a^2 - 8a \\
 \quad \quad // \quad +3a^2 + 9a - 6
 \end{array}$$

Considero nel polinomio i tre termini abbassati $3a^2 + 9a - 6$

Faccio il primo termine diviso il primo termine del divisore:

$$3a^2 : a^2 = +3$$

Scrivo $+3$ nello spazio successivo del quoziente:

$$\begin{array}{r}
 2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6 \quad | \quad a^2 + 3a - 2 \\
 \underline{-2a^4 - 6a^3 + 4a^2} \\
 // \quad -4a^3 - 9a^2 + 17a \\
 \quad \quad +4a^3 + 12a^2 - 8a \\
 \quad \quad // \quad +3a^2 + 9a - 6 \quad +3
 \end{array}$$

Moltiplico $+3$ per il divisore:

$$+3 \cdot (a^2 + 3a - 2) = +3a^2 + 9a - 6$$

Scrivo questo risultato (pero' cambiando i segni) sotto i tre termini considerati (in colonna deve sempre esservi la stessa potenza):

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrrr}
 2a^4 & +2a^3 & -13a^2 & +17a & -6 & \\
 -2a^4 & -6a^3 & +4a^2 & & & \\
 \hline
 // & -4a^3 & -9a^2 & +17a & & \\
 & +4a^3 & +12a^2 & -8a & & \\
 \hline
 & // & +3a^2 & +9a & -6 & \\
 & & -3a^2 & -9a & +6 & \\
 \hline
 & & // & // & // &
 \end{array}
 & \left| \begin{array}{rrr}
 a^2 & +3a & -2 \\
 2a^2 & -4a & +3
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Sommo in verticale ed ho finito l'operazione:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrrr}
 2a^4 & +2a^3 & -13a^2 & +17a & -6 & \\
 -2a^4 & -6a^3 & +4a^2 & & & \\
 \hline
 // & -4a^3 & -9a^2 & +17a & & \\
 & +4a^3 & +12a^2 & -8a & & \\
 \hline
 & // & +3a^2 & +9a & -6 & \\
 & & -3a^2 & -9a & +6 & \\
 \hline
 & & // & // & // &
 \end{array}
 & \left| \begin{array}{rrr}
 a^2 & +3a & -2 \\
 2a^2 & -4a & +3
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Siccome il resto e' nullo posso scrivere:

$$(2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6):(a^2 + 3a - 2) = 2a^2 - 4a + 3$$

Il quoziente vale $2a^2 - 4a + 3$; il resto vale 0

quindi posso scrivere:

$$(2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6):(a^2 + 3a - 2) = 2a^2 - 4a + 3$$

Puoi controllare se hai fatto giusto facendone la prova con la regola:

$$\text{Divisore} \cdot \text{Quoziente} = \text{Polinomio di partenza}$$

quindi fai:

$$(a^2 + 3a - 2) (2a^2 - 4a + 3) =$$

e, se hai fatto giusto e non fai nessun errore, troverai come risultato

$$= 2a^4 + 2a^3 - 13a^2 + 17a - 6$$

Naturalmente, avendo preso il metodo della divisione dai numeri ed essendo i numeri dei polinomi ordinati, potro' eseguire la divisione solamente fra due polinomi ordinati. E se non sono ordinati dovro' ordinarli. Se non e' possibile ordinarli, non e' possibile fare la divisione. Vediamo due esempi:

$$(x^5 - 32) : (x - 2) =$$

Prima di impostare la divisione dobbiamo rendere i polinomi ordinati;

Possiamo considerarlo come

$$(x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 32):(x-2)=$$

Ora impostiamo la divisione.

E' meno difficile di quello che sembra perche' quando devo fare la somma ed un termine vale zero posso fare subito il calcolo:

siccome lo zero non ha segno, nella divisione invece di $0x^n$ metto semplicemente $//$:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrrrrr}
 x^5 & // & // & // & // & -32 & & \\
 -x^5 & +2x^4 & & & & & & \\
 \hline
 // & +2x^4 & // & & & & & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & & & & & \\
 \hline
 & // & +4x^3 & // & & & & \\
 & & -4x^3 & +8x^2 & & & & \\
 \hline
 & & // & +8x^2 & // & & & \\
 & & & -8x^2 & +16x & & & \\
 \hline
 & & & // & +16x & -32 & & \\
 & & & & -16x & +32 & & \\
 \hline
 & & & & // & // & &
 \end{array}
 & \left| \begin{array}{rrrrr}
 x & -2 & & & \\
 x^4 & +2x^3 & +4x^2 & +8x & +16
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Quindi posso scrivere:

$$(x^5 - 32):(x-2) = (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$$

Puoi controllare se hai fatto giusto facendone la prova:

$$(x-2) \cdot (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) =$$

e, se hai fatto giusto e non fai nessun errore di calcolo, troverai come risultato il polinomio di partenza.

- $(x^6 - 64) : (x^2 - 4) =$

Prima di impostare la divisione dobbiamo rendere i polinomi ordinati;

Possiamo considerarlo come:

$$(x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 64) : (x^2 + 0x - 4) =$$

Ora impostiamo la divisione.

Ti ripeto che e' meno difficile di quello che sembra perche' quando devo fare la somma o il prodotto ed un termine vale zero posso fare subito il calcolo.

Anche qui, siccome lo zero non ha segno, nella divisione invece di $0x^n$ metto semplicemente //:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	$+4x^4$						x^4	$+4x^2$	$+16$
//	//	$+4x^4$	//	//						
		$-4x^4$	//	$+16x^2$						
		//	//	$+16x^2$	//	-64				
				$-16x^2$	//	$+64$				
			//	//	//					

Se vuoi vedere i calcoli passaggio per passaggio, eccoli:

Prima di impostare la divisione dobbiamo rendere i polinomi ordinati;

Possiamo considerarlo come:

$$(x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 64) : (x^2 + 0x - 4) =$$

Ora impostiamo la divisione:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4

Essendo il divisore composto da tre spazi consideriamo tre spazi; facciamo il primo termine diviso il primo termine $x^6 : x^2 = x^4$; scrivo x^4 al primo posto nel divisore:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
								x^4		

Ora multiplico x^4 per il divisore $x^2 - 4$ ed ottengo $x^6 - 4x^4$

Naturalmente devo considerarlo ordinato cioe':

$$x^6 + 0x^5 - 4x^4$$

Ora lo scrivo nelle rispettive colonne cambiandolo di segno:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	$+4x^4$						x^4		

Sommo in verticale ed ottengo:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	$+4x^4$						x^4		
//	//	$+4x^2$								

Ora abbasso due posti perche' devo sempre considerarne tre (tanti quanti sono i posti del divisore):

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	$+4x^4$						x^4		
//	//	$+4x^2$	//	//						

$$4x^4 : x^2 = +4x^2$$

Scrivo $+4x^2$ al secondo posto del quoziente:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	+4x ⁴						x^4	+4x ²	
//	//	+4x ²	//	//						

Ora multiplico $+4x^2$ per il divisore:

$$+4x^2 \cdot (x^2 - 4) = +4x^4 - 16x^2$$

Ricordando che e' ordinato come $+4x^4 + 0x^3 - 16x^2$ lo scrivo nella divisione, naturalmente cambiandolo di segno:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	+4x ⁴						x^4	+4x ²	
//	//	+4x ²	//	//						
		-4x ⁴	//	+16x ²						

Sommo in verticale ed ottengo:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	+4x ⁴						x^4	+4x ²	
//	//	+4x ²	//	//						
		-4x ⁴	//	+16x ²						
		//	//	+16x ²						

Abbasso altre due colonne:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	+4x ⁴						x^4	+4x ²	
//	//	+4x ²	//	//						
		-4x ⁴	//	+16x ²						
		//	//	+16x ²	//	-64				

Ricomincio da capo: primo termine diviso primo termine $+16x^2 : x^2 = +16$

Scrivo 16 di seguito nel quoziente:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	+4x ⁴						x^4	+4x ²	+16
//	//	+4x ²	//	//						
		-4x ⁴	//	+16x ²						
		//	//	+16x ²	//	-64				

Ora multiplico 16 per il divisore:

$$16 \cdot (x^2 - 4) = 16x^2 - 64$$

Ricordando che e' ordinato come $16x^2 + 0x - 64$, lo scrivo nella divisione, naturalmente cambiandolo di segno:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	+4x ⁴						x^4	+4x ²	+16
//	//	+4x ²	//	//						
		-4x ⁴	//	+16x ²						
		//	//	+16x ²	//	-64				
				-16x ²	//	+64				

Sommo in verticale ed ottengo:

x^6	//	//	//	//	//	//	-64	x^2	//	-4
$-x^6$	//	+4x ⁴						x^4	+4x ²	+16
//	//	+4x ²	//	//						
		-4x ⁴	//	+16x ²						
		//	//	+16x ²	//	-64				
				-16x ²	//	+64				

// // //

Quindi posso scrivere

$$(x^6 - 64):(x^2 - 24) = (x^4 + 4x^2 + 16)$$

Per esercizio fai la prova

(2) Metodo di Ruffini (divisione fra polinomi)

In Matematica occorre sempre cercare di fare prima e meglio, cioè la matematica è la scienza del massimo rendimento con il minimo sforzo.

Ruffini, osservando la divisione fra un polinomio ed un binomio si accorse che parecchie cose erano superflue, quindi elaborò una divisione più semplice. Purtroppo si può applicare solo quando dividiamo un polinomio per un binomio di primo grado, però vedrai che dovrai usarla moltissimo.

Osservando la divisione fra polinomi già vista nella pagina precedente puoi notare che si incolonnano tutti i termini simili, (con le stesse lettere alla stessa potenza) quindi non c'è bisogno di scrivere le lettere, basterà

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & & 2 & 1 \\ \hline // & 1 & 6 & & \\ & 1 & 2 & & \\ \hline // & & 4 & & \end{array}$$

	2	5	6

scrivere i numeri e le lettere saranno sottintese, inoltre poiché divido per un binomio il risultato avrà **un termine meno del polinomio di partenza**, quindi l'ultimo termine del polinomio lo scrivo fuori delle sbarre.

	2	5	6
-2			

Consideriamo poi che quello che conta nella divisione è il secondo termine del divisore (**perché il primo ri-moltiplicato viene uguale e di segno contrario, quindi va via**) e siccome quando moltiplico dovrei cambiare di segno, invece di cambiare di segno il risultato cambio lui di segno e lo scrivo a sinistra.

Adesso inizio la divisione: abbasso il primo termine

	2	5	6
-2			
	2		

poi lo moltiplico per il numero a sinistra e scrivo il risultato sotto il secondo termine (ma sopra la sbarra orizzontale)

	2	5	6
-2			
	2	-4	

ora faccio la somma algebrica dei termini nella seconda colonna e scrivo il risultato sotto la sbarra.

	2	5	6
-2			
	2	1	

Ora ripeto: moltiplico il divisore per il numero ottenuto e scrivo il risultato nella terza colonna sopra la sbarra

	2	5	6
-2			
	2	1	-2

Infine sommo in colonna e la divisione e' terminata. Il termine 4 fuori delle sbarre sara' il resto mentre per ottenere il risultato devo rimettere le lettere ai termini: 1 sara' il termine noto mentre a 2 dovro' mettere x quindi risultato: $2x+1$ con resto=4.

	2	5	6
-2		-4	-2
	2	1	4
	x	Termini noti	Resto

Se osservi le due figure successive e guardi i riquadri blu ti puoi rendere conto che la divisione e' la stessa fatta prima:

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 5x + 6 \quad | \quad x + 2 \\
 -2x^2 - 4x \\
 \hline
 x + 6 \\
 -x - 2 \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

	2	5	6
-2		-4	-2
	2	1	4

Ho bisogno di altre spiegazioni (altro esercizio):

Devo dividere:

$$2x^3 + x^2 + x - 1 \quad \text{per} \quad (x-1/2)$$

Nello schema metto nella prima riga i coefficienti mettendo il coefficiente di x^3 dopo la barra verticale ed il termine noto dopo la seconda barra e davanti metto il termine noto del divisore ($-1/2$) cambiato di segno ($+1/2$):

	2	1	1	-1
1/2				

ora abbasso il primo termine 2:

	2	1	1	-1
1/2				
	2			

Moltiplico il numero davanti $1/2$ (chiamiamolo divisore) per il termine abbassato 2 e scrivo il risultato ($1/2 \cdot 2 = 1$) sotto il secondo termine:

	2	1	1	-1
1/2		1		
	2			

Eseguo la somma in verticale $1 + 1 = 2$ e la scrivo in basso:

	2	1	1	-1
1/2		1		
	2	2		

Ora moltiplico il divisore $1/2$ per 2 e scrivo il risultato 1 sotto il terzo termine:

	2	1	1	-1
1/2		1	1	
	2	2	2	

Esegui la somma algebrica in verticale $1 + 1 = 2$ e la scrivo in basso:

	2	1	1	-1
1/2		1	1	
	2	2	2	

Moltiplico il divisore $1/2$ per il 2 e scrivo il risultato 1 sotto l'ultimo termine:

	2	1	1	-1
1/2		1	1	1
	2	2	2	

Ora sommo in verticale ed ho finito (devo sempre ottenere zero altrimenti ho sbagliato):

	2	1	1	-1
1/2		1	1	1
	2	2	2	0

Ecco un altro esercizio:

$$(2x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1/2) = (2x^2 + 2x + 2)$$

(3) Teorema del resto di Ruffini

Quando e' possibile eseguire la divisione con il metodo di Ruffini e' anche possibile riuscire a trovare il resto senza fare la divisione.

Vediamo prima perche' si puo' fare cosi' poi, come conseguenza, vedremo il come.

Consideriamo ad esempio il numero 25, esso diviso per 6 da' per quoziente 4 e resto 1

Come scriverlo?

$$25 = 6 \times 4 + 1$$

Cioe' il numero e' uguale al divisore per il quoziente piu' il resto.

Essendo i polinomi un ampliamento dei numeri anche per essi potro' scrivere:

$$\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISORE} \times \text{QUOZIENTE} + \text{RESTO}$$

Allora poniamo:

$$\text{POLINOMIO} = P(x)$$

$$\text{DIVISORE (di Ruffini)} = (x - a)$$

$$\text{QUOZIENTE} = Q(x)$$

$$\text{RESTO} = R$$

Avremo:

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R$$

Ora il nostro problema e' trovare il resto cioe' lasciare la R da sola dopo l'uguale e questo si puo' fare se si elimina il termine $(x-a) \cdot Q(x)$

Per eliminare questo termine basta mettere a al posto di x il valore a , cosi' $(a-a)$ vale zero e

$$Q(x) \cdot (a-a) = Q(x) \cdot (0) = 0$$

Quindi resta:

$$P(a) = (a-a) \cdot Q(a) + R \text{ cioe'}$$

$$P(a) = R$$

Regola: Per ottenere il resto basta sostituire nel polinomio al posto della lettera il termine noto del divisore cambiato di segno.

Ad esempio calcoliamo il resto di una divisione fatta nelle pagine precedenti:

$$(2x^2+5x+6):(x+2)$$

Bastera' sostituire (-2) al posto della x nel polinomio $2x^2+5x+6$:

$$2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 8 - 10 + 6 = 4$$

Quindi $R=4$ e' il valore del resto.

6. Scomposizione di un polinomio in fattori

A questo punto conosci le principali regole per la somma, differenza, prodotto e quoziente fra polinomi e, analogamente a quanto e' stato fatto nei numeri, ora bisogna parlare di frazioni cioe' dovremo fare le frazioni con i polinomi e quindi dovremo, analogamente ai numeri, scomporre un polinomio in fattori. Questa e' la parte piu' difficile di tutta la matematica e, se ti puo' consolare, una volta capito questo argomento, tutti gli altri argomenti che affronteremo saranno molto piu' semplici.

a) Perche' la scomposizione

Dopo aver fatte le operazioni con i numeri interi sei passato ad eseguire le operazioni con le frazioni e per poter fare il minimo comune multiplo e quindi la **somma** hai dovuto scomporre i numeri in fattori primi.

Anche i polinomi possono presentarsi come frazioni e quindi dobbiamo capire quali regole usare per eseguire le operazioni di somma, differenza, prodotto e quoziente se abbiamo frazioni di polinomi. Anche nei polinomi, come nei numeri, dovremo scomporre in **fattori**

(Attenzione pero':

nei numeri si parla di fattori primi mentre nei polinomi possiamo parlare solo di fattori senza specificare se sono primi oppure no) e siccome la scomposizione si puo' considerare l'operazione inversa della moltiplicazione dovremo, per trovare le regole, leggere a rovescio le moltiplicazioni gia' fatte:

Ricordati che una discesa vista dall'altra parte e' una salita

Nello stesso modo una moltiplicazione vista dall'altra parte e' una scomposizione

b) Raccoglimento a fattor comune

Possiamo dividerlo in due tipi:

(1) Raccoglimento a fattor comune totale

E' l'operazione contraria della moltiplicazione di un monomio per un polinomio: cioe' se ad esempio eseguiamo la seguente moltiplicazione:

$$3a(2a+5) \text{ otteniamo } 6a^2+15a$$

Il problema e' ora come **tornare indietro** (Ricordati che la moltiplicazione vista al rovescio e' una scomposizione, come una discesa vista dall'altra parte e' una salita): cioe' come da:

$$6a^2+15a \text{ si puo' passare a } 3a(2a+5)$$

In pratica dobbiamo trovare il monomio che e' contenuto in tutti i termini del polinomio e questo l'abbiamo gia' visto; si chiama

MASSIMO COMUN DIVISORE

Quindi dovro' procedere nel modo seguente:

Considero il polinomio:

$$6a^2 + 15a$$

Devo trovare cosa hanno in comune $6a^2$ e $15a$ cioè il loro M.C.D

Tra 6 e 15 il M.C.D. vale 3

Tra a^2 e a il M.C.D. vale a

Quindi il M.C.D. vale $3a$;

allora scrivo $6a^2 + 15a = 3a$

poi considero il primo termine:

$6a^2$ quante volte contiene $3a$ cioè quanto fa $6a^2$ diviso $3a$

il risultato è $2a$

Allora scrivo:

$$6a^2 + 15a = 3a (2a +$$

Considero ora il secondo termine:

$15a$ diviso $3a$ dà come risultato 5 :

quindi scriverò:

$$6a^2 + 15a = 3a (2a + 5)$$

Per finire verifico che eseguendo la moltiplicazione ritrovo il polinomio di partenza.

Facciamo un altro esempio:

$$6a^2b^4 - 9ab^3 + 3ab =$$

$$\text{M.C.D.} = 3ab$$

$$6a^2b^4 : 3ab = 2ab^3$$

$$-9ab^3 : 3ab = -3b^2$$

$$+3ab : 3ab = +1$$

$$\text{ottengo: } 6a^2b^4 - 9ab^3 + 3ab = 3ab (2ab^3 - 3b^2 + 1)$$

Attenzione!

Quando raccogli a fattor comune devi raccogliere TUTTO (cioè il M.C.D.) senza lasciare nulla di comune.

Ad esempio è sbagliato fare:

$$a^3 - a^2 = a (a^2 - a)$$

mentre si deve fare

$$a^3 - a^2 = a^2 (a - 1)$$

perché il M.C.D. è a^2

(2) Introduzione al raccoglimento a fattor comune parziale

Prima di procedere ad eseguire il raccoglimento parziale dobbiamo fare alcuni esercizi. Precisamente dobbiamo provare ad eseguire il raccoglimento totale nel caso che nel polinomio vi siano delle parentesi.

Scomponiamo il seguente binomio:

$$(2a + 3b)x + (2a + 3b)y =$$

Ho detto giusto! *Binomio*, infatti non vi fate trarre in inganno dalla lunghezza, i termini dentro parentesi valgono come un solo termine quindi questo *binomio* è composto dai due monomi $(2a + 3b)x$ e $(2a + 3b)y$ ed è come se fosse:

$$zx + zy =$$

quindi raccogliendo la z :

$$zx + zy = z(x + y)$$

allora:

$$(2^{\circ} + 3b)x + (2 + 3b)y = (2a+3b)(x+y)$$

cioe' raccolgo tutta la parentesi come se fosse un termine solo.

Vediamo un altro esempio:

$$2x(x+3)+y(x+3) =$$

la parte comune e' $(x+3)$ quindi:

$$2x(x+3)+y(x+3) = (x+3)(2x+y)$$

Esercizio:

Scomporre:

$$4x(x+y)+2x^2(x+y) =$$

stavolta la parte in comune e' $2x(x+y)$

quindi avremo:

$$4x(x+y)+2x^2(x+y) = 2x(x+y)(2+x)$$

Proviamo qualcosa di piu' complicato:

$$4x^2(x+y)^3(x-y) + 2x^2y(x+y)^2(x-y)^3 - 6x^4(x+y)^4(x-y)^4$$

la parte comune e':

$$2x^2(x+y)^2(x-y)$$

quindi avremo:

$$4x^2(x+y)^3(x-y) + 2x^2y(x+y)^2(x-y)^3 - 6x^4(x+y)^4(x-y)^4 = 2x^2(x+y)^2(x-y)[2(x+y)+y(x-y)^2 - 3x^2(x+y)^2(x-y)^3]$$

Facciamo ora il seguente esercizio:

$$ax+ay + b(x+y) =$$

Sono 3 termini, ma se raccogliamo fra loro i primi due otteniamo due parentesi uguali:

$$ax+ay + b(x+y) = a(x+y) + b(x+y) =$$

ed ora possiamo procedere come prima:

$$ax+ay + b(x+y) = a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y)$$

Quindi se c'e' una parentesi conviene vedere se raccogliendo fra i termini senza parentesi e' possibile avere un'altra parentesi uguale e poi raccogliere le parentesi stesse.

(3) Raccoglimento a fattor comune parziale

Il raccoglimento a fattor comune parziale si puo' eseguire solamente quando i termini del polinomio sono 4, 6, 8... Il ragionamento da fare e' il seguente:

consideriamo il polinomio:

$$ax + bx + ay + by$$

I suoi termini non hanno niente in comune fra tutti; ma, se li considero due a due, allora qualcosa in comune c'e'; precisamente i primi due hanno in comune x e gli ultimi due y ; allora tra i primi due raccolgo la x e tra gli ultimi due la y :

$$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$$

Noto che ho due termini con le parentesi uguali, quindi posso raccogliere tutta la parentesi:

$$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b) = (a+b)(x+y)$$

Allora:

Quando ho quattro termini provo a raccogliere a due a due: se dentro parentesi mi vengono termini uguali, allora continuo e raccolgo le parentesi; se non mi vengono uguali, provo un'altra scomposizione.

Naturalmente e' lo stesso se invece di quattro termini ne ho 6:

$$ax+bx+ay+by+az+bz = x(a+b) + y(a+b) + z(a+b) = (a+b)(x+y+z)$$

Importante: e' lo stesso quali termini raccolgo. Nel primo esercizio potevo raccogliere il primo con il terzo ed il secondo con il quarto:

$$ax + bx + ay + by = a(x+y) + b(x+y) = (x+y)(a+b)$$

Per semplicita' io consiglio ai miei alunni di raccogliere tra loro sempre un positivo con un negativo (naturalmente se i segni sono due positivi e due negativi) :

$$ax+ay-bx-by =$$

Raccogliamo ax con $-bx$ e ay con $-by$

$$ax+ay-bx-by = x(a-b)+y(a-b) = (a-b)(x+y)$$

Da ricordare che il segno che mettiamo in mezzo corrisponde sempre a quello del primo termine del secondo raccoglimento. Se fate cosi' non ci dovrebbero essere problemi ma se non lo fate potreste trovarvi con termini dentro parentesi uguali ma di segno contrario. Ricordate allora che quando le parentesi ci vengono uguali ma di segno contrario possiamo cambiare il segno dentro (per tutti i termini) e fuori parentesi: esempio

$$ax-ay-bx+by = a(x-y)+b(-x+y) =$$

siccome non ho raccolto il meno adesso devo cambiare di segno sia fuori che dentro parentesi

$$= a(x-y)-b(x-y) =$$

adesso posso raccogliere la parentesi $(x-y)$

$$= (a-b)(x-y)$$

Altra osservazione da fare e' che in una scomposizione di raccoglimento a fattor comune parziale, se abbiamo 4 termini, i segni devono sempre essere in numero pari, cioe' 2 positivi e due negativi, 4 positivi o 4 negativi e mai ad esempio un segno positivo e tre negativi.

c) Scomposizione di Ruffini

E' una scomposizione che si puo' sempre applicare a tutti i **polinomi ordinati scomponibili**, su cui non sia possibile operare il raccoglimento a fattor comune totale; ha pero' il difetto di essere lunga e complicata; quindi, quando possibile, cercheremo delle abbreviazioni. Pero' questa ti fornisce un metodo generale per operare sempre la scomposizione sui polinomi ordinati, se cio' non e' possibile diremo che il polinomio non e' scomponibile. Partiamo da un polinomio molto semplice, ad esempio consideriamo:

$$x^2+5x+6$$

Il problema che ci poniamo e' trovare due polinomi che moltiplicati mi diano come risultato il polinomio di partenza.

Si pensa che il polinomio abbia come fattore un fattore del tipo $(x-a)$ in cui a e' un numero. Quindi possibili fattori potranno essere:

$$(x-1)$$

$$(x+1)$$

$$(x-2)$$

$$(x+2)$$

$$(x-3)$$

$$(x+3)$$

.....

Si tratta di vedere se questi sono effettivamente fattori oppure no. Ricordando che un termine e' fattore di un secondo termine se il primo divide esattamente il secondo (cioe' il

resto della divisione vale 0); dovremo fare:

$(x^2+5x+6):(x-1)$ e calcolarne il resto; se viene 0 e' un fattore; altrimenti proveremo:

$(x^2+5x+6):(x+1)$ poi:

$(x^2+5x+6):(x-2)$ finche' non troviamo il resto 0

Ricordiamo che per trovare il resto possiamo applicare il [teorema di Ruffini](#) quindi troviamo i possibili resti.

Troviamo il resto dividendo (x^2+5x+6) per $(x-1)$

$(x-1); P(1) = 1^2+5(1)+6 = 1+5+6 = 12$ diverso da 0

Proviamo ora:

$(x+1); P(-1) = (-1)^2+5(-1)+6 = 1-5+6 = 2$ diverso da 0;

$(x-2); P(2) = 2^2+5(2)+6 = 4+10+6 = 20$ diverso da 0;

$(x+2); P(-2) = (-2)^2+5(-2)+6 = 4-10+6 = 0$; allora $(x+2)$ e' un fattore

Quindi potremo scrivere:

$(x^2+5x+6) = (x+2) \cdot (\text{qualcosa})$

Per trovare cos'e' quel qualcosa facciamo il seguente ragionamento:

4 e' un fattore di 20 ed io posso scrivere $20 = 4 \cdot (\text{qualcosa})$;

quanto vale quel qualcosa? 5; e come ho fatto ad ottenerlo? Evidentemente facendo $20:4$

Facciamo quindi nello stesso modo; per trovare l'altro fattore eseguiamo:

$(x^2+5x+6):(x+2) =$ e naturalmente utilizziamo la divisione di Ruffini:

	1	5	6
-2		-2	-6
	1	3	0

quindi $(x^2+5x+6) = (x+2)(x+3)$.

Proviamo un'altra scomposizione:

$x^3-x^2-5x-3 =$

Proviamo se il resto e' nullo quando dividiamo per $x-1$:

$(x-1); P(1) = (1)^3-(1)^2-5(1)-3 = 1-1-5-3 = -8$ diverso da zero.

Proviamo ora per $x+1$

$(x+1); P(-1) = (-1)^3-(-1)^2-5(-1)-3 = -1-1+5-3 = 0$; questo e' un divisore, quindi scrivo:

$x^3-x^2-5x-3 = (x+1) \cdot \text{qualcosa}$

Per trovare cosa devo mettere al posto di qualcosa faccio la divisione di Ruffini:

	1	-1	-5	-3
-1		-1	+2	+3
	1	-2	-3	0

quindi ottengo:

$x^3-x^2-5x-3 = (x+1) \cdot (x^2-2x-3)$

Non e' finita: devo ancora scomporre la parte fra parentesi (x^2-2x-3) perche' e' di grado superiore al primo.

Ricomincio con Ruffini ma non provo $x-1$ perche', se non andava bene per tutto il polinomio, non andra' bene nemmeno per una sua parte; quindi ricomincio dall'ultimo che mi ha dato il risultato giusto, perche' un fattore puo' essere ripetuto: esempio $12=2 \times 2 \times 3$

$(x+1): P(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$; questo e' un divisore, quindi scrivo:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1) \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot \text{qualcosa}$$

Rifaccio la divisione:

	1	-2	-3
-1		-1	+3
	1	-3	0

quindi:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1) \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-3)$$

Uno degli errori piu' comuni facendo la divisione e' scrivere:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1) \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x+1) \cdot (x-3)$$

Sarebbe come scrivere $12 = 2 \times 6 = 2 \times 3$; e' un errore perche' 2×3 non e' uguale a 12; cioe' facendo la moltiplicazione l'ultimo termine deve sempre tornare uguale al primo; quindi devo sempre ripetere tutti i fattori.

Avete visto che la divisione e' un'operazione piuttosto difficile da fare, allora cerchiamo qualche "trucco" per poter abbreviare qualcosa:

Trucco 1: Limitare il numero dei fattori!

Prima di tutto notiamo che nelle scomposizioni gia' fatte:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-3)$$

Il termine senza la lettera del polinomio di partenza e' il prodotto dei termini noti dei fattori, cioe':

$$\text{nel primo } 6 = 2 \cdot 3$$

$$\text{nel secondo } -3 = 1 \cdot 1 \cdot (-3);$$

ma allora se devo ad esempio scomporre $x^2 - 10x + 21$

21 sara' il prodotto dei termini noti dei binomi che mi scompongono il polinomio, quindi non dovro' provare tutti i fattori ma solamente:

$$P(1) \ P(-1) \ P(3) \ P(-3) \ P(7) \ P(-7) \ P(21) \ P(-21)$$

Sara' inutile provare ad esempio $P(2)$ perche' moltiplicando **2** per un intero non posso avere come risultato **21**.

Trucco 2: Mettere i segni giusti!

E' da applicare ai segni quando vado a calcolare $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$ ecc

Se vado a calcolare $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$..., i segni dei termini non cambieranno perche' il numero che sostituisco al posto della x e' positivo, quindi dove c'e' *piu'* resta *piu'* e dove c'e' *meno* resta *meno*.

Se invece vado a calcolare $P(-1)$, $P(-2)$, $P(-3)$, $P(-4)$..., resteranno uguali i segni dei termini a potenza *pai* mentre cambieranno i segni per le potenze *dispari*.

Ora bisogna trattare quelli che io chiamo i **casi patologici**!

(1) Casi particolari

I casi particolari che tratteremo sono:

(a) Polinomio non completo

Succede abbastanza spesso che il polinomio non sia completo, cioè che manchino dei termini.

Ad esempio proviamo a scomporre:

$$x^3 - 2x + 1$$

Provo:

$$(x-1); P(1) = (1)^3 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

quindi $(x-1)$ è un divisore, però posso fare la divisione di Ruffini solo se ci sono tutti i termini ed allora siccome mi manca x^2 al suo posto dovrò mettere uno zero cioè:

$$x^3 + 0x^2 - 2x + 1$$

ed ora procedo nel solito modo:

	1	0	-2	1
1		1	1	-1
	1	1	-1	0

Quindi:

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$$

Ora si dovrebbe scomporre $x^2 + x - 1$

provo

$$(x-1); P(1) = (1)^2 + (1) - 1 = 1 + 1 - 1 \neq 0$$

$$(x+1); P(-1) = (-1)^2 + (-1) - 1 = 1 - 1 - 1 \neq 0$$

e poiché i divisori del termine noto sono solamente $+1, -1$ il polinomio non è ulteriormente scomponibile:

risultato finale:

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$$

Per esercizio prova a scomporre

$$x^5 - 32 =$$

ricordando che per ordinare dovrai scrivere

$$x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 32 =$$

(b) Polinomio scomponibile mediante termini frazionari

Quando cerchiamo i possibili divisori può succedere che troviamo dei valori frazionari ad esempio proviamo a scomporre:

$$6x^2 - 5x + 1$$

Trovo i divisori di Ruffini:

i divisori del termine noto sono $+1, -1$

i divisori del primo coefficiente sono $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$.

I divisori possibili li ottengo facendo i divisori del termine noto diviso i divisori del primo coefficiente, quindi ottengo:

$$+1, -1, +1/2, -1/2, +1/3, -1/3, +1/6, -1/6$$

$$(x-1); P(1) = 6(1)^2 - 5(1) + 1 = 6 - 5 + 1 \neq 0$$

$$(x+1); P(-1) = 6(-1)^2 - 5(-1) + 1 = 6 + 5 + 1 \neq 0$$

$$(x-1/2); P(1/2) = 6(1/2)^2 - 5(1/2) + 1 = 6/4 - 5/2 + 1 =$$

$$= \frac{6-10+4}{4} = 0$$

Quindi $(x-1/2)$ e' un divisore,

	6	-5	1
1/2		3	-1
	6	-2	0

Quindi:

$$6x^2 - 5x + 1 = (x-1/2)(6x-2)$$

siccome 2 diviso 6 fa 1/3 potrei anche scrivere raccogliendo 6:

$$6x^2 - 5x + 1 = 6(x-1/2)(x-1/3)$$

o meglio ancora dividendo il 6 in $2 \cdot 3$ e moltiplicando il primo fattore per 2 ed il secondo per 3 in modo da non avere frazioni:

$$6x^2 - 5x + 1 = (2x-1)(3x-1)$$

Per esercizio prova a scomporre:

$$20x^3 - 4x^2 - 5x + 1 =$$

(c) Polinomio a coefficienti letterali

Quando i coefficienti sono dei termini letterali si procede sempre nello stesso modo, ma con molta attenzione.

Ad esempio proviamo a scomporre:

$$x^3 - 3b^2x^2 + b^4x + b^6$$

Trovo i divisori di Ruffini.

I divisori del termine noto sono:

$$+1, -1, +b, -b, +b^2, -b^2, +b^3, -b^3, +b^4, -b^4, +b^5, -b^5, +b^6, -b^6$$

Provo i divisori:

$$(x-1); P(1) = 1^3 - 3b^2(1)^2 + b^4(1) + b^6 = 1 - 3b^2 + b^4 + b^6 \neq 0$$

$$(x+1); P(-1) = (-1)^3 - 3b^2(-1)^2 + b^4(-1) + b^6 = -1 - 3b^2 - b^4 + b^6 \neq 0$$

$$(x-b); P(b) = b^3 - 3b^2(b)^2 + b^4(b) + b^6 = b^3 - 3b^4 + b^5 + b^6 \neq 0$$

$$(x+b); P(-b) = (-b)^3 - 3b^2(-b)^2 + b^4(-b) + b^6 = -b^3 - 3b^4 - b^5 + b^6 \neq 0$$

$$(x-b^2); P(b) = (b^2)^3 - 3b^2(b^2)^2 + b^4(b^2) + b^6 = b^6 - 3b^6 + b^6 + b^6 = 0$$

Quindi $(x - b^2)$ e' un divisore:

	1	-3b ²	b ⁴	b ⁶
b ²		b ²	2 b ⁴	-b ⁶
	1	-2 b ²	-b ⁴	0

Quindi:

$$x^3 - 3b^2x^2 + b^4x + b^6 = (x-b^2)(x^2 - 2b^2x - b^4)$$

Adesso devo vedere se posso scomporre:

$$x^2 - 2b^2x - b^4$$

i possibili divisori sono:

$$+1, -1, +b, -b, +b^2, -b^2, +b^3, -b^3, +b^4, -b^4$$

però $+1, -1, +b, -b$ li abbiamo già provati.

Quindi ripartiamo da b^2 :

$$(x-b^2); P(b^2) = (b^2)^2 - 2b^2(b^2) - b^4 = b^4 - 2b^4 - b^4 \neq 0$$

$$(x+b^2); P(-b^2) = (-b^2)^2 - 2b^2(-b^2) - b^4 = b^4 + 2b^4 - b^4 \neq 0$$

$$(x-b^3); P(b^3) = (b^3)^2 - 2b^2(b^3) - b^4 = b^6 - 2b^5 - b^4 \neq 0$$

$$(x+b^3); P(-b^3) = (-b^3)^2 - 2b^2(-b^3) - b^4 = b^6 + 2b^5 - b^4 \neq 0$$

$$(x-b^4); P(b^4) = (b^4)^2 - 2b^2(b^4) - b^4 = b^8 - 2b^6 - b^4 \neq 0$$

$$(x+b^4); P(-b^4) = (-b^4)^2 - 2b^2(-b^4) - b^4 = b^8 + 2b^6 - b^4 \neq 0$$

Quindi il polinomio non è più scomponibile e il risultato della scomposizione è :

$$x^3 - 3b^2x^2 + b^4x + b^6 = (x-b^2)(x^2 - 2b^2x - b^4)$$

Per esercizio prova a scomporre:

$$x^2 - (a+2b)x + 2ab =$$

notando che $-(a+2b)$ è un unico coefficiente.

(d) Scomposizione di Ruffini con binomi di grado superiore ad uno

La faremo quando i termini componenti hanno i gradi multipli secondo un numero intero: ad esempio 9,6,3,0 oppure 4,2,0 Vediamo su un esempio come procedere:

$$x^6 - 5x^3 + 6 =$$

Trovo i divisori di Ruffini.

I divisori del termine noto sono:

$$+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$$

Considero come lettera non x ma x^3 , quindi il mio polinomio posso considerarlo come:

$$(x^3)^2 - 5x^3 + 6 =$$

Se trovi difficoltà pensa di mettere al posto di x^3 una y , ottieni:

$$y^2 - 5y + 6 =$$

e procedi normalmente, alla fine, nel risultato al posto di y metterai x^3 .

Provo i divisori; sostituisco il numero al posto di x^3 , quindi attento a non fare confusione con gli esponenti:

$$(x^3-1); P(1) = 1^2 - 5(1) + 6 = 1 - 5 + 6 \neq 0$$

Quindi $(x^3 - 2)$ è un divisore:

	1	-5	6
2		2	-6
	1	-3	0

Adesso devi fare attenzione per ricostruire il quoziente: partendo dal termine noto hai termine noto, x^3 , x^6 , x^9 , ...

noi abbiamo solo due termini quindi termine noto ed x^3

$$x^6 - 5x^3 + 6 = (x^3 - 2)(x^3 - 3)$$

d) Scomposizioni secondo i prodotti notevoli

Poiche' Ruffini e' troppo complicato cominciamo a cercare delle scorciatoie per scomporre; ricordando che una moltiplicazione vista alla rovescia e' una scomposizione cominciamo con il vedere le scomposizioni inverse dei prodotti notevoli.

(1) Differenza di quadrati

Prendiamo il prodotto notevole somma di due monomi per la loro differenza:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Se lo scriviamo a rovescio otteniamo una scomposizione:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Cioe' se ho il segno meno fra i quadrati di due oggetti posso scomporre come il prodotto fra la somma dei due oggetti e la loro differenza.

Come esempio scomponiamo:

$$9x^2 - 4y^2 =$$

$9x^2$ e' il quadrato di $3x$

$4y^2$ e' il quadrato di $2y$

in mezzo c'e' il segno meno, quindi faccio il prodotto fra la somma e la differenza $(3x + 2y) \cdot (3x - 2y)$

In definitiva la scomposizione e':

$$9x^2 - 4y^2 = (3x+2y)(3x-2y)$$

Regola: La differenza fra i quadrati di due monomi si scompone moltiplicando la somma dei due monomi per la loro differenza.

(2) Scomposizione secondo il quadrato del binomio

Scriviamo la formula del quadrato del binomio:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Se la scriviamo a rovescio otterremo una scomposizione:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Significa che se ho un polinomio di **tre termini** devo guardare se due termini sono dei quadrati di monomi e, nel caso lo siano, se corrisponde il doppio prodotto dei due monomi, in tal caso posso scomporre come:

$$(\text{primo monomio} + \text{secondo monomio})^2$$

Ad esempio scomponiamo:

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 =$$

$4a^2$ e' il quadrato di $2a$

$9b^2$ e' il quadrato di $3b$

Se faccio il doppio prodotto dei due monomi:

$2 \cdot 2a \cdot 3b$ ottengo $12ab$ che mi corrisponde al termine che e' restato.

Quindi posso scrivere:

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$$

Fai attenzione al segno da mettere in mezzo: se il termine che corrisponde al doppio prodotto e' positivo in mezzo devi mettere il **+**, se invece e' negativo devi mettere il segno **-**.
Esempio $4x^2 - 16xy + 16y^2$

$4x^2$ e' il quadrato di $2x$

$16y^2$ e' il quadrato di $4y$

il doppio prodotto e'

$$2 \cdot 2x \cdot 4y = 16xy$$

Il segno in mezzo e' - perche' nel polinomio di partenza $-16xy$ ha il segno meno; quindi

$$4x^2 - 16xy + 16y^2 = (2x - 4y)^2$$

(3) Scomposizione secondo il cubo del binomio

E' la piu' complicata da calcolare

Scriviamo la formula per il cubo del binomio:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Se la leggiamo a rovescio otterremo una scomposizione:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

La prima cosa da osservare e' che si puo' fare quando abbiamo un polinomio di **4 termini**; osserviamo anche che ci devono essere due termini che siano dei cubi ed inoltre i segni devono essere in numero pari, cioe' quattro segni positivi oppure due positivi e due negativi, oppure quattro segni negativi.

Io consiglio i miei alunni di considerare i due termini di cui ci sono i cubi e provare ad eseguire con loro il cubo del binomio: se corrisponde al quadrinomio di partenza e' il cubo e posso scomporre come:

$$(\text{primo monomio} + \text{secondo monomio})^3$$

altrimenti, se non si prova un'altra scomposizione.

Esempio:

Proviamo a scomporre:

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 =$$

E' un polinomio di quattro termini e vi sono due cubi:

$$8x^3 \text{ e' il cubo di } 2x$$

$$27y^3 \text{ e' il cubo di } 3y$$

Quindi proviamo a calcolare:

$(2x+3y)^3$ Ho messo il piu' perche' i termini sono tutti positivi, se avevo due positivi e due negativi provavo col segno meno).

Se il risultato corrispondera' al polinomio di partenza questa sara' la scomposizione, altrimenti dovremo provare un'altra scomposizione (ad esempio Ruffini).

Se sviluppo ottengo:

$$(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

Va bene. Quindi potro' scrivere:

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x+3y)^3$$

Per i segni notiamo che se e' un cubo i segni sono o tutti e quattro positivi (o negativi) oppure due positivi e due negativi quindi se avessi:

$$8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$$

Questo non potrebbe essere un cubo.

(4) Scomposizione secondo il quadrato del trinomio

E' una delle piu' facili da individuare perche' il polinomio di partenza ha un elevato numero di termini (sei), l'unica difficolta' e' mettere i segni giusti.

Naturalmente si ottiene leggendo a rovescio la regola per ottenere il quadrato del trinomio:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

cioe':

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$$

Proviamo subito con un esempio:

$$4x^2+9y^2+16z^2+12xy-16xz-24yz=$$

Guardando la regola del quadrato del trinomio devo avere sei termini di cui tre devono essere dei quadrati di monomi e gli altri tre i loro doppi prodotti (qui sono in fila ma possono anche essere in disordine).

$4x^2$ e' il quadrato di $2x$

$9y^2$ e' il quadrato di $3y$

$16z^2$ e' il quadrato di $4z$

Il doppio prodotto di $2x$ e di $3y$ e' $2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$

Il doppio prodotto di $2x$ e di $4z$ e' $2 \cdot 2x \cdot 4z = 16xz$

Il doppio prodotto di $3y$ e di $4z$ e' $2 \cdot 3y \cdot 4z = 24yz$

Quindi posso scrivere:

$$4x^2+9y^2+16z^2+12xy-16xz-24yz=(2x+3y-4z)^2$$

Per quanto riguarda i segni partiamo dal mettere il segno positivo al primo monomio, per avere il segno del secondo guardo il segno del doppio prodotto del primo per il secondo: se c'e' piu' metto al secondo il segno piu' altrimenti metto meno; in questo caso avendo $+12xy$ metto piu'. $(2x+3y-4z)^2$.

Per il segno del terzo guardo il doppio prodotto fra il primo ed il terzo:

avendo $-16xz$ metto meno: $(2x+3y-4z)^2$.

Non e' finita: devo controllare che vada bene il segno del doppio prodotto fra il secondo ed il terzo altrimenti la scomposizione non e' valida:

in questo caso $-24yz$ corrisponde al segno positivo del secondo e negativo del terzo quindi

$$4x^2+9y^2+16z^2+12xy-16xz-24yz=(2x+3y-4z)^2$$

e) Somma e differenza di potenze pari e dispari

Sono scomposizioni di polinomi di due termini: possiamo suddividerle nei seguenti quattro gruppi:

- Differenza di potenze dispari
- Somma di potenze dispari
- Differenza di potenze pari
- Somma di potenze pari

(1) Differenza di potenze dispari

Cercheremo la regola per scomporre tutte quelle potenze del tipo

$x^n - a^n$ per n dispari, cioe' ad esempio

$$x^3 - a^3 =$$

$$x^5 - a^5 =$$

$$x^7 - a^7 =$$

.....

dove al posto di a possiamo pensare un numero; per trovare la regola di scomposizione proviamo a scomporre con Ruffini e vediamo se riusciamo ad individuare delle regolarita' Iniziamo a scomporre

$$x^3 - a^3 =$$

essendo il termine noto a^3 il possibile divisore di Ruffini sara' del tipo $(x-a)$; $(x+a)$

Provo a dividere per $(x-a)$

$$(x-a) ; P(a)=a^3 - a^3 = 0$$

Essendo il resto zero $(x-a)$ e' un divisore; eseguo la divisione:

	1	0	0	$-a^3$
a		a	a^2	a^3
	1	a	a^2	$=$

Otengo:

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$$

Proviamo ora a scomporre:

$$x^5 - a^5 =$$

$$(x-a); P(a)=a^5 - a^5 = 0$$

Essendo il resto zero $(x-a)$ e' un divisore;

eseguo la divisione:

	1	0	0	0	0	$-a^5$
a		a	a^2	a^3	a^4	a^5
	1	a	a^2	a^3	a^4	$=$

Otengo:

$$x^5 - a^5 = (x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)$$

Ora senza eseguire Ruffini ma tenendo presenti le due scomposizioni:

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$$

$$x^5 - a^5 = (x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)$$

Voglio scomporre:

$$x^7 - a^7 = \text{Intanto il divisore sara' } (x-a)$$

$$x^7 - a^7 = (x-a)(\dots)$$

osserviamo che dentro parentesi al posto dei puntini devo mettere il primo termine abbassato di un grado, cioe' x^6 poi man mano devo fare un polinomio ordinato abbassando la potenza della x ed aumentando la potenza della a ed i segni sono tutti positivi.

Quindi:

$$x^7 - a^7 = (x-a)(x^6+ax^5+a^2x^4+a^3x^3+a^4x^2+a^5x+a^6)$$

Regola: una differenza di potenze dispari e' uguale al prodotto di un binomio dato dalla differenza delle basi per un polinomio ordinato e completo ottenuto abbassando di un grado il primo termine, poi via via abbassando di un grado il primo ed aumentando di un grado il secondo ed i segni sono tutti positivi

Per esercizio prova a scomporre:

$$x^9 - a^9 = \text{ecco il risultato:}$$

$$x^9 - a^9 = (x-a)(x^8+ax^7+a^2x^6+a^3x^5+a^4x^4+a^5x^3+a^6x^2+a^7x+a^8)$$

Da notare che essendo il secondo fattore un polinomio ordinato e completo il grado di tutti i suoi monomi e' fisso ed in questo caso vale 8.

(2) Somma di potenze dispari

Cercheremo la regola per scomporre tutte quelle potenze del tipo

$$x^n + a^n \text{ per } n \text{ dispari, cioe' ad esempio}$$

$$x^3 + a^3 =$$

$$x^5 + a^5 =$$

$$x^7 + a^7 =$$

.....

dove al posto di a possiamo pensare un numero; per trovare la regola di scomposizione proviamo a scomporre con Ruffini e vediamo se riusciamo ad individuare delle regolarità come nella schermata precedente.

Iniziamo a scomporre:

$$x^3 + a^3 =$$

essendo il termine noto a^3 il possibile divisore di Ruffini sarà del tipo $(x-a)$; $(x+a)$

Provo a dividere per $(x-a)$

$$(x-a) ; P(a) = a^3 + a^3 \neq 0$$

$$(x+a) ; P(-a) = (-a)^3 + a^3 = -a^3 + a^3 = 0$$

Essendo il resto zero $(x+a)$ è un divisore;

eseguo la divisione:

	1	0	0	a^3
a		$-a$	a^2	$-a^3$
	1	$-a$	a^2	$=$

Otengo:

$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$$

Proviamo ora a scomporre:

$$x^5 + a^5 =$$

$$(x-a) ; P(a) = a^5 + a^5 \neq 0$$

$$(x+a) ; P(-a) = (-a)^5 + a^5 = -a^5 + a^5 = 0$$

Essendo il resto zero $(x+a)$ è un divisore;

eseguo la divisione:

	1	0	0	0	0	a^5
$-a$		$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	$-a^5$
	1	$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	

Otengo:

$$x^5 + a^5 = (x+a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)$$

Ora senza eseguire Ruffini ma tenendo presenti le due scomposizioni:

$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$x^5 + a^5 = (x+a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)$$

Voglio scomporre:

$$x^7 + a^7 = \text{Intanto il divisore sarà } (x+a)$$

$$x^7 + a^7 = (x+a)(\dots)$$

Osserviamo che dentro parentesi al posto dei puntini devo mettere il primo termine abbassato di un grado, cioè x^6 poi man mano devo fare un polinomio ordinato abbassando la potenza della x ed aumentando la potenza della a ed i segni sono alternati: uno positivo e l'altro negativo ..

Quindi:

$$x^7 + a^7 = (x+a) (x^6 - ax^5 + a^2x^4 - a^3x^3 + a^4x^2 - a^5x + a^6)$$

Regola: una somma di potenze dispari e' uguale al prodotto di un binomio dato dalla somma delle basi per un polinomio ordinato e completo ottenuto abbassando di un grado il primo termine, poi via via abbassando di un grado il primo ed aumentando di un grado il secondo ed i segni sono alternati

Per esercizio prova a scomporre:

$x^9 + a^9 =$ ecco il risultato:

$$x^9 + a^9 = (x+a) (x^8 - ax^7 + a^2x^6 - a^3x^5 + a^4x^4 - a^5x^3 + a^6x^2 - a^7x + a^8)$$

Da notare che essendo il secondo fattore un polinomio ordinato e completo il grado di tutti i suoi monomi e' fisso ed in questo caso vale 8.

(3) Scomposizione di una differenza di potenze pari

Ho visto in alcuni libri utilizzare una formula quale quelle per le potenze dispari, ma siccome io sono convinto che in matematica le cose piu' semplici siano le migliori per questa scomposizione consiglio sempre ai miei alunni di rifarsi alla differenza di quadrati: vediamo un esempio:

$$x^6 - a^6 =$$

x^6 e' il quadrato di x^3

a^6 e' il quadrato di a^3

Quindi:

$$x^6 - a^6 = (x^3 - a^3) (x^3 + a^3) =$$

Poi dentro parentesi abbiamo una differenza di potenze dispari ad una somma di potenze dispari, quindi:

$$= (x-a)(x^2+ax+a^2) (x+a)(x^2-ax+a^2).$$

(4) Scomposizione di una somma di potenze pari

In genere una somma di potenze pari del tipo:

$$x^4 + a^4$$

Non e' scomponibile.

Vi e' un caso in cui e' possibile applicare una scomposizione, ma di solito si fa solo al liceo scientifico:

Per poter fare questa scomposizione occorre che i quadrati dei monomi siano tali che il doppio prodotto dei monomi stessi sia ancora un quadrato; vediamone un esempio:

$$x^4 + 4a^4 =$$

$$x^4 + 4a^4 + 4a^2x^2 - 4a^2x^2 =$$

Ho aggiunto e tolto il doppio prodotto:

$$= (x^4 + 4a^2x^2 + 4a^4) - 4a^2x^2 =$$

Ho messo assieme i termini che formano un quadrato ed ora lo evidenzio:

$$= (x^2 + 2a^2)^2 - 4a^2x^2 =$$

Ora e' come se avessi due termini al quadrato con il meno in mezzo;

applico la scomposizione differenza di quadrati:

$$(x^2 + 2a^2)^2 \text{ e' il quadrato di } (x^2 + 2a^2)$$

$4a^2x^2$ e' il quadrato di $2ax$

quindi:

$$=[(x^2+2a^2)+2ax][(x^2+2a^2)-2ax]=$$

Faccio cadere le parentesi:

$$=(x^2+2a^2+2ax)(x^2+2a^2-2ax)=$$

Metto i polinomi in forma ordinata:

$$=(x^2+2ax+2a^2)(x^2-2ax+2a^2)$$

Ho potuto fare la scomposizione solamente perche' il termine che ho aggiunto e tolto $4a^2x^2$ e' un quadrato, altrimenti non avrei potuto scomporre.

f) Scomposizione secondo il trinomio notevole

La scomposizione secondo il trinomio notevole e' l'operazione inversa della moltiplicazione fra binomi: cioe' dato il trinomio:

x^2+sx+p con s e p numeri dati dobbiamo trovare il prodotto fra binomi

$(x+a)(x+b)$ il cui risultato sia il polinomio di partenza.

Se noi proviamo ad eseguire la moltiplicazione vedremo cosa sono s e p rispetto ad a e b

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

Allora avremo che:

$$x^2+sx+p=x^2+(a+b)x+ab$$

e per il principio di identita' dei polinomi avremo:

$$s=(a+b)$$

$$p=ab$$

Quindi avendo p e s dovrò trovare due numeri il cui prodotto e' p e la somma e' s .

Esempio:

$$x^2+5x+6=$$

Devo trovare due numeri il cui prodotto e' 6 e la somma e' 5 (conviene partire dal prodotto):

i numeri che danno prodotto 6 possono essere 1 e 6 oppure 2 e 3 e la somma di 2 e 3 mi dà 5

i due numeri cercati sono 2 e 3 quindi:

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

Quindi quando hai un polinomio ordinato di 3 termini puoi usare questa regola senza scomodare Ruffini.

Attenzione!: guarda che per somma si intende somma algebrica quindi e' importante guardare il segno del prodotto: se e' positivo allora i due numeri cercati hanno lo stesso segno e devi farne la somma, ma se il segno del prodotto e' negativo i due numeri hanno segni diversi e devi fare la differenza.

Esempio:

$$x^2+3x-10=$$

Devo trovare due numeri il cui prodotto e' -10 e la somma e' $+3$ (conviene partire dal prodotto che in questo caso e' negativo quindi devi fare la differenza).

I numeri che danno prodotto 10 possono essere 1 e 10 oppure 2 e 5 e la differenza di 5 e 2 mi dà 3 ed essendo 3 positivo dovrò fare $+5-2$

i due numeri cercati sono -2 e $+5$ quindi:

$$x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$$

g) Scomposizione mediante raggruppamenti

Sono le scomposizioni piu' difficili da individuare e solamente un po' di esperienza potra' facilitartene il riconoscimento.

Teoricamente si tratta di questo: quando devo scomporre un polinomio puo' darsi che raccogliendo tra parentesi alcune parti io possa rifarmi a qualcuno dei casi gia' studiati. Qui di seguito troverai elencati alcuni casi, ma ricordati che qui bisogna intervenire sia col ragionamento che con l'esperienza, pertanto sono necessari molti esercizi.

Raggruppamenti possibili per i polinomi secondo il numero dei termini:

- A quattro termini
- A cinque termini
- A sei termini

Non vado oltre i sei termini comunque potresti provare tu per esercizio a vedere quali sono i possibili raggruppamenti per 7 e 8 termini.

Raggruppamenti possibili per polinomi a quattro termini

Il caso classico del raggruppamento a quattro termini e' quello in cui tre termini concorrono in un quadrato ed il quarto e' ancora un quadrato:

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 =$$

Raggruppo i primi tre termini:

$$= (x^2 + 2xy + y^2) - z^2 = (x+y)^2 - z^2 =$$

Ora poiche' la parentesi e' un solo termine devo fare la scomposizione fra due termini e precisamente posso fare la differenza di due quadrati cioe':

$$= [(x+y) + z][(x+y) - z] =$$

tolgo le parentesi interne:

$$= (x+y+z)(x+y-z)$$

Un altro caso possibile e' quello in cui abbiamo una differenza di quadrati che si combina con un raccoglimento:

$$x^2 - a^2 + 5x + 5a =$$

Scompongo i primi due termini come differenza di quadrati e fra il terzo ed il quarto termine raccolgo il 5

$$= (x+a)(x-a) + 5(x+a) =$$

ora sono due termini e tra loro posso raccogliere $(x+a)$:

$$= (x+a)[(x-a) + 5] = (x+a)(x-a+5)$$

Altri casi possibili si hanno con somme o differenze di potenze dispari unite ad un raccoglimento.

Alcuni raggruppamenti possibili per polinomi a cinque termini

Qui abbiamo vari casi e bisogna decidere volta per volta cosa fare:

Ti elenco alcuni dei vari casi possibili per darti un'idea su come procedere:

- Differenza fra due cubi
- Quadrato di un binomio e raccoglimento
- Trinomio notevole con raccoglimento

Inoltre posso avere somme o differenze di potenze dispari o differenze di potenze pari unite ad una scomposizione a tre termini, quindi i casi diventano piuttosto numerosi e invece che studiarli a memoria conviene cercare di capire volta per volta quale strada seguire. Poiche' questi raggruppamenti sono piuttosto complicati vengono usati raramente, quindi faremo dei brevi cenni e non considereremo il caso in cui uno dei raggruppamenti sia scomponibile con Ruffini.

Raggruppamento per polinomi a cinque termini: differenza di cubi

In questo caso quattro dei termini concorrono a formare un cubo di un binomio ed il quinto termine e' ancora un cubo:

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - z^3 =$$

Raggruppo i primi quattro termini:

$$= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - z^3 =$$

$$= (x+y)^3 - z^3 =$$

Ora poiche' la parentesi e' da considerare un solo termine devo fare la scomposizione fra due termini e precisamente posso fare la **differenza di due cubi** cioe':

$$= [(x+y) - z][(x+y)^2 + (x+y)z + z^2] =$$

Faccio i calcoli:

$$= [(x+y) - z][(x^2 + 2xy + y^2) + xz + yz + z^2] =$$

tolgo le parentesi interne:

$$= (x+y-z)(x^2 + 2xy + y^2 + xz + yz + z^2)$$

Complicato, vero?

Raggruppamento per polinomi a cinque termini: quadrato di un binomio e raccoglimento

In questo caso tre termini concorrono in un quadrato e tra gli altri due termini posso mettere qualcosa in evidenza in modo che risultino uguali i termini entro parentesi :

$$x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y =$$

Raggruppo i primi tre termini e fra il quarto ed il quinto raccolgo 3:

$$= (x^2 + 2xy + y^2) + 3(x+y) =$$

$$= (x+y)^2 + 3(x+y) =$$

Ora poiche' i termini entro parentesi sono uguali posso raccogliere:

$$= (x+y)[(x+y) + 3] =$$

tolgo le parentesi interne:

$$= (x+y)(x+y+3)$$

Raggruppamento per polinomi a cinque termini: trinomio notevole con raccoglimento

In questo caso tre termini concorrono in un trinomio notevole e tra gli altri due termini posso mettere qualcosa in evidenza in modo che risultino uguali i termini entro parentesi :

$$x^2 + 6x + 8 + ax + 4a =$$

Raggruppo i primi tre termini e fra il quarto ed il quinto raccolgo a:

$$= (x^2 + 6x + 8) + a(x+4) =$$

nei primi tre termini scompongo secondo il trinomio notevole:

$$= (x+2)(x+4) + a(x+4) =$$

Ora poiche' i termini entro parentesi sono uguali posso raccogliere:

$$= (x+4)[(x+2) + a] =$$

tolgo le parentesi interne ed ordino

$$= (x+4)(x+a+2)$$

Raggruppamenti possibili per polinomi a sei termini

In questo caso i raggruppamenti possibili sono ancor piu' numerosi: per dartene un'idea pensa a tutte le scomposizioni fatte tali che il numero dei termini di due scomposizioni sia 6 e tali che i termini delle due scomposizioni non si possano sommare tra loro; quindi:

- differenza fra due quadrati di un binomio
- cubo di un binomio con un raccoglimento fra due termini
- due termini come differenza di quadrati e gli altri con un raccoglimento parziale

- quattro termini come raggruppamento a differenza di quadrati e gli altri due come raccoglimento.

E ve ne sono parecchie altre se consideriamo per due termini la somma o la differenza di potenze dispari e la differenza di potenze pari. Se poi facciamo intervenire la scomposizione di Ruffini il numero aumenta di parecchio, quindi, senza dilungarci troppo, anche perché questo è un argomento piuttosto secondario, concludiamo le scomposizioni passando alla [tabella di riepilogo](#).

h) Tabella di riepilogo

<u>Come si usa la tabella:</u> leggi a fine tabella	
Prima operazione da fare è il <u>raccoglimento a fattor comune</u> poi si contano i termini	
<i>N. termini</i>	<i>Scomposizioni possibili</i>
2 termini	- Differenza di quadrati: (differenza di potenze pari) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ - Somma di cubi (somma di potenze dispari) $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$ - Differenza di cubi (differenza di potenze dispari) $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$ - Caso particolare: somma di potenze pari
3 termini	- Quadrato del binomio $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ - Trinomio notevole $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$ - Ruffini
4 termini	- Cubo del binomio $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ - Raccoglimento a fattor comune parziale $ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y)$ - Raggruppamento - Ruffini
5 termini	- Raggruppamenti - Ruffini
6 termini	- Quadrato del trinomio $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$ - Raccoglimento parziale $ax + bx + ay + by + az + bz = x(a+b) + y(a+b) + z(a+b) = (a+b)(x+y+z)$ - Raggruppamento - Ruffini

Premetto che, secondo me, questa tabella è una delle pochissime cose che in matematica bisognerebbe "studiare a memoria", perché ci permette di poter affrontare quasi tutte le possibili scomposizioni di un polinomio fino a sei termini.

Vediamo con un semplice esercizio come usare la tabella per scomporre un polinomio:

Scomponiamo il polinomio:

$$a^2x^2 + ax^2 - ax - x =$$

prima operazione da fare è raccogliere a fattor comune cioè'.

$$= x(a^2x + ax - a - 1) =$$

Ora conto i termini dentro parentesi: sono 4 quindi vado a vedere le scomposizioni a quattro termini: prima ho il cubo di un binomio e direi che non va bene perche' non ho termini al cubo, poi ho il raccoglimento parziale, proviamo a raccogliere il primo con il terzo ed il secondo con il quarto:

$$= x[a(ax-1) + 1(ax-1)] =$$

poiche' dentro parentesi tonde i termini sono uguali posso raccogliere:

$$x[(ax-1)(a+1)] =$$

Tolgo le parentesi quadre perche' non servono:

$$= x(ax-1)(a+1)$$

Per scomporre prima devi raccogliere a fattor comune totale poi contare il numero di termini che ti restano dentro parentesi (o fuori se non hai raccolto niente), poi vai a controllare le scomposizioni associate a quel numero di termini in ordine come sono (dalla piu' semplice alla piu' difficile) finche' non trovi quella giusta e se alla fine vedi che nessuna scomposizione va bene devi scrivere *polinomio non scomponibile*:

Proviamo a scomporre il polinomio:

$$x^3 - x^2 + 2x + 1 =$$

Non c'e' niente da raccogliere a fattor comune totale allora conto i termini: sono 4

- La prima scomposizione a quattro termini e' il cubo di un binomio, ho due termini al cubo ma mi mancano i tripli prodotti, quindi non va bene
- Provo il raccoglimento parziale ma vedo subito che non posso farlo perche' ho tre segni positivi ed uno negativo, quindi anche questa scomposizione non va bene
- Provo a raggruppare: sembra quasi ci sia il quadrato di un binomio ma i termini che potrebbero essere quadrati sono uno positivo e l'altro negativo quindi non e' un quadrato e non vedo altri possibili raggruppamenti, passo avanti
- Provo Ruffini: i possibili divisori sono $+1$ e -1
 $P(1) = (1)^3 - (1)^2 + 2(1) + 1 = 1 - 1 + 2 + 1 = 3$
 $P(1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 2(-1) + 1 = -1 - 1 - 2 + 1 = -3$
 e con entrambi il polinomio mi da' resto diverso da zero quindi anche questa scomposizione e' da scartare
- il polinomio $x^3 - x^2 + 2x + 1 =$ non e' scomponibile.

i) M.C.D.

Come per i monomi anche per i polinomi per calcolare il Massimo Comun Divisore devo trovare tutti i fattori comuni, quindi prima dovro' scomporre i polinomi poi cercare cosa hanno di uguale fra loro (ricorda che se non hanno niente di uguale il Massimo Comun Divisore vale 1).

Vediamo su un esempio.

Trovare il M.C.D. fra i seguenti polinomi:

$$3x^2 - 12 ; \quad 3x^3 + 24 ; \quad 6x + 12;$$

Scompongo i tre polinomi:

$$3x^2 - 12 = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \text{ ecco i passaggi:}$$

Scomponiamo il polinomio $3x^2 - 12 =$

raccolgo a fattor comune 3

$$= 3 \cdot (x^2 - 4)$$

Dentro parentesi ho due termini: sono due quadrati con il meno in mezzo:

differenza di quadrati $= 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$

$$3x^3 + 24 = 3 \cdot (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4) \text{ Ecco i passaggi:}$$

Scomponiamo il polinomio: $3x^3 + 24 =$

Raccolgo 3 a fattor comune

$$= 3 \cdot (x^3 + 8) =$$

Dentro parentesi ci sono due termini; non e' una differenza di quadrati;

c'e' il segno meno in mezzo a due cubi (8 e' il cubo di 2) quindi: $= 3 \cdot (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$

$$6x + 12 = 2 \cdot 3 \cdot (x + 2) \quad \text{Ecco i passaggi:}$$

Scomponiamo il polinomio: $6x + 12 =$

Raccolgo 6 a fattor comune

$$= 6 \cdot (x + 2) =$$

Convieni scomporre anche il numero $= 2 \cdot 3 \cdot (x + 2)$

Ora di comune abbiamo 3 e $(x + 2)$ quindi il M.C.D. e'

$$3 \cdot (x + 2)$$

Definizione: Per calcolare il M.C.D. fra polinomi si scompongono i polinomi in fattori e poi si prendono i fattori comuni con l'esponente piu' basso

Proviamo qualcosa di piu' complicato:

Trovare il M.C.D. fra i seguenti polinomi:

$$2x^3 - 6x^2 + 6x - 2;$$

$$4x^2 - 8x + 4;$$

$$2x^3 - 2x^2 - 2x + 2;$$

Scompongo i tre polinomi:

$$1) \quad 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 2 \cdot (x - 1)^3 \quad \text{Passaggi:}$$

Scomponiamo il polinomio: $2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 =$

Metto in evidenza il 2

$$2 \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$$

Sono 4 termini e come prima cosa nella [tabella delle scomposizioni](#) devo controllare se e' un cubo:

Ho due termini al cubo (1 e' il cubo di 1) ed i loro tripli prodotti $= 2 \cdot (x - 1)^3$

$$2) \quad 4x^2 - 8x + 4 = 2^2 \cdot (x - 1)^2 \quad \text{Passaggi:}$$

Scomponiamo il polinomio: $4x^2 - 8x + 4 =$

Raccolgo 4 a fattor comune

$$= 4 \cdot (x^2 - 2x + 1) =$$

Ho tre termini e seguendo la [tabella delle scomposizioni](#) devo controllare per prima cosa se e' un quadrato: vi

sono due termini al quadrato ed il loro doppio prodotto $= 4 \cdot (x - 1)^2 =$

scompongo il numero 4 $= 2^2 \cdot (x - 1)^2$

$$3) \quad 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 = 2 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1) \quad \text{Passaggi:}$$

Scomponiamo il polinomio: $2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 = 2$

Metto in evidenza 2

$$= 2 \cdot (x^3 - x^2 - x + 1)$$

Dentro parentesi ho 4 termini e seguendo la [tabella delle scomposizioni](#) controllo:

1) Se si tratta di un cubo: i 2 cubi ci sono ma mancano i tripli prodotti; quindi non va bene e passo alla seconda scomposizione.

2) Se si tratta di un raccoglimento parziale: tra il primo ed il secondo posso raccogliere x^2 e tra il terzo ed il quarto posso raccogliere -1 ; provo la scomposizione $= 2 \cdot [x^2 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (x - 1)] =$

dentro parentesi quadre raccolgo $(x - 1)$

$$= 2 \cdot [(x - 1) \cdot (x^2 - 1)] =$$

Tolgo la parentesi quadra $= 2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 1) =$

Dentro parentesi tonda ho una differenza di quadrati, la scompongo:

$$= 2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 2 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)$$

Devo prendere i fattori che sono comuni cioe' 2 e $(x - 1)$ e con l'esponente piu' basso; quindi:

$$\text{M.C.D.} = 2 \cdot (x - 1)^2$$

j) m.c.m.

Per calcolare il minimo comune multiplo devo prendere tutti i fattori comuni e non comuni con l'esponente piu' alto, quindi prima dovrò scomporre i polinomi.

Vediamo su un esempio.

Trovare il m.c.m. fra i seguenti polinomi:

$$x^2 - 9; \quad 2x^2 + 12x + 18; \quad 3x^3 - 81;$$

Scompongo i tre polinomi:

$$1) \quad x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3) \quad \text{Passaggi:}$$

Scomponiamo il polinomio $x^2 - 9 =$

Ho due termini: sono due quadrati con il meno in mezzo:
differenza di quadrati

$$= (x - 3) \cdot (x + 3)$$

$$2) \quad 2x^2 + 12x + 18 = 2 \cdot (x + 3)^2 \quad \text{Passaggi:}$$

Scomponiamo il polinomio $2x^2 + 12x + 18 =$

Prima raccolgo a fattor comune il 2

$$2 \cdot (x^2 + 6x + 9) =$$

Ho tre termini: ci sono due quadrati con il loro doppio prodotto:

Quadrato del binomio:

$$= 2 \cdot (x + 3)^2$$

$$3) \quad 3x^3 - 81 = 3 \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9) \quad \text{Passaggi:}$$

Scomponiamo il polinomio $3x^3 - 81 =$

Prima metto in evidenza il 3

$$= 3 \cdot (x^3 - 27) =$$

Dentro parentesi ho due termini:

La prima scomposizione a due termini e' la differenza di quadrati ma x^3 non e' un quadrato;

Passo alla somma e differenza di cubi e stavolta ci siamo

$$= 3 \cdot (x^3 - 3^3) = 3 \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)$$

Ora per fare il m.c.m. devo prendere tutto:

$$\text{m.c.m.} = 2 \cdot 3 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)^2 \cdot (x^2 + 3x + 9)$$

Definizione: Per calcolare il m.c.m. fra polinomi si scompongono i polinomi in fattori e poi si prendono i fattori comuni e non comuni con l'esponente piu' alto

E. Frazioni algebriche

Si tratta ora di applicare quanto appreso sui polinomi:

- Perche' le frazioni algebriche
- Equivalenza
- Somma e differenza
- Prodotto
- Quoziente
- Elevamento a potenza
- Espressioni

1. Perche' le frazioni algebriche

Le frazioni algebriche sono frazioni con polinomi al numeratore e al denominatore, quindi sono le frazioni piu' generiche possibili: studiare e capire le regole delle loro operazioni significa saper lavorare con tutti i tipi di frazione possibili.

Come vedi, vale la pena di faticare un poco.
Buon lavoro!

2. Equivalenza di frazioni algebriche

Per tutte le possibili operazioni faremo riferimento alle operazioni già fatte con le frazioni numeriche: ricorda infatti che i polinomi **comprendono anche i numeri**, quindi deve essere possibile eseguire sui polinomi le stesse operazioni che eseguiamo sui numeri.

Se consideriamo una frazione, la prima cosa da fare è semplificarla (ridurla ai minimi termini) per renderla più semplice possibile.

Se ad esempio ho:

$$\frac{10}{15}$$

Scompongo numeratore e denominatore:

$$\frac{2 \times 5}{3 \times 5}$$

Divido numeratore e denominatore per 5 ed ottengo:

$$\frac{2}{3}$$

Quando ho una frazione con un polinomio al numeratore ed un polinomio al denominatore devo fare la stessa cosa:

- Devo scomporre numeratore e denominatore
 - Devo controllare se scomponendo ho ottenuto due fattori uguali
 - Se sono uguali li elimino
 - Scrivo la frazione con i termini restanti
- per trovare la regola, come hai visto, devo cercare di fare tutte le operazioni senza nessuna abbreviazione.

Esempio:

Scomporre la frazione:

$$\frac{(x^2 - 4)}{(x^2 - 5x + 6)} =$$

Scompongo il numeratore:

$x^2 - 4$ è una differenza di quadrati e si scompone come $(x - 2) \cdot (x + 2)$;

scompongo il denominatore:

$x^2 - 5x + 6$ è un trinomio notevole e si scompone come $(x - 2) \cdot (x - 3)$

quindi ho:

$$= \frac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{(x - 2) \cdot (x - 3)} =$$

Numeratore e denominatore hanno uguale il fattore $(x - 2)$, lo tolgo sia sopra che sotto ed ottengo:

$$= \frac{(x + 2)}{(x - 3)}$$

3. Somma e differenza di frazioni algebriche

Anche qui seguiremo esattamente lo stesso procedimento che si usa per la somma di due frazioni numeriche. Se ad esempio ho:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4} =$$

Scompongo i denominatori:

$$= \frac{1}{3x^2} + \frac{3}{2^2} =$$

Calcolo il minimo comune multiplo $3x^2$

Sommo le frazioni equivalenti con denominatore il minimo comune multiplo:

$$= \frac{1x^2}{3x^2} + \frac{3x^3}{3x^2} =$$

Per semplicità si preferisce scrivere un'unica frazione piuttosto che più frazioni:

$$= \frac{2 + 3x^3}{3x^2} =$$

Eseguo le operazioni al numeratore:

$$= \frac{2 + 9}{3x^2} =$$

Sommo i numeratori:

$$= \frac{11}{12}$$

Controllo se numeratore e denominatore si possono semplificare: no!
ed ottengo:

$$= \frac{11}{12}$$

Quando ho una somma di frazioni algebriche devo fare la stessa cosa:

- scomporre i denominatori
 - fare il minimo comune multiplo
 - dividere il minimo comune multiplo per i denominatori e moltiplicare il risultato per i numeratori
 - eeguire le moltiplicazioni ai numeratori
 - sommare i termini simili
 - scomporre, se possibile il numeratore per semplificarlo con il denominatore
 - Scrivere la frazione finale
- per trovare la regola, come hai visto, devo cercare di fare tutte le operazioni senza nessuna abbreviazione.

Esempio:

Sommare le frazioni:

$$\frac{x + 3}{x^2 - 4} + \frac{x - 4}{x^2 - 2x} =$$

Scompongo i denominatori:

$$= \frac{x + 3}{(x + 2) \cdot (x - 2)} + \frac{x - 4}{x \cdot (x - 2)} =$$

- Calcolo il minimo comune multiplo:
 $m.c.m. = x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$
- Divido il minimo comune multiplo per i denominatori e moltiplico il risultato per i numeratori
 - Considero:
 $x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$
e lo divido per il primo denominatore $(x + 2) \cdot (x - 2)$
ed ho come risultato x (per dividere devi eliminare i termini uguali)
devo poi moltiplicare x per il primo numeratore $(x + 3)$
 - divido $x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$
per il secondo denominatore $x \cdot (x - 2)$
ed ho come risultato

$x + 2$ devo poi moltiplicare $x + 2$

per il secondo denominatore $(x - 4)$

Di solito si fa tutto assieme:

$$= \frac{x \cdot (x + 3) + (x + 2) \cdot (x - 4)}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)} =$$

- c. Esegui le moltiplicazioni ai numeratori:

$$= \frac{x^2 + 3x + x^2 - 4x + 2x - 8}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)} =$$

- d. Sommo i termini simili:

$$= \frac{2x^2 + x - 8}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)} =$$

- e. provo a **scomporre** il numeratore ma questo non e' scomponibile

- f. la frazione finale e' quella scritta prima

Per la **differenza** e' come per la somma ma attenzione: qui e' facile commettere un errore. Quando abbiamo il meno davanti ad una frazione occorre cambiare di segno tutti i termini al numeratore.

Ad esempio, eseguiamo la seguente operazione:

$$= \frac{x}{x + 3} - \frac{x - 2}{x^2 - 9} =$$

- a. Scompongo i denominatori, il primo e' gia' scomposto quindi scompongo solo il secondo:

$$= \frac{x}{x + 3} - \frac{x - 2}{(x + 3) \cdot (x - 3)} =$$

- b. Calcolo il minimo comune multiplo

$$\text{m.c.m.} = (x + 3) \cdot (x - 3)$$

- c. Divido il minimo comune multiplo per i denominatori e moltiplico il risultato per i numeratori

- o $(x + 3) \cdot (x - 3)$ diviso per il primo denominatore $(x + 3)$ da' come risultato $(x - 3)$ devo poi moltiplicare $(x - 3)$ per il primo numeratore x
- o $(x + 3) \cdot (x - 3)$ diviso per il secondo denominatore $(x + 3) \cdot (x - 3)$ da' come risultato 1 devo poi moltiplicare 1 per il secondo numeratore che quindi non cambia.

Di solito si fa tutto assieme:

$$= \frac{x \cdot (x - 3) - (x - 2)}{(x + 3) \cdot (x - 3)} =$$

- a. Esegui le moltiplicazioni ai numeratori:

$$= \frac{x^2 - 3x - x + 2}{(x + 3) \cdot (x - 3)} =$$

Attenzione! Per le frazioni viene spontaneo non cambiare il numeratore quando lo devo moltiplicare per 1, ma qui in mezzo alle due frazioni ho il segno meno, quindi e' come se moltiplicassi per -1; per non sbagliare e' bene mettere sempre la parentesi al numeratore come ho fatto io quando si ha una frazione con il segno meno.

- b. Sommo i termini simili:

$$= \frac{x^2 - 4x + 2}{(x + 3) \cdot (x - 3)} =$$

- d. Provo a **scomporre** il numeratore ma questo non e' scomponibile.

- e. La frazione finale e' quella scritta prima.

4. Prodotto di frazioni algebriche

Vediamo ora di ripassare il prodotto fra due frazioni numeriche e poi facciamo l'equivalente con i polinomi.

se ad esempio ho:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{21} =$$

Scompongo sia i numeratori che i denominatori:

$$= \frac{3}{2 \times 5} \cdot \frac{2^2}{3 \times 7} =$$

Semplifico i termini uguali che siano in un numeratore ed in un denominatore nel nostro caso tolgo il 3 con il 3 ed il 2 al denominatore con un due del numeratore; resta:

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} =$$

Moltiplico sopra con sopra e sotto con sotto (numeratore con numeratore e denominatore con denominatore):

$$= \frac{1 \times 2}{5 \times 7} = \frac{2}{35}$$

Quando ho un prodotto di frazioni algebriche devo fare la stessa cosa:

- Scomporre i numeratori ed i denominatori.
- Eliminare i termini uguali che si trovino sia al numeratore che al denominatore (attenzione che anche se un solo segno e' diverso i termini non sono piu' uguali).
- Moltiplicare numeratore con numeratore e denominatore con denominatore.

Esempio: moltiplicare le frazioni:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \cdot \frac{3x - 9}{x^2 - 2x} =$$

- scompongo numeratori e denominatori:

$$\circ x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$$

$$\circ x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3)$$

$$\circ 3x - 9 = 3 \cdot (x - 3)$$

$$\circ x^2 - 2x = x \cdot (x - 2)$$

$$= \frac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{(x - 3) \cdot (x + 3)} \cdot \frac{3 \cdot (x - 3)}{x \cdot (x - 2)} =$$

- elimino (x-2) ed (x-3) che si trovano contemporaneamente al numeratore ed al denominatore; resta:

$$= \frac{x + 2}{x + 3} \cdot \frac{3}{x} =$$

- moltiplico numeratore con numeratore e denominatore con denominatore:

$$= \frac{3 \cdot (x + 2)}{x \cdot (x + 3)} = \frac{3x + 6}{x^2 + 3x}$$

5. Quoziente di frazioni algebriche

Anche per il quoziente ripassiamo l'operazione fra due frazioni numeriche e poi facciamo l'equivalente con i polinomi. Se ad esempio ho:

$$\frac{10}{3} : \frac{7}{18} =$$

Devo moltiplicare la prima frazione per l'inverso della seconda:

$$= \frac{10}{3} \cdot \frac{18}{7} =$$

e continuo normalmente come se fosse una moltiplicazione, cioè:
scompongo sia i numeratori che i denominatori:

$$= \frac{2 \times 5}{3} \cdot \frac{2 \times 3^2}{7} =$$

Semplifico i termini uguali che siano in un numeratore ed in un denominatore; nel nostro caso tolgo il 3 del denominatore con un tre del numeratore; resta:

$$= \frac{2 \times 5}{1} \cdot \frac{2 \times 3}{7} =$$

Moltiplico sopra con sopra e sotto con sotto (numeratore con numeratore e denominatore con denominatore):

$$= \frac{60}{7}$$

Quando ho un quoziente di frazioni algebriche, devo fare la stessa cosa:

- Riscrivere la prima frazione moltiplicata per l'inverso della seconda e poi procedere come per il prodotto.
- Scomporre i numeratori ed i denominatori.
- Eliminare i termini uguali che si trovino sia al numeratore che al denominatore.
- Moltiplicare numeratore con numeratore e denominatore con denominatore.

Esempio:

Eeguire la seguente divisione:

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 - 4} : \frac{2a^2 - 2a}{2a + 4} =$$

- Moltiplico la prima frazione per l'inverso della seconda:

$$= \frac{a^2 - 1}{a^2 - 4} \cdot \frac{2a + 4}{2a^2 - 2a} =$$

- Scompongo numeratori e denominatori

- $a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1)$
 - $a^2 - 4 = (a - 2) \cdot (a + 2)$
 - $2a + 4 = 2 \cdot (a + 2)$
 - $2a^2 - 2a = 2a \cdot (a - 1)$
- $$= \frac{(a - 1) \cdot (a + 1)}{(a - 2) \cdot (a + 2)} \cdot \frac{2 \cdot (a + 2)}{2a \cdot (a - 1)} =$$

- Elimino $(a - 1)$, $(a + 2)$ ed il 2 che si trovano contemporaneamente al numeratore ed al denominatore; resta:

$$= \frac{a + 1}{a - 2} \cdot \frac{1}{a} =$$

- Moltiplico numeratore con numeratore e denominatore con denominatore:

$$= \frac{1 \cdot (a + 1)}{a \cdot (a - 2)} = \frac{a + 1}{a^2 - 2a}$$

6. Elevamento a potenza di frazioni algebriche

Ripassiamo l'operazione di elevamento a potenza per frazioni numeriche e poi facciamo l'equivalente con i polinomi

se ad esempio ho:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 =$$

Devo fare la potenza sia al numeratore che al denominatore:

$$= \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

Quando ho una potenza di frazioni algebriche devo fare la stessa cosa:
Elevare a potenza sia il numeratore che il denominatore

Esempio:

Calcolare la seguente potenza:

$$\left[\frac{(x+2)^2}{(x^2-9)} \right]^2 =$$

$$= \frac{(x+2)^4}{(x^2-9)^2} =$$

$$= \frac{(x+2)^4}{(x+3)^2 \cdot (x-3)^2} =$$

Se si vuole ora si possono calcolare i prodotti notevoli ma di solito e' preferibile non farlo

7. Espressioni con le frazioni algebriche

Le espressioni sono il banco di prova delle nozioni che hai sin qui apprese: se riesci a risolverne esattamente almeno due su tre la tua preparazione e' sufficiente.

Per risolverle occorre tenere presenti alcune semplici regole: quando si rovescia una frazione occorre rovesciare sempre a livello del simbolo vicino (+ - : =)

Ad esempio, se ho:

$$\frac{3}{\frac{4}{5}} =$$

Devo fare:

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{15}{4}$$

Mentre se ho:

$$\frac{\frac{3}{4}}{5} =$$

Devo fare:

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

Altra regola da tener presente e' che per contenere le espressioni nella pagina si puo' sostituire il segno diviso (:) con una linea di frazione cioe' invece di:

$$\left[\frac{x}{x+3} + \frac{x^2+4x+4}{(x+3)^2} \right] : \left[\frac{2x}{x+2} + \frac{x^2-9}{x^2+4x+4} \right] =$$

Posso scrivere:

$$= \frac{\frac{x}{x+3} + \frac{x^2+4x+4}{(x+3)^2}}{\frac{2x}{x+2} + \frac{x^2-9}{x^2+4x+4}}$$

Se ne hai bisogno, proviamo a fare insieme alcuni esercizi di espressioni con le frazioni algebriche. Prima di iniziare ti devo dare alcuni consigli pratici:

- usa un foglio abbastanza grande da contenere tutta l'espressione ed una penna che scriva bene
- non aver fretta e cerca di scrivere con piu' precisione possibile

- trascrivi con attenzione il testo e poi controllalo: il 50% degli errori e' dovuto ad un'errata trascrizione del testo
- prima di metterti a scrivere il passaggio successivo controlla mentalmente quali sono le operazioni che farai su tutti i termini in quel passaggio
le seguenti espressioni sono in ordine di difficolta': prova a risolverle da solo
se pero' vedi che il risultato e' diverso da quello indicato controllane la soluzione e cerca di capire cosa hai sbagliato:

1) $\frac{\frac{y}{x^3 - y^3} + \frac{1}{x^2 + xy + y^2}}{\frac{y^3}{x^4 - xy^3}} =$ **Svolgimento:**

Scompongo ove possibile:

$$= \frac{\frac{y}{(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)} + \frac{1}{x^2 + xy + y^2}}{\frac{y^3}{x \cdot (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)}} =$$

Faccio la somma fra le due frazioni al numeratore:

$$= \frac{\frac{x}{(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)}}{\frac{y^3}{x \cdot (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)}} =$$

Moltiplico il numeratore per l'inverso del denominatore:

$$= \frac{x}{(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)} \cdot \frac{x \cdot (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)}{y^3} =$$

Semplifico:

$$= \frac{x^2}{y^3}$$

2) $\left(\frac{4}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1}\right) : \left(x - \frac{2}{x + 1}\right) =$ **Svolgimento:**

Scompongo i denominatori:

$$= \left[\frac{4}{(x - 1) \cdot (x + 1)} + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1}\right] : \left(x - \frac{2}{x + 1}\right) =$$

Faccio il minimo comune multiplo e sommo dentro parentesi:

$$= \frac{2x + 4}{(x - 1) \cdot (x + 1)} : \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} =$$

Moltiplico la prima frazione per l'inverso della seconda:

$$= \frac{2x + 4}{(x - 1) \cdot (x + 1)} \cdot \frac{x + 1}{x^2 + x - 2} =$$

Scompongo ove possibile:

$$= \frac{2(x + 2)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} \cdot \frac{x + 1}{(x + 2) \cdot (x - 1)} =$$

Semplifico i fattori uguali:

$$= \frac{2}{(x - 1)^2}$$

3) $\frac{\frac{x - 1}{3x + 3} + x \cdot \frac{\frac{x}{3} + \frac{2x + 1}{3x}}{x^2 - 1}}{(x + 2)^2 - 2(2x - 1) - 5} =$ **Svolgimento:**

Esegui i calcoli al numeratore della frazione in basso:

$$= \frac{\frac{x - 1}{3x + 3} + x \cdot \frac{\frac{x}{3} + \frac{2x + 1}{3x}}{x^2 - 1}}{\frac{x^2 + 1}{x - 1}} =$$

Sommo le due frazioni al numeratore:

$$= \frac{\frac{x-1}{3x+3} + x \cdot \frac{x^2+2x+1}{3x}}{\frac{x^2+1}{x-1}} =$$

Moltiplico dopo la x il numeratore per l'inverso del denominatore:

$$= \frac{\frac{x-1}{3x+3} + x \cdot \frac{x^2+2x+1}{3x} \cdot \frac{1}{x^2-1}}{\frac{x^2+1}{x-1}} =$$

Eseguo le moltiplicazioni:

$$= \frac{\frac{x-1}{3x+3} + \frac{x^3+2x^2+x}{3x \cdot (x^2-1)}}{\frac{x^2+1}{x-1}} =$$

Scompongo i denominatori delle frazioni sopra:

$$= \frac{\frac{x-1}{3(x+1)} + \frac{x^3+2x^2+x}{3x \cdot (x-1) \cdot (x+1)}}{\frac{x^2+1}{x-1}} =$$

Faccio il minimo comune multiplo fra le due frazioni al numeratore:

$$= \frac{\frac{x \cdot (x-1)^2 + x^3 + 2x^2 + x}{3x \cdot (x-1) \cdot (x+1)}}{\frac{x^2+1}{x-1}} =$$

Eseguo le operazioni e sommo i termini simili:

$$= \frac{\frac{2x^3+2x}{3x \cdot (x-1) \cdot (x+1)}}{\frac{x^2+1}{x-1}} =$$

Moltiplico il numeratore per l'inverso del denominatore :

$$= \frac{2x^3+2x}{3x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} \cdot \frac{x-1}{x^2+1} =$$

Scompongo ove possibile:

$$= \frac{2x \cdot (x^2+1)}{3x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} \cdot \frac{x-1}{x^2+1} =$$

Semplifico i fattori uguali sopra e sotto:

$$= \frac{2}{3 \cdot (x+1)}$$

F. *Equazioni ad una incognita*

1. Perche' le equazioni

L'uomo ha sempre costruito macchine per poter far fare ad esse il lavoro che lui avrebbe preferito non fare, ma il lavoro non e' solo fisico, esiste anche il lavoro mentale e le equazioni sono proprio una macchina che ci permette di fare un certo tipo di lavoro mentale senza troppo sforzo; diceva una Professoressa di Matematica di mio figlio: "Le equazioni sono state fatte per chi non sa fare i conti."

Facendo il punto della situazione ora e' come se tu avessi studiato le parole di un vocabolario, perche' servano a qualcosa si devono mettere insieme per costruire le frasi di un linguaggio, le prime [frasi](#) che costruiremo saranno le equazioni; vedrai che una volta capito il nuovo linguaggio potrai risolvere velocemente e facilmente molti problemi che prima sembravano difficili tipo questo:
un mattone pesa un chilo piu' mezzo mattone, quanto pesa un mattone?

ragionando e' possibile arrivare alla soluzione ma ci vuole un certo sforzo mentale guarda invece com'e' facile utilizzando le equazioni. Ecco la soluzione:

Devo risolvere il problema:

Un mattone pesa un chilo piu' mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?

Quello che voglio trovare lo chiamo x

Peso di un mattone = x

poi metto il problema in un linguaggio piu' vicino a quello matematico:

Il peso di un mattone e' uguale ad un chilo piu' la meta' del peso di un mattone

Traduco:

Il peso di un mattone(x) e' uguale (=) ad un chilo (1) piu' (+) la meta' (1/2) del (·) peso di un mattone(x) scrivo:

$$x = 1 + \frac{1}{2} \cdot x$$

Risolvo come un'espressione; minimo comune multiplo 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{2 + x}{2}$$

Tolgo i denominatori (2° principio);

$$2x = 2 + x$$

Porto le x prima dell'uguale (1° principio):

$$2x - x = 2$$

$$x = 2$$

Peso di un mattone = x = 2

Un mattone pesa 2 chilogrammi

Spero ti sia reso conto che ho impostato il problema traducendolo termine a termine in linguaggio matematico e, una volta impostato ho potuto risolverlo in modo quasi automatico facendo ricorso ai due principi di equivalenza delle equazioni.

Sembra complicato, ma una volta capito il metodo vedrai che invece e' molto piu' facile che risolverlo mentalmente, specialmente quando avrai problemi molto piu' complicati

Vocabolario

Proviamo a risolvere un semplice problema:

Il triplo di un numero e' uguale al doppio del numero stesso aumentato di 4. Trovare il numero questo si puo' tradurre termine a termine in un'equazione:

Intanto il numero da trovare lo chiameremo x

Il triplo (3)

di (·)

un numero (x)

e' uguale (=)

al doppio (2)

del (·)

numero stesso (x)

aumentato (+)

di 4 (4)

l'equazione

$$3 \cdot x = 2 \cdot x + 4$$

e' la traduzione in equazione del problema precedente.

E' quindi possibile costruire una specie di vocabolario che ci permetta di tradurre un problema in "matematiche". Cominciamo a costruirlo con i dati che abbiamo e man mano che troveremo termini nuovi li aggiungeremo.

Come indicazione di sintassi occorre aggiungere che in matematica si legge prima l'operazione poi i due termini, cosi' se devo leggere:

$$3x - 2$$

leggero':

la differenza fra il triplo di un numero e 2

Vocabolario	
ente da trovare	x
di	$\cdot$
aumentato, sommato	$+$
differisce, diminuito	$-$
vale, e' uguale a	$=$
supera di 5	$= 5 +$
differisce di 5 da qualcosa	$= \text{qualcosa} - 5$
antecedente	$x - 1$
seguinte, successivo	$x + 1$
dividendo a per b ottengo come quoziente c e come resto d	$a = b \cdot c + d$ $\text{dividendo} = \text{divisore} \cdot \text{quoziente} + \text{resto}$
somma tra qualcosa e qualcos'altro	$\text{qualcosa} + \text{qualcos'altro}$
differenza tra qualcosa e qualcos'altro	$\text{qualcosa} - \text{qualcos'altro}$
dividere un numero in due parti	prima parte x seconda parte numero $- x$
il rapporto di due numeri e' a/b	primo numero ax secondo numero bx
somma di due numeri e' a	primo numero x secondo numero $a - x$

Iniziamo nelle pagine successive, tenendo presente il vocabolario, a risolvere alcuni problemi.

2. Equazioni di primo grado

a) Uguaglianze, identita', equazioni

Uguaglianze

In matematica una uguaglianza e' un uguale fra due enti.

Esempi possono essere:

$$1 + 1 = 2$$

$$125 + 250 = 375$$

$$AB + BC = AC$$

$$a + a + 3a + 2a = 2a + 5a$$

Regola importante: se un'uguaglianza e' vera si comporta come una bilancia a piatti: quello che c'e' su un piatto deve variare come quello che c'e' sull'altro piatto altrimenti la bilancia non e' piu' in equilibrio e l'uguaglianza non e' piu' valida

Tra le varie uguaglianze poi possiamo considerare alcune uguaglianze particolari:

- le identita'
- le equazioni

Identita'

Un'*identita'* e' una uguaglianza in cui compaiono delle lettere e deve succedere che per qualunque valore noi possiamo mettere al posto delle lettere l'uguaglianza deve restare valida.

Esempio:

$$a + a = 2a$$

e' un'identita'; infatti prova a sostituire al posto di a qualunque valore, il primo termine restera' sempre uguale al secondo.

Sostituisco 3:

$$3 + 3 = 2 \cdot 3$$

$$3 + 3 = 6$$

Sostituisco 1234:

$$1234 + 1234 = 2 \cdot 1234$$

$$1234 + 1234 = 2468$$

e questo va bene per ogni valore.

Nota: quando una regola e' detta valida per tutti i valori per dimostrare che non e' valida basta far vedere che esiste un valore per cui non vale.

La seguente ad esempio non e' un'identita':

$$\frac{2a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$$

perche' al posto di b non posso sostituire il valore 0:

Esempio che mostra l'impossibilita' di dividere per zero

Pongo:

$$a = 1$$

$$b = 1$$

Per questi valori di a e b considero un'uguaglianza del tipo

$$a = b$$

che e' vera, infatti sostituendo:

$$1 = 1$$

moltiplico per a sia prima che dopo l'uguale:

$$a^2 = ab$$

tolgo da entrambe le parti b^2

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

scompongo:

$$(a + b) \cdot (a - b) = b \cdot (a - b)$$

Tolgo $(a - b)$ da entrambe le parti:

$$a + b = b$$

sostituisco i numeri iniziali:

$$1 + 1 = 1$$

evidentemente abbiamo fatto un errore:

quando abbiamo tolto da entrambe le parti $(a - b)$ in pratica abbiamo diviso entrambe i membri per $(a - b)$ e $(a - b) = 0$ cioe' abbiamo diviso per zero ed abbiamo ottenuto $2 = 1$ risultato assurdo: In matematica non si puo' mai *dividere per zero*.

Equazioni

Si chiama *equazione* di primo grado un'uguaglianza che puo' diventare vera sostituendo alla lettera (incognita) un valore particolare detto *soluzione*.

Esempio:

Scrivo:

$$3x - 6 = 0$$

se al posto di x metto il valore 2, l'uguaglianza diventa vera:

$$3 \cdot 2 - 6 = 0$$

$$6 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

mentre, se metto altri numeri, non e' vera.

Allora quando avremo un problema, per trovare il valore di un dato che non conosciamo, bastera' impostarne l'equazione relativa e risolverla: il valore che mi risolve l'equazione sara' il valore del dato che cerchiamo

Abbiamo detto che le equazioni sono le frasi della matematica: l'equazione precedente dice che devo trovare il numero (e questo vuol dire considerare la x) tale che se dal triplo del numero ($3x$) tolgo ($-$) sei (6) ottengo ($=$) zero (0). Comunque del linguaggio delle equazioni parleremo piu' ampiamente nei **problemi**.

b) Primo principio di equivalenza

I componenti della macchina "equazione" sono due: il primo ed il secondo principio di equivalenza: sono fondamentali e devono essere assolutamente ben capiti.

Il *primo principio di equivalenza delle equazioni* dice che:

Aggiungendo o sottraendo ad entrambe i membri di un'equazione una stessa quantita' l'equazione resta equivalente alla data.

Per membro di un'equazione si intende tutto cio' che c'e' prima dell'uguale (*primo membro*) e tutto cio' che c'e' dopo l'uguale (*secondo membro*).

Esempio:

$$3x - 6 = 0$$

aggiungo $+6$ da entrambe le parti.

Intendiamoci: potrei aggiungere o togliere qualunque numero ma io aggiungo il numero (col segno cambiato cosi' va via) che c'e' vicino al termine con la x per rendere l'equazione piu' semplice.

Ottengo:

$$3x - 6 + 6 = 0 + 6$$

$$3x = 6$$

Equivale a dire: in un'equazione posso trasportare da un membro all'altro cambiando di segno il termine trasportato.

Attenzione! L'equazione resta equivalente alla data, non significa che l'equazione resta la stessa, ma significa che ha la stessa soluzione; infatti:

$3x - 6 = 0$ significa : **togliendo 6 dal triplo di un numero ottengo 0**

mentre $3x = 6$ significa **il triplo di un numero vale 6**.

Le due equazioni sono diverse come sono diverse le due frasi, ma entrambe le equazioni hanno la stessa soluzione (in questo caso 2).

Poiche' il primo principio e' scomodo da usare quando abbiamo tanti termini e poiche' bisogna, per risolvere un'equazione, avere i fattori con la x prima dell'uguale e quelli senza la x dopo l'uguale, al posto del primo principio si puo' usare questa regola:

Posso trasportare un termine da una parte all'altra dell'uguale, ma chi salta l'uguale cambia di segno.

c) Secondo principio di equivalenza

Il *secondo principio di equivalenza delle equazioni* dice che:

Moltiplicando o dividendo entrambe i membri di un'equazione per una stessa quantita' diversa da zero l'equazione resta equivalente alla data

Esempio:

$$3x = 6$$

divido da entrambe le parti per 3

Intendiamoci: potrei dividere per qualunque numero che non fosse zero ma io divido per il numero che c'e' davanti alla x per lasciare la x da sola e cosi' risolvere l'equazione.

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

Semplifico:

$$x = 2$$

e' la soluzione.

Il secondo principio sara' utilissimo da usare quando avremo delle equazioni con denominatori numerici. Infatti dopo aver fatto il minimo comune multiplo fra entrambe i membri potro' eliminare i denominatori (equivale a moltiplicare entrambe i membri dell'equazione per il minimo comune multiplo).

Ne ripareremo negli esercizi.

d) Soluzione di un'equazione di primo grado ad una incognita

Lavoriamo su un esempio; ho l'equazione:

$$2x - 4 = 8$$

che traduce in linguaggio matematico la frase "Sottraendo 4 dal doppio di un numero ottengo 8"

Per risolverla devo trasformarla in qualcosa del tipo:

$x =$ soluzione

quindi devo lasciare la x da sola prima dell'uguale cioe' devo togliere di mezzo tutti i termini che sono vicini alla x .

Il primo termine che **ammazzero'** (quando risolvo equazioni mi sento un po' killer con tutti i termini che devo eliminare!!! ;-)) sara' **-4** perche' quello meno legato alla x e per farlo usero' **il primo principio di equivalenza**; aggiungo da entrambe le parti **+4** per eliminare il **-4** equivale a trasportare dall'altra parte cambiando di segno:

$$2x - 4 + 4 = 8 + 4$$

$$2x = 12$$

Ora devo eliminare il **2** e per eliminare qualcosa in matematica basta fare l'operazione contraria. Il **2** moltiplica la **x**, quindi per eliminarlo devo dividere per **2** sia prima che dopo l'uguale (**secondo principio di equivalenza**):

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$$

Semplifico:

x = 6 e' la soluzione.

Come hai visto risolvere un'equazione e' un'operazione meccanica che potrei anche affidare ad una macchina, basta applicare prima il primo principio poi il secondo principio di equivalenza.

E' possibile vedere se hai risolto giustamente un'equazione: infatti per definizione un'equazione e' un'uguaglianza verificata se al posto di **x** metto la soluzione quindi posso fare la verifica sostituendo nell'equazione di partenza il valore **6** al posto di **x**.

Verifica:

$$2x - 4 = 8$$

$$2 \cdot 6 - 4 = 8$$

$$12 - 4 = 8$$

$$8 = 8$$

L'uguaglianza e' vera quindi ho risolto giustamente l'equazione.

La verifica delle equazioni di solito si fa solo per equazioni semplici e non per quelle troppo complicate, altrimenti si aggiungerebbe un esercizio di calcolo di un'espressione al calcolo di un'equazione. Comunque vedremo che la verifica sara' importante per alcune categorie di equazioni quali le letterali e le fratte.

Ora ti consiglio di eseguire alcuni esercizi sia per fissare meglio i concetti appresi che per vedere quali sono i tipi di equazione possibili. Ti vengono qui forniti alcuni esercizi in ordine di difficolta'; prova a risolverli da solo e fai la verifica per vedere se hai trovato la soluzione giusta; se hai delle difficolta' controlla lo svolgimento (risoluzione).

Al solito io faro' tutti i passaggi, ma ricorda che, se possibile, si cerca di abbreviare.

1) **16x - 14 = 14x - 10** Ecco la soluzione:

Devo ridurre l'equazione alla forma **x = soluzione** quindi dovrei applicare il primo principio sia ai numeri per portarli al secondo membro che alle x per portarle al primo membro; e' scomodo quindi usiamo questa regola equivalente al primo principio:

Posso trasportare dal primo al secondo membro e viceversa ma chi salta l'uguale cambia di segno

Trasporto:

-14 dopo l'uguale e diventa **+14**

14x prima dell'uguale e diventa **-14x**

$$16x - 14x = 14 - 10$$

$$2x = 4$$

Applico il secondo principio dividendo per 2 entrambe i membri (cosi' la x resta sola):

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

Semplifico:

x = 2 e' la soluzione.

Verifica:

Sostituisco ad x il valore 2 nell'equazione di partenza:

$$16x - 14 = 14x - 10$$

$$16 \cdot 2 - 14 = 14 \cdot 2 - 10$$

$$32 - 14 = 28 - 10$$

$$18 = 18$$

Uguaglianza valida quindi ho risolto giustamente l'equazione.

2) $2(8x - 7) = 5(3x - 2)$ Ecco la soluzione:

Prima di applicare i principi devo eseguire le operazioni indicate: multiplico

$$16x - 14 = 15x - 10$$

Trasporto:

-14 dopo l'uguale e diventa +14

15x prima dell'uguale e diventa -15x

$$16x - 15x = 14 - 10$$

$x = 4$ e' la soluzione.

Verifica:

Sostituisco ad x il valore 4 nell'equazione di partenza:

$$2(8x - 7) = 5(3x - 2)$$

$$2(8 \cdot 4 - 7) = 5(3 \cdot 4 - 2)$$

$$2(32 - 7) = 5(12 - 2)$$

$$2 \cdot 25 = 5 \cdot 10$$

$$50 = 50$$

Uguaglianza valida quindi ho risolto giustamente l'equazione.

3) $(x + 2)(x - 1) + 2x = 5 - x(4 - x)$ Ecco la soluzione:

Prima di applicare i principi devo eseguire le operazioni indicate: multiplico

$$x^2 - x + 2x - 2 + 2x = 5 - 4x + x^2$$

Ora posso scegliere se sommare i termini simili prima di applicare il primo principio oppure prima applicare il primo principio e poi sommare i termini simili. Io preferisco seguire il secondo metodo che mi permette di risparmiare un passaggio. Allora sposto i termini con la x tutti al primo membro e quelli senza la x al secondo membro e chi salta l'uguale cambia di segno

$$x^2 - x^2 - x + 2x + 2x + 4x = 5 + 2$$

Come c'era da aspettarsi le x^2 si eliminano fra loro (ricordiamo che stiamo facendo le equazioni di primo grado, con la x a potenza 1) quindi le x^2 devono sempre sparire

sommo i termini simili:

$$-x + 2x + 2x + 4x = 5 + 2$$

$$7x = 7$$

Applico il secondo principio: divido per 7 da entrambe le parti per lasciare la x da sola:

$$\frac{7x}{7} = \frac{7}{7}$$

Semplifico:

$x = 1$ e' la soluzione.

Verifica:

Sostituisco ad x il valore 1 nell'equazione di partenza

$$x^2 - x + 2x - 2 + 2x = 5 - 4x + x^2$$

$$1^2 - 1 + 2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 1 = 5 - 4 \cdot 1 + 1^2$$

$$1 - 1 + 2 - 2 + 2 = 5 - 4 + 1$$

$$2 = 2$$

Uguaglianza valida quindi ho risolto giustamente l'equazione.

4) $(x - 1)^2 + 2x + 3(x - 1) = (x + 2)^2$ Ecco la soluzione:

prima devo risolvere le operazioni indicate:

$$x^2 - 2x + 1 + 2x + 3x - 3 = x^2 + 4x + 4$$

Trasporto i fattori attraverso l'uguale, le x prima e i termini senza le x dopo; chi salta l'uguale cambia di segno come regola semplice possiamo dire che termini uguali da parti opposte dell'uguale si possono togliere, infatti trasportando uno dei termini dall'altra parte diventa uguale e di segno opposto all'altro, quindi va via

$$x^2 - x^2 - 2x + 2x + 3x - 4x = 3 - 1 + 4$$

Sommo i termini simili; al solito le x^2 devono sparire essendo questa un'equazione di primo grado

$$-x = 6$$

-x significa -1x; a me serve invece +1x cioe' x quindi divido da entrambe le parti per -1

Anche qui possiamo semplificare dicendo che posso cambiare di segno tutti i termini dell'equazione:

$$\frac{-x}{-1} = \frac{6}{-1}$$

Otengo:

$$x = -6$$

e' la soluzione.

Verifica:

Sostituisco ad x il valore -6 nell'equazione di partenza

$$(x - 1)^2 + 2x + 3(x - 1) = (x + 2)^2$$

$$(-6 - 1)^2 + 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-6 - 1) = (-6 + 2)^2$$

$$(-7)^2 - 12 + 3 \cdot (-7) = (-4)^2$$

$$49 - 12 - 21 = 16$$

$$16 = 16$$

Uguaglianza valida quindi ho risolto giustamente l'equazione.

$$5) \quad \frac{x-1}{2} + \frac{2x+1}{10} = 2x-2 + \frac{1-3x}{5} = \quad \text{Ecco la soluzione:}$$

Per renderla piu' comprensibile la scrivo cosi':

$$= \frac{x-1}{2} + \frac{2x+1}{10} = \frac{2x-2}{1} + \frac{1-3x}{5} =$$

Prima devo risolvere come fosse un'espressione quindi faccio il minimo comune multiplo che e' 10:

$$= \frac{5(x-1) + 2x+1}{10} = \frac{10(2x-2) + 2(1-3x)}{10} =$$

Per il secondo principio posso eliminare i denominatori: sarebbe come moltiplicare entrambe i membri per 10:

$$5(x-1) + 2x+1 = 10(2x-2) + 2(1-3x)$$

Eseguo le operazioni indicate:

$$5x - 5 + 2x + 1 = 20x - 20 + 2 - 6x$$

Trasporto i termini con le x prima dell'uguale e quelli senza dopo l'uguale e chi salta l'uguale cambia di segno:

$$5x + 2x - 20x + 6x = 5 - 1 - 20 + 2$$

Sommo i termini simili:

$$-7x = -14$$

Divido entrambe i membri per -7 per ricavare la x :

$$\frac{-7x}{-7} = \frac{-14}{-7}$$

Semplifico:

$$x = 2$$

e' la soluzione.

Verifica:

Sostituisco ad x il valore 2 nell'equazione di partenza:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x+1}{10} = 2x-2 + \frac{1-3x}{5}$$

$$\frac{2-1}{2} + \frac{2 \cdot 2 + 1}{10} = 2 \cdot 2 - 2 + \frac{1 - 3 \cdot 2}{5}$$

Eseguo le moltiplicazioni:

$$\frac{1}{2} + \frac{4+1}{10} = 4-2 + \frac{1-6}{5}$$

Eseguo le somme:

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{10} = 2 + \frac{-5}{5}$$

Semplifico le frazioni ove possibile:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 - 1$$

Sommo le frazioni e i numeri:

$$1 = 1$$

Uguaglianza valida quindi ho risolto giustamente l'equazione

$$6) \quad \frac{1}{2} + (x-1)^2 - \frac{(2x-1)^2}{3} = \frac{1}{3}(1-x^2) = \quad \text{Ecco la soluzione:}$$

Per renderla piu' comprensibile la scrivo cosi':

$$= \frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(2x-1)^2}{3} = \frac{1-x^2}{3} =$$

Sviluppo i quadrati:

$$= \frac{1}{2} + \frac{x^2 - 2x + 1}{1} - \frac{4x^2 - 4x + 1}{3} = \frac{1-x^2}{3} =$$

Prima devo risolvere come fosse un'espressione quindi faccio il minimo comune multiplo che e' 6:

$$= \frac{3 + 6(x^2 - 2x + 1) - 2(4x^2 - 4x + 1)}{6} = \frac{2(1 - x^2)}{6} =$$

Elimino i denominatori (secondo principio)

$$3 + 6(x^2 - 2x + 1) - 2(4x^2 - 4x + 1) = 2(1 - x^2)$$

eseguo le moltiplicazioni

$$3 + 6x^2 - 12x + 6 - 8x^2 + 8x - 2 = 2 - 2x^2$$

trasporto i termini con le x prima dell'uguale e quelli senza dopo l'uguale e chi salta l'uguale cambia di segno

$$6x^2 - 8x^2 + 2x^2 - 12x + 8x = -3 + 2 - 6 + 2$$

Sommo i termini simili; i termini con **x** di ordine **due** devono elidersi tra loro:

$$-4x = -5$$

Divido entrambe i membri per -4 per ricavare la x:

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{-5}{-4}$$

Semplifico

$$x = 5/4$$

e' la soluzione.

Verifica:

Sostituisco ad x il valore 5/4 nell'equazione di partenza:

$$\frac{1}{2} + (x - 1)^2 - \frac{(2x - 1)^2}{3} = \frac{1}{3}(1 - x^2) =$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 - \frac{\left(2 \cdot \frac{5}{4} - 1\right)^2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] =$$

Eseguo moltiplicazione e potenza dentro parentesi:

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 - \frac{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 - \frac{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{25}{16}\right) =$$

Sommo dentro parentesi:

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{9}{16}\right) =$$

Eseguo i quadrati:

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \frac{\frac{9}{4}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{9}{16}\right) =$$

Trasformo la divisione in moltiplicazione e scrivo correttamente la frazione:

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{9}{16}\right) =$$

Eseguo le moltiplicazioni:

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{16} =$$

Sommo: minimo comune multiplo 16:

$$= \frac{8 + 1 - 12}{16} = -\frac{3}{16} =$$

Eseguo i calcoli:

$$= -\frac{3}{16} = -\frac{3}{16}$$

Uguaglianza valida, quindi ho risolto correttamente l'equazione

Sarebbe possibile continuare aumentando la difficolta', ma penso che il saper risolvere queste equazioni meriti gia' un giudizio di sufficienza.

Se hai notato la parte nuova si riduce ai due principi di equivalenza mentre la difficolta' maggiore deriva dallo svolgimento delle equazioni come frazioni algebriche per ridurle a forma semplice

e) Equazione possibile, impossibile, indeterminata

Come in tutti i linguaggi anche nel linguaggio della matematica posso dire frasi vere, posso dire bugie e posso dire cose inutili: questo si riflette sulle equazioni relative a quelle frasi che potranno essere possibili, impossibili od indeterminate. Vediamo di spiegarci meglio con qualche esempio:

- equazione possibile
- equazione impossibile
- equazione indeterminata

Equazione possibile

e' l'equazione vera che afferma cioe' un fatto vero ed unico.

Sommando 4 ad un numero ottengo il doppio del numero stesso.

Con un po' di logica dico che il numero e' 4:

infatti $4 + 4 = 8$ e questo e' un fatto vero.

Se lo traduco in equazione ottengo:

$$x + 4 = 2x$$

e risolvendo:

$$x - 2x = -4$$

$$-x = -4$$

$$x = 4$$

Quando otteniamo la soluzione del tipo $x = \text{numero}$ diciamo che l'equazione e' possibile.

Equazione impossibile

e' l'equazione che afferma un fatto falso.

Sommando 3 ad un numero ottengo lo stesso numero

Pensandoci sopra non posso trovare nessun numero che resti uguale a se' stesso aggiungendovi 3, quindi la mia affermazione e' impossibile

se lo traduco in equazione ottengo:

$$x + 3 = x$$

e risolvendo:

$$x - x = -3$$

$$0 = -3$$

quando otteniamo zero uguale a un numero diciamo che l'equazione e' impossibile.

Equazione indeterminata

e' l'equazione che afferma un fatto vero ma che va bene per infiniti numeri (qualche testo la chiama anche identita').

Sommando 5 ad un numero ottengo lo stesso numero aumentato di 5,

E' un fatto vero ma che non mi individua il numero perche' e' vero per qualunque numero; se lo traduco in equazione ottengo:

$$x + 5 = x + 5$$

e risolvendo:

$$x - x = 5 - 5$$

$$0 = 0$$

Quando otteniamo zero uguale a zero diciamo che l'equazione e' indeterminata (oppure che e' un'identita').

Riassumendo:

gli esempi che hai visto sono elementari ma quando ho un'equazione complicata e' quasi impossibile dire senza risolverla se e' possibile, impossibile od indeterminata ed a questo posso risalire solo dalla soluzione:

- $x = \text{numero}$ Equazione possibile
- $0 = \text{numero}$ Equazione impossibile
- $0 = 0$ Equazione indeterminata

f) Equazioni letterali

Un'equazione si dice letterale quando oltre ai numeri ed alle incognite vi compaiono anche delle lettere.

Va fatta subito una convenzione:

useremo le ultime lettere minuscole dell'alfabeto per indicare le incognite: $x y z t u v w \dots$

useremo invece le prime lettere per indicare dei parametri, cioè dei simboli che possono essere sostituiti da numeri $a b c d e f g \dots$

Quando risolviamo un'equazione letterale occorre ricordare che la lettera occupa il posto di numeri e che per risolvere un'equazione devo tener presente che il secondo principio mi vieta di dividere per zero; quindi al posto della lettera non potrò sostituire quei numeri che mi rendono il denominatore zero, d'altra parte io devo trovare tutte le soluzioni di un'equazione. Vediamolo meglio su un semplice esempio:

Sia da risolvere l'equazione:

$$ax = 3$$

Per risolverla dovrei applicare il secondo principio, ma esso è applicabile solo se $a \neq 0$ allora distinguo i due casi:

- $a \neq 0$ posso applicare il secondo principio quindi:

$$\frac{ax}{a} = \frac{3}{a}$$

e semplificando:

$$x = \frac{3}{a}$$

- $a = 0$ non posso applicare il secondo principio, ma sostituendo ad a il suo valore l'equazione mi diventa

$$0 \cdot x = 3$$

$$0 = 3 \text{ equazione impossibile.}$$

Raccogliendo i risultati:

$$\text{se } a \neq 0 \quad x = 3/a;$$

$$\text{se } a = 0 \quad \text{equazione impossibile}$$

Riassumendo: per risolvere un'equazione letterale occorre porre diversi da zero i termini che applicando il secondo principio compariranno al denominatore. Inoltre bisognerà discutere l'equazione quando quei termini avranno valore uguale a zero (devi sostituire tale valore al posto delle lettere). L'equazione che ne verrà fuori sarà o impossibile o indeterminata.

Fai attenzione perché è possibile rendere gli esercizi difficili a piacere, basta aumentare il numero delle lettere, inoltre questi esercizi sono considerati utili da molti docenti perché ti costringono a ragionare in modo analitico considerando tutte le possibilità.

Risolviamo ora assieme alcuni esercizi. Ti vengono forniti alcuni esercizi graduati per difficoltà, prova a risolverli da solo poi vai a vedere la soluzione e, se ne hai bisogno, lo svolgimento.

1) $ax + 1 = a + 1$ Soluzione:

devo lasciare i termini con la x prima dell'uguale e quelli senza dopo l'uguale. Chi salta l'uguale cambia di segno

$$ax = a + 1 - 1$$

$$ax = a$$

Ora dovrei applicare il secondo principio dividendo entrambe i termini per a ma posso farlo solo se a è diverso da zero mentre se a è uguale a zero avrò un'equazione o impossibile o indeterminata:

distinguo i due casi

se $a \neq 0$ posso dividere:

$$\frac{ax}{a} = \frac{a}{a}$$

Semplifico

$$x = 1$$

L'altra possibilità:

se $a = 0$ sostituisco zero invece di applicare il secondo principio:

$$0 \cdot x = 0$$

$0 = 0$ equazione indeterminata.

Raccogliendo i risultati:

$$\text{se } a \neq 0 \quad x = 1$$

se $a = 0$ equazione indeterminata

2) $ax + 1 = b$ Soluzione:

devo lasciare i termini con la x prima dell'uguale e quelli senza dopo l'uguale. Chi salta l'uguale cambia di segno

$$ax = b - 1$$

Ora dovrei applicare il secondo principio dividendo entrambe i termini per a ma posso farlo solo se a è diverso da zero mentre se a è uguale a zero avrò un'equazione o impossibile o indeterminata:

distinguo i due casi:

se $a \neq 0$ posso dividere:

$$\frac{ax}{a} = \frac{b-1}{a}$$

Semplifico:

$$x = \frac{b-1}{a}$$

L'altra possibilità:

se $a = 0$ sostituisco zero nell'equazione invece di applicare il secondo principio:

$$0 \cdot x = b - 1$$

Ora devo vedere che valori posso dare a b:

$$\text{se } b - 1 = 0$$

equivale a dire $b = 1$

L'equazione diventa:

$$0 \cdot x = 1 - 1$$

$0 = 0$ equazione indeterminata.

Invece se $b - 1 \neq 0$

equivale a dire $b \neq 1$

L'equazione diventa

$$0 \cdot x = b - 1$$

$$0 = b - 1$$

$0 = \text{numero}$ equazione impossibile.

Raccogliendo i risultati:

$$\text{se } a \neq 0 \quad x = (b-1)/a$$

se $a = 0$ e $b = 1$ equazione indeterminata

se $a = 0$ e $b \neq 1$ equazione impossibile

3) $a^2x - x = 3$ Soluzione:

Devo esplicitare la x

$$x(a^2 - 1) = 3$$

Dovrei applicare il secondo principio dividendo entrambe i termini per $a^2 - 1$ ma posso farlo solo se il termine è diverso da zero.

Distinguo i due casi:

se $a^2 - 1 \neq 0$ (equivale a dire $a \neq \pm 1$)

posso dividere:

$$\frac{x(a^2 - 1)}{a^2 - 1} = \frac{3}{a^2 - 1}$$

Semplifico:

$$x = \frac{3}{a^2 - 1}$$

Ho altre due possibilita' $a = +1$ oppure $a = -1$;

la prima:

se $a = 1$ sostituisco 1 invece di applicare il secondo principio:

$$x \cdot (1^2 - 1) = 3$$

$$x \cdot 0 = 3$$

$0 = 3$ equazione impossibile;

la seconda:

se $a = -1$ sostituisco -1 invece di applicare il secondo principio

$$x \cdot [(-1)^2 - 1] = 3$$

$$x \cdot (1 - 1) = 3$$

$$x \cdot 0 = 3$$

$0 = 3$ equazione impossibile.

Raccogliendo i risultati:

se $a \neq \pm 1$ $x = 3/(a^2 - 1)$

se $a = \pm 1$ equazione impossibile

4) $a^2x - x = b$ Soluzione:

E' simile alla precedente, variera' nella discussione perche' b potrebbe assumere anche valore zero facendo diventare l'equazione indeterminata.

Devo esplicitare la x

$$x(a^2 - 1) = b$$

Dovrei applicare il secondo principio dividendo entrambe i termini per $a^2 - 1$ ma posso farlo solo se il termine e' diverso da zero.

Distinguo i due casi

se $a^2 - 1 \neq 0$ (equivale a dire $a \neq \pm 1$)

Posso dividere:

$$\frac{x(a^2 - 1)}{a^2 - 1} = \frac{b}{a^2 - 1}$$

Semplifico:

$$x = \frac{b}{a^2 - 1}$$

Ho altre due possibilita' $a = +1$ oppure $a = -1$;

- la prima:

se $a = 1$ sostituisco 1 invece di applicare il secondo principio

$$x \cdot (1^2 - 1) = b$$

$$x \cdot 0 = b$$

$0 = b$ qui devo distinguere due sottocasi:

se $b = 0$ $0 = 0$ equazione indeterminata

se $b \neq 0$ $0 = \text{numero}$ equazione impossibile

- la seconda:

se $a = -1$ sostituisco -1 invece di applicare il secondo principio

$$x \cdot [(-1)^2 - 1] = b$$

$$x \cdot 0 = b$$

$0 = b$ anche qui devo distinguere due sottocasi:

se $b = 0$ $0 = 0$ equazione indeterminata

se $b \neq 0$ $0 = \text{numero}$ equazione impossibile.

Raccogliendo i risultati:

se $a \neq \pm 1$ $x = b/(a^2 - 1)$

se $a = \pm 1$ e $b = 0$ equazione indeterminata

se $a = \pm 1$ e $b \neq 0$ equazione impossibile

5) $a^2x + b = ab + x$ Soluzione:

Devo lasciare i termini con la x prima dell'uguale e quelli senza dopo l'uguale. Chi salta l'uguale cambia di segno:

$$a^2x - x = ab - b$$

Metto in evidenza la x al primo membro e la b al secondo:

$$x(a^2 - 1) = b(a - 1)$$

notando che $a - 1$ e' un fattore di $a^2 - 1$ scompongo in fattori:

$$x(a + 1)(a - 1) = b(a - 1)$$

Dovrei applicare il secondo principio dividendo entrambe i termini per $(a + 1)(a - 1)$ ma posso farlo solo se questo termine e' diverso da zero.

Distinguo i due casi:

$$\text{se } (a + 1)(a - 1) \neq 0$$

equivale a dire $a \neq 1$ e $a \neq -1$

Posso dividere:

$$\frac{x(a + 1)(a - 1)}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{b(a - 1)}{(a + 1)(a - 1)}$$

Semplifico:

$$x = \frac{b}{a + 1}$$

Ho altre due possibilita' $a = +1$ oppure $a = -1$;

- la prima:

$\text{se } a = 1$ sostituisco 1 invece di applicare il secondo principio

$$x(1 + 1)(1 - 1) = b(1 - 1)$$

$0 = 0$ equazione indeterminata.

- la seconda:

$\text{se } a = -1$ sostituisco -1 invece di applicare il secondo principio

$$x(-1 + 1)(-1 - 1) = b(-1 - 1)$$

$0 = -2b$ ho due sottocasi

- $\text{se } b = 0$ $0 = 0$ equazione indeterminata
- $\text{se } b \neq 0$ $0 = \text{numero}$ equazione impossibile.

Raccogliendo i risultati:

$$\text{se } a \neq \pm 1 \quad x = b/(a + 1)$$

$\text{se } a = 1$ equazione indeterminata

$\text{se } a = -1$ e $b = 0$ equazione indeterminata

$\text{se } a = -1$ e $b \neq 0$ equazione impossibile

6) $(x + 2a)^2 + a^2 = (x - a)^2 - (a - b)(a + b)$ Soluzione:

eseguo i prodotti notevoli

$$x^2 + 4ax + 4a^2 + a^2 = x^2 - 2ax + a^2 - (a^2 - b^2)$$

$$x^2 + 4ax + 4a^2 + a^2 = x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + b^2$$

Sposto i termini con la x prima dell'uguale e quelli senza dopo l'uguale e chi salta l'uguale cambia di segno (potrei prima sommare i termini simili ma preferisco fare in questo modo perche' cosi' posso risparmiare un passaggio)

$$x^2 + 4ax - x^2 + 2ax = a^2 - a^2 + b^2 - 4a^2 - a^2$$

sommo i termini simili

$$6ax = b^2 - 5a^2$$

Ora dovrei applicare il secondo principio dividendo entrambe i termini per $6a$ ma posso farlo solo se a e' diverso da zero mentre se a e' uguale a zero avro' un'equazione o impossibile o indeterminata:

distinguo i due casi:

- $\text{se } a \neq 0$ posso dividere:

$$\frac{6ax}{6a} = \frac{b^2 - 5a^2}{6a}$$

Semplifico:

$$x = \frac{b^2 - 5a^2}{6a}$$

- $\text{se } a = 0$ sostituisco zero invece di applicare il secondo principio:

$$6 \cdot 0 \cdot x = b^2 - 5 \cdot 0^2$$

$$0 = b^2$$

devo distinguere due sottocasi:

- $\text{se } b = 0$ $0 = 0^2$ $0 = 0$ equazione indeterminata
- $\text{se } b \neq 0$ $0 = \text{numero}$ equazione impossibile.

Raccogliendo i risultati:

se $a \neq 0$ $x = (b^2 - 5a^2)/6a$

se $a = 0$ e $b = 0$ equazione indeterminata

se $a = 0$ e $b \neq 0$ equazione impossibile

$$7) \frac{x-2}{a-3} - \frac{x+1}{2} = 1 - \frac{x+2a}{2a-6} \quad \text{Soluzione:}$$

Come prima cosa impongo che sia (C.R. condizioni di realta')

$2a - 6 \neq 0$ cioè $a \neq 3$

Perche' per questo valore l'equazione **perde di significato**.

Attenzione e' diverso dire che un'equazione e' impossibile o che un'equazione perde di significato:

- Un'equazione e' impossibile se dice una bugia: esempio "Due e' uguale a tre piu' tre" oppure "Attila era un uomo di pace"
- un'equazione perde di significato se la frase non ha significato: esempio "Con le fragole del pianoforte si fanno le matite a mezzo servizio" oppure "Due piu' supera elevato 7 meno per 52".

Se un termine di un'equazione e' diviso per zero l'equazione non e' semplicemente falsa ma non ha nessun significato

Devo risolvere come un'espressione, prima scompongo i denominatori:

$$\frac{x-2}{a-3} - \frac{x+1}{2} = 1 - \frac{x+2a}{2(a-3)}$$

Il minimo comune multiplo e':

$2(a-3)$

Riduco allo stesso denominatore (diminuisco il carattere per non dover andare a capo):

$$\frac{2(x-2) - (x+1)(a-3)}{2(a-3)} = \frac{2(a-3) - (x+2a)}{2(a-3)}$$

Elimino i denominatori (posso farlo per le condizioni di realta' C.R.)

$$2(x-2) - (x+1)(a-3) = 2(a-3) - (x+2a)$$

Eseguo le moltiplicazioni (io faccio tutti i passaggi, tu puoi abbreviare)

$$2x - 4 - (ax - 3x + a - 3) = 2a - 6 - x - 2a$$

$$2x - 4 - ax + 3x - a + 3 = 2a - 6 - x - 2a$$

Termini con la x prima e quelli senza dopo l'uguale, chi salta l'uguale cambia di segno

$$2x - ax + 3x + x = 2a - 6 - 2a + 4 + a - 3$$

$$6x - ax = a - 5$$

$$x(6-a) = a-5$$

Ora dovrei applicare il secondo principio dividendo entrambe i termini per (6-a) ma posso farlo solo se (6-a) e' diverso da zero mentre se e' uguale a zero avro' un'equazione o impossibile o indeterminata:

Distinguo i due casi:

- se $6-a \neq 0$ (equivale a dire $a \neq 6$)

Posso dividere:

$$\frac{x(6-a)}{6-a} = \frac{a-5}{6-a}$$

Semplifico:

$$x = \frac{a-5}{6-a}$$

- L'altra possibilita'

se $a = 6$ sostituisco sei invece di applicare il secondo principio

$$x(6-6) = 6-5$$

$$0 = 1 \text{ equazione impossibile.}$$

Raccogliendo i risultati:

se $a = 3$ l'equazione perde di significato

se $a \neq 3$ e $a \neq 6$ $x = (a-5)/(6-a)$

se $a \neq 3$ e $a = 6$ equazione impossibile

g) Equazioni fratte

Un'equazione si dice fratta quando la x compare sotto il segno di frazione.

Al solito, tenendo conto del secondo principio quando faro' il m. c. m. dovrò dire che l'equazione non e' valida per il valore della x che annulla il minimo comune multiplo.

Questa si chiama anche Condizione di Realta' (abbreviata in C.R.)

Dopo aver risolto l'equazione dovro' controllare il valore della x:

1. se il valore della x non e' quello che annullava il minimo comune multiplo la soluzione e' accettabile
2. se il valore trovato e' uguale a quello che annullava il minimo comune multiplo allora dovro' dire che la soluzione non e' accettabile. Vediamo un esempio per tipo:

$$1) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{x-2}$$

$$\text{m.c.m.} = 2(x-2) \neq 0$$

cioe'

Condizione di Realta' (C.R.) $x \neq 2$

$$\frac{x-2}{x-2} = \frac{2}{2}$$

$$2(x-2) = 2(x-2)$$

per il secondo principio tolgo i denominatori (posso farlo perche' ho supposto il m.c.m. diverso da zero)

$$x-2 = 2$$

$$x = 4 \quad \text{accettabile}$$

$$2) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{x-2} = \frac{-1}{x-2}$$

$$\text{m.c.m.} = 2(x-2) \neq 0$$

cioe'

C. R. $x \neq 2$

$$\frac{x-2-2}{2(x-2)} = \frac{-2}{2(x-2)}$$

per il secondo principio tolgo i denominatori (posso farlo perche' ho supposto il m.c.m. diverso da zero)

$$x-2-2 = -2$$

$$x = 2 \quad \text{non accettabile perche' contraria alla condizione di realta'}$$

h) Equazioni ai moduli

Conviene qui ampliare un pochino nei particolari il concetto di modulo

(1) Perche' il modulo

In Matematica esistono delle grandezze che sono solamente rappresentabili da numeri positivi, ad esempio si pensi alla lunghezza di un segmento o alla distanza fra due punti: non ha nessun significato associare a tali grandezze un numero negativo, Allora, in certe parti della matematica, avremo bisogno di un qualcosa che ci garantisca che il numero che consideriamo e' sempre positivo: questo qualcosa e' l'etichetta "Modulo" che verra' indicata con il simbolo

$$|x|$$

e si leggera'

modulo di x

(2) Definizione di modulo

Dobbiamo definire che un qualcosa e' sempre positivo, quindi se e' positivo va bene mentre se e' negativo dovro' cambiargli il segno per farlo diventare positivo

Definizione:

Si definisce modulo di x e si scrive $|x|$

- lo stesso x se x e' positivo

- x cambiato di segno se x e' negativo

In simboli:

- $|x| = x$ se $x > 0$
- $|x| = -x$ se $x < 0$

Non c'e' bisogno di dire che $|0|$ non ha nessun significato (anche perche' 0 e' l'unico numero senza segno).

Vedi anche il [modulo](#) nei radicali.

(3) Equazioni con un modulo

Sono come le equazioni normali: l'unica differenza e' che spezzando il modulo nelle sue componenti otteniamo due equazioni che valgono in due intervalli diversi.

Un esempio chiarira' meglio il concetto:

Risolvere l'equazione:

$$|2x - 4| + x = 8$$

Pongo l'argomento del modulo maggiore o uguale a zero:

$$2x - 4 \geq 0$$

$$2x \geq 4$$

$$x \geq 2$$

Ho messo maggiore o uguale, potevo anche mettere solo il maggiore e lasciare l'uguale nell'altro intervallo.

Otengo l'intervallo $[2, +\infty)$, in questo intervallo il termine dentro il modulo e' positivo quindi tolgo il modulo e considero l'equazione:

$$2x - 4 + x = 8$$

Invece nell'intervallo $(-\infty, 2)$ il termine dentro il modulo $(2x - 4)$ e' negativo quindi per togliere il modulo devo cambiarlo di segno $(-2x + 4)$ e considerare l'equazione:

$$-2x + 4 + x = 8$$

Raccogliendo:

- se $x < 2$ considero

$$-2x + 4 + x = 8$$

- se $x \geq 2$ considero

$$2x - 4 + x = 8$$

Posso anche rappresentarlo sulla retta reale nel seguente modo:

$$\begin{array}{cc} -2x + 4 + x = 8 & 2x - 4 + x = 8 \end{array}$$

2

Naturalmente la soluzione e' accettabile solo se cade dentro l'intervallo in cui considero l'equazione. Posso prendere per buona la soluzione della prima solo se e' minore di 2 e posso accettare la soluzione della seconda solo se e' uguale o maggiore di 2.

In pratica devo risolvere le due equazioni nel loro intervallo:

- Risolviamo la prima:

se $x < 2$ considero

$$-2x + 4 + x = 8$$

$$-x + 4 = 8$$

$$-x = 4$$

$$x = -4$$

essendo questo valore minore di 2 posso accettarlo

- Risolviamo la seconda:

se $x \geq 2$

- Considero

$$2x - 4 + x = 8$$

$$3x - 4 = 8$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

Essendo questo valore maggiore di 2 posso accettarlo.

Ho due soluzioni: $x_1 = -4$ $x_2 = 4$

Concludendo: quando ho un modulo devo suddividere l'equazione in piu' equazioni ognuna valida in un certo intervallo e devo risolvere ogni equazione singolarmente: potro' accettare la soluzione solo se cade dentro l'intervallo dell'equazione.

Per il numero di soluzioni non c'e' un criterio: possono essere 1, 2, oppure nessuna. Ad esempio prova a risolvere la stessa equazione cambiando di segno il termine dopo l'uguale:

$|2x - 4| + x = -8$ nessuna soluzione. Ecco lo svolgimento:

pongo l'argomento del modulo maggiore o uguale a zero

$$2x - 4 \geq 0$$

$$2x \geq 4$$

$$x \geq 2$$

Ottengo:

- se $x < 2$ considero

$$-2x + 4 + x = -8$$

- se $x \geq 2$ considero

$$2x - 4 + x = -8$$

Naturalmente la soluzione e' accettabile solo se cade dentro l'intervallo in cui considero l'equazione: Posso prendere per buona la soluzione della prima solo se e' minore di 2 e posso accettare la soluzione della seconda solo se e' uguale o maggiore di 2.

Devo risolvere le due equazioni nel loro intervallo:

- Risolviamo la prima:

se $x < 2$ considero

$$-2x + 4 + x = -8$$

$$-x + 4 = -8$$

$$-x = -12$$

$$x = 12$$

non essendo questo valore minore di 2 non posso accettarlo

- Risolviamo la seconda:

se $x \geq 2$ considero

$$2x - 4 + x = -8$$

$$3x - 4 = -8$$

$$3x = -4$$

$$x = -4/3$$

non essendo questo valore maggiore di 2 non posso accettarlo

l'equazione non ammette soluzioni.

(4) Equazioni con due moduli

Se abbiamo due moduli si avranno genere tre intervalli da considerare e quindi tre equazioni. Vediamo un esempio.

Risolvere l'equazione:

$$|2x - 4| + |x + 3| - x = 8$$

pongo gli argomenti dei moduli maggiori o uguali a zero ottenendo due disequazioni

(5) Equazioni con piu' moduli

Se abbiamo piu' moduli si avranno genere piu' intervalli da considerare e quindi piu' equazioni. Vediamo un esempio con tre moduli.

Risolvere l'equazione

$$|2x - 4| + |x + 3| + |x - 3| - x = 8$$

pongo gli argomenti dei moduli maggiori o uguali a zero ottenendo tre disequazioni:

1. $2x - 4 \geq 0$

$$2x \geq 4$$

$$x \geq 2$$

2. $x + 3 \geq 0$

$$x \geq -3$$

3. $x - 3 \geq 0$

$$x \geq 3$$

- - - - - (2) + + + + + + + + + + + + + + +

-----(-3)+++++

----- (3) + + + + + + + + + +

Ottengo gli intervalli:

- $(-\infty, -3)$ in questo intervallo tutte e tre le disequazioni non sono verificate quindi i termini interni al modulo devono essere presi col segno cambiato e l'equazione sarà

$$-2x + 4 - x - 3 - x + 3 - x = 8$$

sviluppendo

$$-5x = 4$$

- $[-3, 2)$ in questo intervallo la prima e la terza disequazione non sono verificate (quindi devo cambiare di segno i termini dei moduli) mentre invece è verificata la seconda (allora prendo con lo stesso segno i termini del secondo modulo) e l'equazione diventa

$$-2x + 4 + x + 3 - x + 3 - x = 8$$

sviluppendo

$$-3x = -2$$

$$3x = 2$$

- **[2, 3)** in questo intervallo le prime due disequazioni sono verificate (i termini dei moduli vanno presi senza cambiarli di segno) mentre la terza non e' verificata (quindi devo cambiare di segno i termini del modulo); l'equazione diventa:

$$2x - 4 + x + 3 - x + 3 - x = 8$$

sviluppendo:

$$x = 6$$

- $[3, +\infty)$ in questo intervallo tutte e tre le disequazioni sono verificate quindi i termini dei moduli vanno presi senza cambiarli di segno e l'equazione diventa:

$$2x - 4 + x + 3 + x - 3 - x = 8$$

sviluppendo:

$$3x = 12$$

Posso rappresentarlo sulla retta reale nel seguente modo:

$$-5x = 4 \qquad 3x = 2 \qquad x = 6 \qquad 3x = 12$$

-3 2 3

Naturalmente la soluzione e' accettabile solo se cade dentro l'intervallo in cui considero l'equazione:

Posso prendere per buona la soluzione della prima equazione solo se e' minore di -3, posso accettare la soluzione della seconda solo se e' compresa fra -3 e 2, posso accettare la soluzione della terza solo se il risultato e' compreso tra 2 e 3 e posso accettare la quarta se la soluzione e' maggiore o uguale a 3

In pratica devo risolvere le quattro equazioni nel loro intervallo:

- Risolviamo la prima.
Se $x < -3$ considero
 $-5x = 4$
 $x = -4/5$
non essendo questo valore minore di -3 non posso accettarlo
- Risolviamo la seconda.
Se $-3 \leq x < 2$ considero
 $3x = 2$
 $x = 2/3$
essendo questo valore compreso tra -3 e 2 posso accettarlo
- Risolviamo la terza.
se $2 \leq x < 3$ considero
 $x = 6$
non essendo questo valore compreso tra 2 e 3 non posso accettarlo
- Risolviamo la quarta.
se $x \geq 3$ considero
 $3x = 12$
 $x = 4$
essendo questo valore maggiore di 3 posso accettarlo
Ho quindi due soluzioni: $x = 2/3$ $x = 4$

3. Equazioni di secondo grado

Un'equazione si dice di secondo grado quando la x vi compare a potenza 2, cioe' c'e' un termine con x^2

A seconda dei termini presenti, oltre a quello di secondo grado, le equazioni possono essere suddivise in

- [Equazioni pure](#)
- [Equazioni spurie](#)
- [Equazioni complete](#)

Per affrontare correttamente l'argomento occorre aver prima studiato [i radicali](#).

a) Equazione pura

E' l'equazione di secondo grado del tipo:

$$ax^2 + c = 0$$

Si ottiene dall'equazione completa $ax^2 + bx + c = 0$ quando manca il termine di primo grado bx

Per risolverla usiamo le regole gia' viste per le equazioni di primo grado:

$$ax^2 + c = 0$$

Per il primo principio di equivalenza trasporto la c dall'altra parte dell'uguale cambiandola di segno:

$$ax^2 = -c$$

Dovro' lasciare la x senza altri termini quindi applico il secondo principio dividendo entrambe i termini per a :

$$\frac{ax^2}{a} = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

Ora siccome cerco la x mentre ho x^2 per fare in modo che x^2 diventi x dovrò fare la radice ad entrambe i termini.

sono radicali algebrici perche' cerchiamo tutti i valori che elevati al quadrato ci danno il radicando quindi ci va il simbolo $\pm$ ma siccome e' un'uguaglianza basta mettere il simbolo solo davanti ad una delle due radici

$$\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Le due soluzioni sono:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Quando faccio $\sqrt{\frac{-c}{a}}$ non faccio la radice di un numero negativo (non si potrebbe fare perche' nessun numero reale al quadrato mi da' un numero negativo). Il segno meno significa semplicemente cambiare il segno di c/a

Facciamo un esempio:

$$3x^2 - 12 = 0$$

Trasporto il -12 dopo l'uguale:

$$3x^2 = +12$$

Per il secondo principio divido entrambe i membri per 3 per liberare x^2 :

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x^2 = 4$$

applico la radice ad entrambe i membri:

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4} \quad \text{da cui} \quad x = \pm\sqrt{4}$$

- $x_1 = -2$
- $x_2 = +2$

E' consuetudine mettere le soluzioni partendo dalla piu' a sinistra sulla retta dei numeri e andando verso destra.

Perche' il nome "pura" dato a questa equazione?

Sembra derivi dal fatto che gia' la usavano i greci per risolvere il problema: data la superficie di un quadrato trovarne il lato

b) Equazione spuria

E' l'equazione di secondo grado del tipo:

$$ax^2 + bx = 0$$

Si ottiene dall'equazione completa $ax^2 + bx + c = 0$ quando manca il termine noto c

Per risolverla trattiamola come un polinomio e scomponiamola.

Raccogliamo a fattor comune la x prima dell'uguale:

$$x(ax + b) = 0$$

Il principio di **annullamento del prodotto** dice che:

un prodotto e' zero se e solo se uno dei suoi fattori e' zero

Siccome devo trovare i valori per cui il prodotto e' zero, per il principio di annullamento del prodotto dovrò porre ogni fattore uguale a zero; quindi:

- $x = 0$
- $ax + b = 0$
 $ax = -b$
 $x = -b/a$

Le soluzioni sono:

- $x_1 = 0$
- $x_2 = -b/a$

Facciamo un esempio:

$$3x^2 - 12x = 0$$

raccolgo la x

$$x(3x - 12) = 0$$

applico la legge dell'annullamento del prodotto

- $x = 0$
- $3x - 12 = 0$
 $3x = +12$
 $x = 12/3 = 4$

Le soluzioni sono:

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 4$

L'equazione si chiama spuria in contrapposizione con l'equazione pura.

E' l'equazione che serve a determinare la gittata di un proiettile.

c) Equazione di secondo grado completa

E' l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Per risolverla basta applicare la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La prima cosa da dire e' che, vista l'importanza della formula, sarebbe bene riscriverla ogni volta che la usi. Così, senza troppa fatica l'impari a memoria.

La seconda e' che, visto che per ricavarla vi sono dei ragionamenti matematici piuttosto interessanti, sarebbe

bene capire la dimostrazione anche se il tuo professore non l'ha spiegata.
Nella pagina successiva potrai vedere la dimostrazione.

-
- [Formula risolutiva](#)
 - [Formula ridotta](#)
 - [Discriminante](#)
 - [Relazioni fra coefficienti e radici](#)
 - [Regola di cartesio](#)
 - [Decomposizione del trinomio](#)
 - [Esercizi](#)
 - [Discussione di un'equazione di secondo grado](#)
-

Facciamo un esercizio:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

I coefficienti sono:

- $a = 1$
- $b = -5$
- $c = 6$

Sostituisco nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{[(-5)^2 - 4(1)(6)]}}{2(1)}$$

Esegui i calcoli

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{[25 - 24]}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2(1)}$$

Estraggo di radice:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Ora devo fare un bivio scegliendo una volta il meno e l'altra il più

- $x_1 = (5 - 1)/2 = 4/2 = 2$
- $x_2 = (5 + 1)/2 = 6/2 = 3$

(1) Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado

Dobbiamo dimostrare come da:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si giunga a:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Devo togliere di mezzo x^2 e farla diventare una x , l'unico sistema è di racchiudere le x dentro un quadrato, facendo poi la radice avrò la x a potenza 1.

Perché ax^2 faccia parte di un quadrato dovrò moltiplicarlo per a .

Perché bx sia il doppio prodotto dovrei moltiplicarlo per 2; siccome però quando moltiplico devo moltiplicare tutti i termini, il primo termine non sarebbe più un quadrato; allora moltiplicherò per 4 così il primo termine diventa un quadrato ed il secondo un doppio prodotto.

Conclusione: moltiplico tutto per $4a$

$$4a(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Il primo termine e' un quadrato, il secondo e' un doppio prodotto quindi manca il quadrato del secondo, guardando il doppio prodotto vedo che l'unico termine che manca e' b, quindi perche'vi sia un quadrato devo aggiungere (e togliere per non cambiare il valore) b^2 .

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Raccolgo il quadrato:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Lascio il quadrato da solo prima dell'uguale:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Estraggo la radice da una parte e dall'altra:

$$\sqrt{(2ax + b)^2} = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Ora e' come un'equazione di primo grado quindi porto i termini senza x dopo l'uguale:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Divido tutto per 2a in modo da lasciare la x da sola:

$$\frac{2ax}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e si ottiene la formula finale:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A volte conviene applicare una formula piu' veloce: la formula ridotta che troverai nella prossima pagina.

(2) Formula ridotta

Si puo' applicare solamente quando il secondo termine e' divisibile per due; pongo $b=2h$:

$$ax^2 + 2hx + c = 0$$

In tal caso la formula risolutiva diviene:

$$x_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - ac}}{a}$$

La formula ridotta semplifica i calcoli per trovare le soluzioni ed e' conveniente da usare soprattutto quando il termine a vale 1

Esempio:

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

b vale 6 quindi h (meta' di b) vale 3

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 1 \cdot 8}}{1}$$

Esegui i calcoli:

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 8}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm 1$$

- $x_1 = -3 + 1 = -2$
- $x_2 = -3 - 1 = -4$

Vediamone ora la dimostrazione; sostituendo 2h al posto di b nella formula risolutiva ottengo:

$$x_{1,2} = \frac{-2h \pm \sqrt{[(2h)^2 - 4ac]}}{2a}$$

Eseguo il quadrato:

$$x_{1,2} = \frac{-2h \pm \sqrt{[4h^2 - 4ac]}}{2a}$$

Raccolgo il 4 all'interno della radice:

$$x_{1,2} = \frac{-2h \pm \sqrt{4(h^2 - ac)}}{2a}$$

Porto il 4 fuori radice:

$$x_{1,2} = \frac{-2h \pm 2\sqrt{(h^2 - ac)}}{2a}$$

Raccolgo il 2 fra il primo termine e la radice:

$$x_{1,2} = \frac{2[-h \pm \sqrt{(h^2 - ac)}]}{2a}$$

Ora semplificando il 2 sopra e sotto ottengo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{(h^2 - ac)}}{a}$$

Esiste anche una formula detta ridottissima, ma, secondo me, complica i calcoli invece di semplificarli.

(3) Discriminante dell'equazione di secondo grado

Prima di affrontare questo argomento dovresti leggere le prime parti dei [numeri immaginari e complessi](#) fino alla definizione di numero complesso.

Si definisce "*discriminante*" o " Δ " (delta) il termine che si trova sotto radice nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

cioè:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si chiama discriminante perché è il termine che discrimina, cioè rende differenti le soluzioni, infatti quando hai estratto la radice una volta va sommato ed una volta va sottratto così ottieni due valori diversi. A volte si usa anche chiamarlo determinante perché è lui che determina le soluzioni; però è un errore: il determinante è un'altra cosa. Incontreremo il determinante quando parleremo di calcolo matriciale a proposito dei sistemi lineari di più equazioni in più incognite

Siccome il termine è dentro radice abbiamo tre possibilità:

- il discriminante è [maggiore di zero](#)

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

in tal caso posso fare la radice e poiché devo sommare e sottrarre otterro' due radici reali e distinte.

- il discriminante è [uguale a zero](#)

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

in tal caso la radice vale zero e poiché devo sommare e sottrarre zero otterro' due radici uguali (valori reali e coincidenti) e la doppia [soluzione vale](#) $-b/2a$.

- il discriminante è [minore di zero](#)

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

in tal caso non posso fare la radice nei numeri reali ma solo nei numeri immaginari e poiche' devo sommare e sottrarre otterro' due radici complesse che differiranno solo per il segno in mezzo ai numeri (radici complesse e coniugate).

Regola: un' equazione di secondo grado ammette sempre due soluzioni che potranno essere

- reali e distinte se il discriminante e' maggiore di zero
 - reali coincidenti se il discriminante e' uguale a zero
 - complesse e coniugate se il discriminante e' minore di zero
-

Se il tuo insegnante non ti ha spiegato i numeri complessi puoi semplicemente dire che se il discriminante e' minore di zero l'equazione non ammette soluzioni reali.

Caso del discriminante maggiore di zero:

Facciamo un esempio:

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

I coefficienti sono:

- $a = 1$
- $b = -3$
- $c = -4$

Sostituisco nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

Eseguo i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

Il discriminante vale $25 > 0$:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

Estraggo di radice. Posso farlo perche' il discriminante e' maggiore di zero:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Ora devo fare un bivio scegliendo una volta il meno e l'altra il piu'

- $x_2 = (3 - 5)/2 = -2/2 = -1$
- $x_1 = (3 + 5)/2 = 8/2 = 4$

Ottengo due radici reali e distinte.

Caso del discriminante uguale a zero:

Facciamo un esempio:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

I coefficienti sono:

- $a = 1$
- $b = -6$
- $c = 9$

Sostituisco nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

Eseguo i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

Il discriminante vale 0:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 0}{2}$$

Ora devo fare un bivio scegliendo una volta il meno e l'altra il più, ma essendo il secondo termine zero non mi cambierà nulla:

- $x_2 = (6 - 0)/2 = 6/2 = 3$
- $x_1 = (6 + 0)/2 = 6/2 = 3$

Otengo due radici reali e coincidenti.

Quando il discriminante è uguale a zero il primo membro dell'equazione è un quadrato perfetto:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

È un quadrato infatti posso scrivere:

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$(x - 3) \cdot (x - 3) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto dovrò fare:

- $(x - 3) = 0 \quad x_1 = 3$
- $(x - 3) = 0 \quad x_2 = 3$

Si usa anche dire che la soluzione è doppia.

Caso del discriminante minore di zero:

Facciamo un esempio:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

I coefficienti sono:

- $a = 1$
- $b = -2$
- $c = 5$

Sostituisco nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

Esegui i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

Il discriminante vale $-16 < 0$ quindi o dici che non si può risolvere nell'insieme dei numeri reali o passi ai numeri immaginari:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Come numero immaginario la radice di -16 è $4i$:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

Ora devo fare un bivio scegliendo una volta il meno e l'altra il più:

- $x_2 = (2 - 4i)/2 = 2(1 - 2i)/2 = 1 - 2i$
- $x_1 = (2 + 4i)/2 = 2(1 + 2i)/2 = 1 + 2i$

Otengo due radici complesse e coniugate.

(4) Relazioni fra coefficienti e radici nell'equazione di secondo grado

Se io considero un'equazione di secondo grado tipo:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

che ho già risolto; le sue radici sono:

- $x_1 = 2$
- $x_2 = 3$

Viene da chiedersi se è possibile stabilire una relazione fra le radici ed i coefficienti: infatti, con la formula risolutiva, dati i coefficienti trovi le radici.

Siccome in matematica si deve sempre poter fare anche il contrario dobbiamo veder come dalle radici si possano ritrovare i coefficienti.

Per essere piu' chiari data l'equazione trovi le radici; allora conoscendo le radici devi poter ritrovare l'equazione.

Queste relazioni si ottengono facendo la somma ed il prodotto delle radici stesse.

- [somma delle radici](#)
- [prodotto delle radici](#)

(a) Somma delle radici nell'equazione di secondo grado

Considero le due radici dell'equazione di secondo grado:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Voglio fare la loro somma $x_1 + x_2$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Il minimo comune multiplo vale 2°

$$= \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)} - b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} =$$

Le radici sono uguali e di segno contrario quindi vanno via:

$$= \frac{-b - b}{2a} =$$

Sommo i numeratori e semplifico:

$$= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Quindi:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

cioe':

Regola: la somma delle radici dell'equazione di secondo grado e' uguale al rapporto cambiato di segno fra il secondo ed il primo coefficiente

- **a** si chiama primo coefficiente
- **b** si chiama secondo coefficiente
- **c** si chiama termine noto

Considerando l'equazione (che abbiamo gia' risolto):

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

I coefficienti sono:

- $a = 1$
- $b = -5$
- $c = 6$

e il rapporto $-b/a$ vale $-(-5/1) = +5$

Le radici sono:

- $x_1 = 2$
- $x_2 = 3$

e la loro somma vale +5 esattamente come il rapporto $-b/a$.

D'ora in avanti per sapere se hai fatto i calcoli giusti puoi controllare se la somma delle radici trovate corrisponde al rapporto $-b/a$

(b) Prodotto delle radici nell'equazione di secondo grado

Considero le due radici dell'equazione di secondo grado:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Voglio fare il loro prodotto $x_1 \cdot x_2$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Devo moltiplicare numeratore con numeratore e denominatore con denominatore (sopra con sopra e sotto con sotto); sotto otterro' $4a^2$; sopra osservo che si tratta di due termini (uno e' $-b$ l'altro e' la radice) moltiplicati per gli stessi due termini col segno in mezzo cambiato, cioe' e' un prodotto notevole somma di due monomi per la loro differenza ed il risultato sara' il quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo:

$$= \frac{(-b)^2 - [\sqrt{(b^2 - 4ac)}]^2}{4a^2} =$$

Mando via la radice con il quadrato: resta

$$= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} =$$

Eseguo il primo quadrato e tolgo la seconda parentesi (ricorda di cambiare di segno)

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} =$$

b^2 si elimina con $-b^2$

$$= \frac{4ac}{4a^2} =$$

Semplifico sopra e sotto per 4°

$$= \frac{c}{a}$$

Quindi:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

cioe':

Regola: il prodotto delle radici dell'equazione di secondo grado e' uguale al rapporto fra il termine noto ed il primo coefficiente

- **a** si chiama *primo coefficiente*
- **b** si chiama *secondo coefficiente*
- **c** si chiama *termine noto*

Considerando l'equazione (che abbiamo già risolto):

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

I coefficienti sono:

- $a = 1$
- $b = -5$
- $c = 6$

e il rapporto c/a vale $6/1 = +6$

Le radici sono:

- $x_1 = 2$
- $x_2 = 3$

e il loro prodotto vale $+6$ esattamente come il rapporto c/a

Per sapere se hai fatto i calcoli giusti puoi anche controllare se il prodotto delle radici trovate corrisponde al rapporto c/a

(c) Equazione di secondo grado con riferimento alla somma e prodotto dei coefficienti

Alla luce di quanto visto nelle pagine precedenti possiamo scrivere l'equazione di secondo grado anche come

$$x^2 - sx + p = 0$$

con

s somma delle radici

p prodotto delle radici

Infatti tu hai l'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Divido tutto per a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Siccome b/a è la somma delle radici cambiata di segno, mentre c/a è il prodotto posso scrivere:ù

$$\frac{b}{a} = -s \quad \frac{c}{a} = p$$

E sostituendo ottengo:

$$x^2 - sx + p = 0$$

(5) Regola di Cartesio

La regola di Cartesio mette in evidenza le relazioni esistenti tra i segni dei coefficienti a, b, c ed i segni delle radici x_1 e x_2 .

Cioè guardando i segni di a, b e c trovo i segni di x_1 e x_2

Guardo i segni di

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- ho una **permanenza** di segno se due segni successivi sono *uguali*.
- ho una **variazione** di segno se due segni successivi sono *diversi*.

Ad esempio:

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \quad \text{ha 2 permanenze}$$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$ ha 2 variazioni
 $x^2 + 3x - 4 = 0$ ha 1 permanenza ed 1 variazione

Regola di Cartesio: ad ogni permanenza corrisponde una radice negativa e ad ogni variazione una radice positiva

Quindi l'equazione:

$2x^2 + 5x + 2 = 0$ ha 2 permanenze cioè due soluzioni entrambe negative
 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ha 2 variazioni cioè due soluzioni entrambe positive
 $x^2 + 3x - 4 = 0$ ha 1 permanenza ed 1 variazione cioè una soluzione negativa e l'altra positiva.

Naturalmente la regola è valida solo se l'equazione è risolubile nell'insieme dei numeri reali.

La dimostrazione della regola è un buon esempio di ragionamento matematico e sarebbe da studiare anche se, ormai, in alcune scuole si insegna la regola senza farne la dimostrazione. In matematica, invece, a parte i postulati iniziali, tutto dovrebbe essere dimostrato!

Nella pagina seguente troverai una tabella riassuntiva con le relative dimostrazioni.

(a) Tabella riassuntiva per la regola di Cartesio

Considerando i vari segni possibili per i coefficienti possiamo aver i seguenti casi: (ho considerato x_1 come valore assoluto minore e x_2 come valore assoluto maggiore cioè senza considerarne i segni)

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	+	+	-	+	-	-
+	+	-	-	-	+	-
+	-	+	+	+	+	+
+	-	-	+	-	-	+
I seguenti casi si possono ricondurre ai primi quattro semplicemente cambiando di segno i termini dell'equazione (secondo principio: moltiplico per -1), Li metto comunque come esercizio per ripassare i ragionamenti logici da applicare						
-	-	-	-	+	-	-
-	-	+	-	-	+	-
-	+	-	+	+	+	+
-	+	+	+	-	-	+

Dimostrazione (+a, +b, +c)

Debbo dimostrare che da:

- a positivo
- b positivo

- **c** positivo
segue:
- **x₁** negativa
- **x₂** negativa

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	+	+	-	+	-	-

Essendo a e b positivi il loro rapporto b/a sarà positivo, allora $-b/a$ sarà negativo, cioè sarà negativa la somma delle radici :

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	+	+	-	+	-	-

Essendo a e c positivi lo sarà anche il loro rapporto c/a quindi il prodotto delle radici è positivo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	+	+	-	+	-	-

Se un prodotto di due numeri ($x_1 \cdot x_2$) è positivo i due numeri debbono avere lo stesso segno (entrambe positivi o entrambe negativi).

Due numeri positivi danno una somma positiva

Due numeri negativi danno una somma negativa

Siccome la somma ($x_1 + x_2$) è negativa ne deriva che entrambe i numeri sono negativi:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	+	+	-	+	-	-

Due permanenze = due radici negative

Dimostrazione (+a, +b, -c)

Debbo dimostrare che da:

- **a** positivo
- **b** positivo
- **c** negativo
segue:
- **x₁** positiva
- **x₂** negativa

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	+	-	-	-	+	-

Essendo a e b positivi il loro rapporto b/a sarà positivo, allora $-b/a$ sarà negativo, cioè sarà negativa la somma delle radici:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	+	-	-	+	+	-

Essendo a positivo e c negativo il loro rapporto c/a sara' negativo quindi il prodotto delle radici e' negativo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	+	-	-	-	+	-

Se un prodotto di due numeri ($x_1 \cdot x_2$) e' negativo i due numeri debbono avere segno contrario.

Se facciamo la somma di due numeri di segno contrario, la somma avra' sempre il segno del piu' grosso (meglio dire di quello di valore assoluto maggiore).

Siccome la somma ($x_1 + x_2$) e' negativa ne deriva che il piu' grosso (x_2) e' negativo ed il piu' piccolo (x_1) e' positivo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	+	-	-	-	+	-

Una permanenza ed una variazione = una radice negativa ed una positiva

Dimostrazione (+a, -b, +c)

Debbo dimostrare che da:

- a positivo
 - b negativo
 - c positivo
- segue:
- x_1 positiva
 - x_2 positiva

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	-	+	+	+	+	+

Essendo a positivo e b negativo il loro rapporto b/a sara' negativo, allora $-b/a$ sara' positivo, cioe' sara' positiva la somma delle radici:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	-	+	+	+	+	+

Essendo a e c positivi lo sara' anche il loro rapporto c/a quindi il prodotto delle radici e' positivo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	-	+	+	+	+	+

Se un prodotto di due numeri ($x_1 \cdot x_2$) e' positivo i due numeri debbono avere lo stesso segno (entrambe positivi o entrambe negativi).

Due numeri positivi danno una somma positiva

Due numeri negativi danno una somma negativa

Siccome la somma ($x_1 + x_2$) e' positiva ne deriva che entrambe i numeri sono positivi:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	-	+	+	+	+	+

Due variazioni = due radici positive

Dimostrazione (+a, -b, -c)

Debbo dimostrare che da:

- **a** positivo
 - **b** negativo
 - **c** negativo
- segue:
- **x_1** positiva
 - **x_2** negativa

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	-	-	+	-	-	+

Essendo a positivo e b negativo il loro rapporto b/a sarà negativo, allora $-b/a$ sarà positivo, cioè sarà positiva la somma delle radici:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	-	-	+	-	-	+

Essendo a positivo e c negativo il loro rapporto c/a sarà negativo quindi il prodotto delle radici è negativo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	-	-	+	-	-	+

Se un prodotto di due numeri ($x_1 \cdot x_2$) è negativo i due numeri debbono avere segno contrario.

Se facciamo la somma di due numeri di segno contrario, la somma avrà sempre il segno del più grosso (meglio dire di quello di valore assoluto maggiore)

Siccome la somma ($x_1 + x_2$) è positiva ne deriva che il più grosso (x_2) è positivo ed il più piccolo (x_1) è negativo

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
+	-	-	+	-	-	+

Una variazione ed una permanenza = una radice positiva ed una negativa

Dimostrazione (-a, -b, -c)

Debbo dimostrare che da:

- **a** negativo
 - **b** negativo
 - **c** negativo
- segue:
- **x_1** negativa
 - **x_2** negativa

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	-	-	-	+	-	-

Essendo a e b entrambe negativi il loro rapporto b/a sarà positivo, allora $-b/a$ sarà negativo, cioè sarà negativa la somma delle radici :

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	-	-	-	+	-	-

Essendo a e c entrambe negativi il loro rapporto c/a sarà positivo quindi il prodotto delle radici è positivo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	-	-	-	+	-	-

Se un prodotto di due numeri ($x_1 \cdot x_2$) è positivo i due numeri debbono avere lo stesso segno (entrambe positivi o entrambe negativi).

Due numeri positivi danno una somma positiva

Due numeri negativi danno una somma negativa

Siccome la somma ($x_1 + x_2$) è negativa ne deriva che entrambe i numeri sono negativi:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	-	-	-	+	-	-

Due permanenze = due radici negative

Dimostrazione (-a, -b, +c)

Debbo dimostrare che da:

- a negativo
 - b negativo
 - c positivo
- segue:
- x_1 positiva
 - x_2 negativa

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	-	+	-	-	+	-

Essendo a e b negativi il loro rapporto b/a sarà positivo, allora $-b/a$ sarà negativo, cioè sarà negativa la somma delle radici:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	-	+	-	+	+	-

Essendo a negativo e c positivo il loro rapporto c/a sarà negativo quindi il prodotto delle radici è negativo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	-	+	-	-	+	-

Se un prodotto di due numeri ($x_1 \cdot x_2$) e' negativo i due numeri debbono avere segno contrario.

Se facciamo la somma di due numeri di segno contrario, la somma avra' sempre il segno del piu' grosso (meglio dire di quello di valore assoluto maggiore).

Siccome la somma ($x_1 + x_2$) e' negativa ne deriva che il piu' grosso (x_2) e' negativo ed il piu' piccolo (x_1) e' positivo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	-	+	-	-	+	-

Una permanenza ed una variazione = una radice negativa ed una positiva

Dimostrazione (-a, +b, -c)

Debbo dimostrare che da:

- **a** negativo
- **b** positivo
- **c** negativo
- segue:
- **x_1** positiva
- **x_2** positiva

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	+	-	+	+	+	+

Essendo a negativo e b positivo il loro rapporto b/a sara' negativo, allora $-b/a$ sara' positivo, cioe' sara' positiva la somma delle radici:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	+	-	+	+	+	+

Essendo a e c entrambe negativi il loro rapporto c/a sara' positivo, quindi il prodotto delle radici e' positivo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	+	-	+	+	+	+

Se un prodotto di due numeri ($x_1 \cdot x_2$) e' positivo i due numeri debbono avere lo stesso segno (entrambe positivi o entrambe negativi).

Due numeri positivi danno una somma positiva

Due numeri negativi danno una somma negativa

Siccome la somma ($x_1 + x_2$) e' positiva ne deriva che entrambe i numeri sono positivi:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	+	-	+	+	+	+

Due variazioni = due radici positive

Dimostrazione (-a, +b, +c)

Debbo dimostrare che da:

- **a** negativo
 - **b** positivo
 - **c** positivo
- segue:
- **x_1** positiva
 - **x_2** negativa

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	+	+	+	-	-	+

Essendo a negativo e b positivo il loro rapporto b/a sarà negativo, allora $-b/a$ sarà positivo, cioè sarà positiva la somma delle radici:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	+	+	+	-	-	+

Essendo a negativo e c positivo il loro rapporto c/a sarà negativo quindi il prodotto delle radici è negativo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	+	+	+	-	-	+

Se un prodotto di due numeri ($x_1 \cdot x_2$) è negativo i due numeri debbono avere segno contrario.

Se facciamo la somma di due numeri di segno contrario, la somma avrà sempre il segno del più grosso (meglio dire di quello di valore assoluto maggiore)

Siccome la somma ($x_1 + x_2$) è positiva ne deriva che il più grosso (x_2) è positivo ed il più piccolo (x_1) è negativo:

a	b	c	$-b/a = x_1 + x_2$	$c/a = x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2
-	+	+	+	-	-	+

Una variazione ed una permanenza = una radice positiva ed una negativa

(6) Decomposizione del trinomio

Come nome è un po' macabro, ma è il suo; qualcuno la chiama scomposizione, però la **scomposizione del trinomio** è un altro tipo di ragionamento anche se il risultato è quasi il medesimo.

Il trinomio:

$$ax^2 + bx + c$$

E' scomponibile come:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

essendo x_1 e x_2 le radici dell'equazione di secondo grado associata al polinomio:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Nella pagina successiva troverai la dimostrazione che sarebbe bene fare almeno per esercizio.

Esempio:

Scomporre:

$$2x^2 + 5x + 2$$

Considero l'equazione associata

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

La risolvo:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

Trovo le radici sommando e sottraendo:

$$x_1 = \frac{-5 - 3}{4} = -2 \quad x_2 = \frac{-5 + 3}{4} = -1/2$$

Ora essendo $x_1 = -2$, $x_2 = -1/2$ ed $a=2$ applico la formula per la scomposizione:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= \\ &= 2[x - (-2)][x - (-1/2)] = \\ &= 2(x + 2)(x + 1/2) = \end{aligned}$$

Per non avere frazioni moltiplico il numero fuori di parentesi per la parentesi con la frazione:

$$= (x + 2)(2x + 1)$$

Eseguendo la moltiplicazione ritroverai il polinomio di partenza.

(a) Dimostrazione

Devo dimostrare che vale:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

cioe' che partendo da:

$$ax^2 + bx + c$$

riesco ad arrivare a:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$ax^2 + bx + c =$$

Per trasformarlo devo metter in evidenza la **a**; ma se **a** non c'e' in tutti i termini come si fa a metterla in evidenza? Per metterla in evidenza basta prima farla comparire moltiplicando i termini senza **a** per **a/a** (e' come moltiplicarli per 1):

$$= ax^2 + \frac{abx}{a} + \frac{ac}{a} =$$

Ora posso mettere in evidenza la **a** raccogliendo quella al numeratore:

$$= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right) =$$

Ora so che:

$$-b/a = x_1 + x_2$$

e quindi:

$$b/a = -(x_1 + x_2)$$

inoltre vale:

$$c/a = x_1 \cdot x_2$$

Sostituisco:

$$= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] =$$

Eseguo la moltiplicazione:

$$= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1 \cdot x_2) =$$

Scompongo dentro parentesi (raccolgimento parziale, tra i primi due raccolgo x e tra il terzo e il quarto raccolgo $-x_2$):

$$= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] =$$

Ora raccolgo $(x - x_1)$:

$$= a[(x - x_1) \cdot (x - x_2)] =$$

Tolgo le parentesi quadre:

$$= a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Come volevamo.

(7) Esercizi sulle equazioni

Esercizi sulle equazioni di secondo grado pure:

Esercizio 1

$$2x^2 - 18 = 0 \quad \text{Soluzione:}$$

Si porta il termine noto dopo l'uguale

$$2x^2 = 18$$

divido entrambe i membri per il coefficiente di x^2 :

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{18}{2}$$

Semplifico ed ottengo:

$$x^2 = 9$$

Applico la radice da entrambe le parti dell'uguale (il piu' o meno lo mettiamo sempre solo davanti al secondo termine):

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9}$$

Semplifico le radici con gli esponenti ricordando che $9=3^2$:

$$x = \pm 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -3 \quad x_2 = +3$$

Esercizio 2

$$(2x - 3)^2 = x(x - 12) + 12 \quad \text{Soluzione:}$$

Qui dobbiamo prima fare i calcoli: come prima cosa eleviamo al quadrato prima dell'uguale e, dopo l'uguale

Eseguiamo la moltiplicazione:

$$4x^2 - 12x + 9 = x^2 - 12x + 12$$

Porto le x prima dell'uguale e i termini noti dopo l'uguale:

$$4x^2 - x^2 - 12x + 12x = -9 + 12$$

Sommo i termini simili:

$$3x^2 = 3$$

Divido entrambe i membri per il coefficiente di x^2 :

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3}$$

Semplifico ed ottengo:

$$x^2 = 1$$

Applico la radice da entrambe le parti dell'uguale:

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{1}$$

Semplifico le radici con gli esponenti:

$$x^2 = \pm 1$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -1 \quad x_2 = +1$$

Esercizio 3

$$(x-3)(x+3) + 5x = 5(x-5) \quad \text{Soluzione:}$$

Anche qui dobbiamo prima fare i calcoli: eseguiamo i prodotti prima e dopo l'uguale (prima dell'uguale e' un prodotto notevole):

$$x^2 - 9 + 5x = 5x - 25$$

Porto le x prima dell'uguale e i termini noti dopo l'uguale:

$$x^2 + 5x - 5x = 9 - 25$$

Sommo i termini simili:

$$x^2 = -16$$

Applico la radice da entrambe le parti dell'uguale:

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-16}$$

Dovrei fare la radice quadrata di un numero negativo e qui hai due possibilita':

- Se il tuo Professore non ti ha spiegato i numeri immaginari e complessi, devi solo dire che l'equazione **non ammette soluzioni reali**
- Se il tuo Professore ti ha spiegato i numeri **immaginari e complessi**, allora devi procedere estraendo la radice e ricordando che $\sqrt{-1} = i$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-1} \sqrt{16}$$

Semplifico le radici con gli esponenti ricordando che $16=4^2$

$$x = \pm 4i$$

Ho quindi le due soluzioni immaginarie

$$x_1 = -4i \quad x_2 = +4i$$

Esercizio 4

$$\frac{10}{3} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{x+5}{x-5} \quad \text{Soluzione:}$$

E' un' **equazione fratta** quindi prima di risolverla dobbiamo porre le condizioni di realta':

$$\begin{array}{ll} \text{C.R.:} & x-5 \neq 0 \quad x \neq 5 \\ & x+5 \neq 0 \quad x \neq -5 \end{array}$$

Cioe' se troveremo come soluzione $x=5$ o $x=-5$ diremo che l'equazione e' impossibile.

Ora possiamo fare il minimo comune multiplo e poi semplificarlo.

$$\text{m.c.m.} = 3(x-5)(x+5):$$

$$\frac{10(x-5)(x+5) - 3(x-5)^2}{3(x-5)(x+5)} = \frac{3(x+5)^2}{3(x-5)(x+5)}$$

Elimino i denominatori.

Devo moltiplicare da entrambe le parti per $3(x-5)(x+5)$; posso farlo perche' ho posto che e' diverso da zero.

$$10(x-5)(x+5) - 3(x-5)^2 = 3(x+5)^2$$

Esegui i calcoli, prima i prodotti notevoli:

$$10(x^2-25) - 3(x^2-10x+25) = 3(x^2+10x+25)$$

poi le moltiplicazioni:

$$10x^2 - 250 - 3x^2 + 30x - 75 = 3x^2 + 30x + 75$$

Conviene portare tutto prima dell'uguale:

$$10x^2 - 250 - 3x^2 + 30x - 75 - 3x^2 - 30x - 75 = 0$$

Sommo i termini simili:

$$4x^2 - 400 = 0$$

Divido entrambe i membri per il coefficiente di x^2 :

$$\frac{4x^2}{4} = \frac{400}{4}$$

Semplifico ed ottengo:

$$x^2 = 100$$

Applico la radice da entrambe le parti dell'uguale (il piu' o meno lo mettiamo sempre solo davanti al secondo

termine)

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{100}$$

Semplifico le radici con gli esponenti ricordando che $100=10^2$

$$x = \pm 10$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -10 \quad x_2 = +10$$

e rispettano le condizioni di realta':

Esercizio 5

$$\frac{5}{2x-2} + \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{2x+2}$$

Soluzione:

Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{5}{2(x-1)} + \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{2(x+1)}$$

E' un' **equazione fratta** quindi prima di risolverla dobbiamo porre le condizioni di realta': ogni termine al denominatore, che contenga la x, va posto diverso da zero; le costanti moltiplicate (il 2) puoi saltarle perche' sono certamente diverse da zero:

$$\begin{array}{ll} \text{C.R.:} & x-1 \neq 0 \quad x \neq 1 \\ & 2x-3 \neq 0 \quad x \neq 3/2 \\ & x+1 \neq 0 \quad x \neq -1 \end{array}$$

Cioe', se troveremo come soluzione $x=-1$ $x=1$ o $x=3/2$, diremo che l'equazione e' impossibile.

Ora possiamo fare il minimo comune multiplo e poi semplificarlo:

$$\frac{5 \cdot (x+1)(2x-3) + 2(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)(2x-3)} = \frac{(x-1)(2x-3)}{2(x-1)(x+1)(2x-3)}$$

Elimino i denominatori.

Devo moltiplicare da entrambe le parti per $2(x-1)(x+1)(2x-3)$; posso farlo perche' so che ogni termine e' diverso da zero.

$$5(x+1)(2x-3) + 2(x-1)(x+1) = (x-1)(2x-3)$$

Eseguo i calcoli, prima i prodotti fra parentesi:

$$5(2x^2-3x+2x-3) + 2(x^2-1) = 2x^2-3x-2x+3$$

poi le moltiplicazioni.

Veramente sarebbe piu' "matematico" sommare prima i termini simili entro parentesi, pero' cosi' facendo devo fare un passaggio in piu', perche' dopo aver moltiplicato dovrò ancora sommare i termini simili, quindi...

$$10x^2 - 15x + 10x - 15 + 2x^2 - 2 = 2x^2 - 3x - 2x + 3$$

conviene portare tutto prima dell'uguale

$$10x^2 - 15x + 10x - 15 + 2x^2 - 2 - 2x^2 + 3x + 2x - 3 = 0$$

sommo i termini simili

$$10x^2 - 20 = 0$$

divido entrambe i membri per il coefficiente di x^2 :

$$\frac{10x^2}{10} = \frac{20}{10}$$

Semplifico ed ottengo:

$$x^2 = 2$$

Applico la radice da entrambe le parti dell'uguale (il piu' o meno lo mettiamo sempre solo davanti al secondo termine):

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{2}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = +\sqrt{2}$$

e rispettano le condizioni di realta':

Non ti devi meravigliare se il risultato viene un numero con la radice: se consideri i numeri naturali 1,2,3, i numeri con alcuni termini dopo la virgola (detti razionali perche' esprimibili mediante frazioni) sono infiniti

rispetto ai numeri naturali, cioè per ogni numero naturale ci sono infiniti numeri razionali; si può dimostrare che per ogni numero razionale esistono infiniti numeri esprimibili con la radice(reali); se hai un problema reale di solito ottieni un numero con la radice: è raro ottenere come soluzione un numero razionale e i numeri interi li ottieni solo in problemi preparati apposta.

Esercizio 6

$ax^2 = 0$ Soluzione:

È un'equazione letterale quindi, per risolverla:

- se $a \neq 0$
 posso applicare il secondo principio e quindi divido entrambe i membri per il coefficiente di x^2 :

$$\frac{ax^2}{a} = \frac{0}{a}$$
 Semplifico ed ottengo:

$$x^2 = 0$$
 Applico la radice da entrambe le parti dell'uguale (il più o meno lo mettiamo sempre solo davanti al secondo termine):

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{0}$$
 Semplifico le radici con gli esponenti e, ricordando che $0=0^2$ e che lo zero è un numero senza segno, ottengo le due soluzioni:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$$
 si dice anche che 0 è una radice doppia.
- se $a = 0$
 in questo caso non posso dividere entrambe i membri per a, allora sostituisco il valore 0 ad a

$$a = x^2 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{equazione indeterminata.}$$

Esercizio 7

$$\frac{x-a}{x+a} = 3 + \frac{x+a}{a-x}$$

Soluzione:

Intanto osserviamo l'equazione: abbiamo ai denominatori $x+a$ ed $a-x$; conviene scrivere $a+x$ invece di $x+a$ essendo la stessa cosa.

$$\frac{x-a}{a+x} = 3 + \frac{x+a}{a-x}$$

È un'equazione fratta e, contemporaneamente, un'equazione letterale

Prima di risolverla dobbiamo porre le condizioni di realtà

$$\begin{aligned} \text{C.R.:} \quad a+x &\neq 0 & x &\neq -a \\ a-x &\neq 0 & x &\neq a \end{aligned}$$

Cioè se troveremo come soluzione $x=a$ o $x=-a$ diremo che l'equazione è impossibile.

Ora possiamo fare il minimo comune multiplo e poi semplificarlo:

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.} &= (a+x)(a-x) \\ \frac{(x-a)(a-x)}{(x-a)(a-x)} &= \frac{3(a+x)(a-x) + (x+a)(a+x)}{(x-a)(a-x)} \end{aligned}$$

o meglio, ricordando che $(a-x) = -(x-a)$:

$$\frac{-(x-a)^2}{(x-a)(a-x)} = \frac{3(a+x)(a-x) + (x+a)^2}{(x-a)(a-x)}$$

Elimino i denominatori.

Devo moltiplicare da entrambe le parti per $(a+x)(a-x)$; posso farlo perché ho posto che sono diversi da zero.

$$-(x-a)^2 = 3(a+x)(a-x) + (x+a)^2$$

Eseguo i calcoli, prima i prodotti notevoli:

$$-(x^2 - 2ax + a^2) = 3(a^2 - x^2) + x^2 + 2ax + a^2$$

Poi moltiplico e faccio cadere le parentesi:

$$-x^2 + 2ax - a^2 = 3a^2 - 3x^2 + x^2 + 2ax + a^2$$

Conviene portare tutto prima dell'uguale:

$$-x^2 + 2ax - a^2 - 3a^2 + 3x^2 - x^2 - 2ax - a^2 = 0$$

$$x^2 - 5a^2 = 0$$

Porto il termine noto dopo l'uguale:

$$x^2 = 5a^2$$

Applico la radice da entrambe le parti dell'uguale (il piu' o meno lo mettiamo sempre solo davanti al secondo termine):

$$\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{5a^2}$$

Estraggo **a** dalla radice:

$$x = \pm a \sqrt{5}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -a\sqrt{5} \quad x_2 = +a\sqrt{5}$$

Per finire, siccome abbiamo delle soluzioni letterali, dobbiamo porre che le soluzioni trovate rispettano le condizioni di realta': quindi dovra' essere:

$$-a\sqrt{5} \neq -a \quad a \neq 0$$

La disequaglianza si risolve esattamente come un'equazione: porto tutti i termini al primo membro

$$-a\sqrt{5} + a \neq 0$$

metto in evidenza **a**

$$a(1 - \sqrt{5}) \neq 0$$

allora essendo $(1 - \sqrt{5})$ diverso da zero dovra' essere

$$a \neq 0$$

$$-a\sqrt{5} \neq a \quad a \neq 0$$

Porto tutti i termini al primo membro

$$-a\sqrt{5} - a \neq 0$$

metto in evidenza **a**

$$-a(1 + \sqrt{5}) \neq 0$$

allora essendo $(1 + \sqrt{5})$ diverso da zero dovra' essere

$$-a \neq 0 \text{ e quindi } a \neq 0$$

$$a\sqrt{5} \neq -a \quad a \neq 0$$

Porto tutti i termini al primo membro

$$a\sqrt{5} + a \neq 0$$

metto in evidenza **a**

$$a(1 + \sqrt{5}) \neq 0$$

allora essendo $(1 + \sqrt{5})$ diverso da zero dovra' essere

$$a \neq 0$$

$$a\sqrt{5} \neq a \quad a \neq 0$$

Porto tutti i termini al primo membro

$$a\sqrt{5} - a \neq 0$$

metto in evidenza **a**

$$a(\sqrt{5} - 1) \neq 0$$

allora essendo $(\sqrt{5} - 1)$ diverso da zero dovra' essere

$$a \neq 0$$

Quindi le soluzioni sono accettabili se **a** e' diverso da zero.

Esercizi sulle equazioni di secondo grado spurie:

Esercizio 1

$$2x^2 - 10x = 0$$

Soluzione:

Si fa il **raccoglimento a fattor comune**

$$2x(x - 5) = 0$$

Questo e' un prodotto uguale a zero:

Per la legge dell'annullamento del prodotto so che un prodotto e' zero se e solo se uno dei fattori e' zero, quindi l'equazione precedente equivale alle due equazioni:

$$2x = 0 \quad x - 5 = 0$$

- Risolvo la prima:

$$2x = 0$$

divido per 2 da entrambe le parti dell'uguale ed ottengo

$$x = 0$$

- Risolvo la seconda:

$$x - 5 = 0$$

porto il -5 dopo l'uguale cambiandolo di segno

$$x = 5$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 5$$

Esercizio 2

$$2(x - 2)^2 - 7x = (x - 3)^2 - 1$$

Soluzione:

Qui dobbiamo prima fare i calcoli: come prima cosa eleviamo al quadrato prima dell'uguale e dopo l'uguale:

$$2(x^2 - 4x + 4) - 7x = x^2 - 6x + 9 - 1$$

Ora eseguo la moltiplicazione prima dell'uguale:

$$2x^2 - 8x + 8 - 7x = x^2 - 6x + 9 - 1$$

Porto le x prima dell'uguale e i termini noti dopo l'uguale:

$$2x^2 - x^2 - 8x - 7x + 6x = 9 - 1 - 8$$

Sommo i termini simili:

$$x^2 - 9x = 0$$

Raccolgo a fattor comune la x :

$$x(x - 9) = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto l'equazione precedente equivale alle due equazioni:

$$x = 0$$

$$x - 9 = 0$$

La prima e' gia' risolta, risolvo la seconda; porto il -9 dopo l'uguale cambiandolo di segno:

$$x = 9$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 9$$

Esercizio 3

$$x^2 + 3x = \frac{x}{2} + 7x(x - 2)$$

Soluzione:

Dobbiamo prima fare i calcoli: eseguiamo il prodotto dopo l'uguale:

$$x^2 + 3x = \frac{x}{2} + 7x^2 - 14x$$

Ora facciamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{2x^2 + 6x}{2} = \frac{x + 14x^2 - 28x}{2}$$

Adesso, essendo un'equazione posso moltiplicare prima e dopo l'uguale per 2, cioe' posso togliere i denominatori **secondo principio di equivalenza** :

$$2x^2 + 6x = x + 14x^2 - 28x$$

Porto le x prima dell'uguale e i termini noti dopo l'uguale:

$$2x^2 - 14x^2 + 6x - x + 28x = 0$$

Sommo i termini simili:

$$-12x^2 + 33x = 0$$

Raccolgo a fattor comune $-3x$:

$$-3x(4x - 11) = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto la mia equazione equivale alle due equazioni:

$$-3x = 0$$

$$4x - 11 = 0$$

- Risolvo la prima:

$$-3x = 0$$

Divido per -3 da entrambe le parti dell'uguale ed ottengo:

$$x = 0$$

- Risolvo la seconda:

$$4x - 11 = 0$$

Porto il -11 dopo l'uguale cambiandolo di segno:

$$4x = 11$$

Divido da entrambe le parti per 4 ed ottengo:

$$\frac{4x}{4} = \frac{11}{4}$$

- e quindi:

$$x = \frac{11}{4}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{11}{4}$$

Esercizio 4

$$\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{3x}{x - 1} + \frac{2}{x^2 - 1} =$$

Soluzione:

Prima scomponiamo l'ultimo denominatore:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{3x}{x - 1} + \frac{2}{(x + 1)(x - 1)}$$

E' un' **equazione fratta** quindi prima di risolverla dobbiamo porre le condizioni di realta' cioe' supporre che i denominatori siano diversi da zero:

$$\text{C.R.} \quad \begin{array}{ll} x - 1 \neq 0 & x \neq 1 \\ x + 1 \neq 0 & x \neq -1 \end{array}$$

Cioe' se troveremo come soluzione $x=1$ o $x=-1$ diremo che l'equazione e' impossibile.

Ora possiamo fare il minimo comune multiplo e poi semplificarlo:

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.} &= (x+1)(x-1) \\ \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} &= \frac{3x(x-1) + 2}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

Elimino i denominatori.

Devo moltiplicare da entrambe le parti per $(x-1)(x+1)$; posso farlo perche' nelle condizioni di realta' ho posto che i fattori sono diversi da zero.

$$(x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1) = 3x(x-1) + 2$$

Eseguo i calcoli, da notare che prima dell'uguale ottengo delle somme e differenze di cubi:

$$x^3 + 1 - (x^3 - 1) = 3x^2 - 3x + 2$$

Faccio cadere le parentesi:

$$x^3 + 1 - x^3 + 1 = 3x^2 - 3x + 2$$

Convien portare tutto prima dell'uguale:

$$x^3 + 1 - x^3 + 1 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$$

Sommo i termini simili:

$$-3x^2 + 3x = 0$$

Raccolgo a fattor comune $-3x$:

$$-3x(x - 1) = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto la mia equazione equivale alle due equazioni

$$-3x = 0$$

$$x - 1 = 0$$

- Risolvo la prima:

$$-3x = 0$$

divido per -3 da entrambe le parti dell'uguale ed ottengo

$$x = 0$$

- Risolvo la seconda:

$$x - 1 = 0$$

porto -1 dopo l'uguale cambiandolo di segno

$$x = 1$$

Pero' per le condizioni di realta' questo valore non puo' essere accettato (altrimenti, per togliere i denominatori, avrei moltiplicato per zero entrambe i membri dell'equazione contro il **secondo principio** di equivalenza

Ho quindi una sola soluzione accettabile:

$$x_1 = 0 \text{ accettabile} \quad x_2 = 1 \text{ non accettabile}$$

Esercizio 5

$$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{2-x} = 0$$

Soluzione:

Scomponiamo il primo denominatore (**trinomio notevole**):

$$\frac{3}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{2-x} = 0$$

Notiamo ora che al primo denominatore abbiamo $x-2$ mentre al terzo abbiamo $2-x$ cioe' lo stesso con il segno cambiato; quindi conviene cambiare il terzo termine di segno per avere denominatori uguali (moltiplico sopra e sotto per -1 , sopra metto il meno davanti alla frazione, sotto ottengo $-2+x$ cioe' ordinando $x-2$):

$$\frac{3}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-2}{x-1} - \frac{1}{x-2} = 0$$

E' un' **equazione fratta** quindi prima di risolverla dobbiamo porre le condizioni di realta': ogni termine al denominatore, che contenga la x , va posto diverso da zero:

$$\text{C.R.} \quad \begin{array}{ll} x - 1 \neq 0 & x \neq 1 \\ x - 2 \neq 0 & x \neq 2 \end{array}$$

Cioe' se troveremo come soluzione $x=1$ o $x=2$ diremo che l'equazione e' impossibile
 Ora possiamo fare il minimo comune multiplo e poi semplificarlo:

$$\frac{m.c.m. = (x-1)(x-2)}{3 - (x-2)^2 - (x-1)} = \frac{0}{(x-1)(x-2)}$$

Elimino i denominatori:

Devo moltiplicare da entrambe le parti per $(x-1)(x-2)$; posso farlo perche' so che ogni termine e' diverso da zero.

$$3 - (x-2)^2 - (x-1) = 0$$

eseguo i calcoli, prima il quadrato:

$$3 - (x^2 - 4x + 4) - (x-1) = 0$$

ora faccio cadere le parentesi:

$$3 - x^2 + 4x - 4 - x + 1 = 0$$

sommo i termini simili:

$$-x^2 + 3x = 0$$

raccolgo a fattor comune -x:

$$-x(x-3) = 0$$

per la legge dell'annullamento del prodotto la mia equazione equivale alle due equazioni :

$$-x = 0$$

$$x - 3 = 0$$

- Risolvo la prima:
 $-x = 0$
 cambio di segno (moltiplico per -1) ed ottengo:
 $x = 0$
- Risolvo la seconda:
 $x - 3 = 0$
 porto -3 dopo l'uguale cambiandolo di segno:
 $x = 3$
 Controllo le condizioni di realta', va tutto bene.

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

Esercizio 6

$$ax^2 + ax = 2x(x-1) \quad \text{Soluzione:}$$

E' un' equazione letterale, prima eseguiamo la moltiplicazione:

$$ax^2 + ax = 2x^2 - 2x$$

Portiamo tutto prima dell'uguale:

$$ax^2 + ax - 2x^2 + 2x = 0$$

Sommo i termini simili:

Quando ho delle lettere e dei numeri per indicare che sommo faccio il raccoglimento a fattor comune

$$x^2(a-2) + x(a+2) = 0$$

Raccolgo a fattor comune x:

$$x[x(a-2) + (a+2)] = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto la mia equazione equivale alle due equazioni:

$$x = 0$$

$$x(a-2) + (a+2) = 0$$

- La prima e' gia' risolta:
 $x = 0$
- Risolvo la seconda:
 $x(a-2) + (a+2) = 0$
 porto il termine noto dopo l'uguale cambiandolo di segno
 $x(a-2) = -a-2$

Ora devo impostare la discussione:

- Se $a-2 \neq 0$, cioe' $a \neq 2$
 posso applicare il secondo principio e quindi divido entrambe i membri per $a-2$:

$$\frac{x(a-2)}{a-2} = \frac{-a-2}{a-2}$$

 semplifico ed ottengo:

$$x = \frac{-a-2}{a-2}$$

- Se $a-2 = 0$, cioè $a = 2$

allora non posso applicare il secondo principio e quindi sostituisco 2 al posto di a nell'equazione:

$$x(a-2) = -a-2$$

$$x(2-2) = -2-2$$

$$0 = -4 \text{ impossibile}$$

Ho quindi le soluzioni:

$$x_1 = 0 \quad \text{se } a \neq 2 \quad x_2 = \frac{-a-2}{a-2}$$

se $a = 2$ equazione impossibile

Esercizio 7

$$\frac{x-a}{a} = \frac{2a}{x+a}$$

Soluzione:

Intanto osserviamo l'equazione: abbiamo ai denominatori $x+a$ ed a . E' un' **equazione fratta** e, contemporaneamente, un' **equazione letterale**.

Prima di risolverla dobbiamo porre le condizioni di realta' e di possibilita'.

Nota: i due fattori a ed $x+a$ sono diversi per determinare la risolvibilita' dell'equazione:

il fatto di avere a al denominatore implica che al posto di a non posso mettere il valore zero (condizione di possibilita' dell'equazione) ed e' anteriore allo svolgimento dell'equazione

invece il fattore $x+a$ implica che la soluzione dell'equazione deve essere diversa da $-a$ (condizione di realta' dell'equazione) e va vista dopo aver risolto l'equazione

Condizione di possibilita': $a \neq 0$

Posso procedere solo se a e' diverso da zero

Condizione di realta' : $x+a \neq 0$ $x \neq -a$ Alla fine devo controllare se x e' diverso da a .

Ora possiamo fare il minimo comune multiplo e poi semplificarlo:

$$\text{m.c.m.} = a(x+a)$$

$$\frac{(x-a)(x+a) + 2a^2}{a(x+a)} = \frac{a(x+a)}{a(x+a)}$$

Elimino i denominatori:

Devo moltiplicare da entrambe le parti per $a(x+a)$; posso farlo per le condizioni poste all'inizio.

$$(x-a)(x+a) + 2a^2 = a(x+a)$$

Eseguo i calcoli, prima dell'uguale il prodotto notevole e dopo l'uguale il prodotto:

$$x^2 - a^2 + 2a^2 = ax + a^2$$

Convieni portare tutto prima dell'uguale:

$$x^2 - a^2 + 2a^2 - ax - a^2 = 0$$

Sommo i termini simili:

$$x^2 - ax = 0$$

Raccolgo a fattor comune x :

$$x(x-a) = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto la mia equazione equivale alle due equazioni:

$$x = 0$$

$$x - a = 0$$

- La prima e' gia' risolta:

$$x = 0$$

- Risolvo la seconda:

$$x - a = 0$$

porto $-a$ dopo l'uguale cambiandolo di segno

$$x = a$$

Controllo la condizione di realta', va tutto bene

Se $a \neq 0$ ho quindi le due soluzioni

con la condizione $a \neq 0$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = a$$

Esercizi sulle equazioni di secondo grado completeEsercizio 1

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \quad \text{soluzione:}$$

Prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 5$$

$$c = -14$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-14)}}{2(1)} =$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} =$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} =$$

$$= \frac{-5 \pm 9}{2} =$$

Adesso devo prendere una volta il più ed una volta il meno:

$$= \frac{-5 + 9}{2} = 2 \qquad = \frac{-5 - 9}{2} = -7$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -7$$

Esercizio 2

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \text{Soluzione:}$$

Possiamo risolverla

1. Con la formula normale
2. con la formula ridotta
3. Con un'osservazione (meglio)

se devi scegliere e' meglio risolvere con un'osservazione, se questo non e' possibile e' preferibile usare la formula ridotta piuttosto che la formula completa, anche perche', come potrai vedere confrontando i metodi, con la formula ridotta le operazioni vengono, di solito, semplificate

Consideriamo la formula risolutiva normale:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -6$$

$$c = 9$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} =$$

$$= \frac{+6 \pm \sqrt{0}}{2} =$$

$$= \frac{+6 \pm 0}{2} =$$

Adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno, ma essendo il secondo termine 0 non cambia:
nulla:

$$= \frac{6+0}{2} = 3 \qquad = \frac{6-0}{2} = 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$$

Essendo il **discriminante** dell'equazione uguale a zero abbiamo due radici reali e coincidenti.

Consideriamo la formula risolutiva ridotta ricordando che $\beta = b/2$:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -6 \qquad \beta = -3$$

$$c = 9$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{3^2 - (1)(9)}}{1}$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$= 3 \pm \sqrt{9 - 9} =$$

$$= 3 \pm \sqrt{0} = 3 \pm 0$$

Adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno, ma essendo il secondo addendo 0 non cambia nulla:

$$3 + 0 = 3$$

$$3 - 0 = 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$$

Essendo il **discriminante** dell'equazione uguale a zero abbiamo due radici reali e coincidenti.

Osserviamo l'equazione:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Il polinomio $x^2 - 6x + 9$ e' **scomponibile** come quadrato di un binomio:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

Quindi possiamo risolvere l'equazione:

$$(x-3)^2 = 0$$

che si scompone nelle due equazioni:

$$x - 3 = 0 \qquad x - 3 = 0$$

ed abbiamo come risultato:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$$

Da notare che questo ragionamento (del quadrato di un binomio) si puo' fare ogni volta che il discriminante dell'equazione vale zero, cioe':

Se il discriminante vale zero il polinomio associato all'equazione e' un quadrato perfetto.

Viceversa se il polinomio associato all'equazione e' un quadrato perfetto il discriminante vale zero.

Esercizio 3

$$5x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{Soluzione:}$$

Possiamo risolverla

1. con la formula normale

2. con la formula ridotta

E' preferibile usare la formula ridotta piuttosto che la formula completa, anche perche', come potrai vedere confrontando i metodi, con la formula ridotta le operazioni vengono, di solito, semplificate.

Consideriamo la formula risolutiva normale:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 5$$

$$b = -6$$

$$c = 5$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{+6 \pm \sqrt{6^2 - 4(5)(5)}}{2(5)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{10} =$$

$$= \frac{+6 \pm \sqrt{-64}}{10} =$$

Adesso devi comportarti diversamente a seconda del tuo programma:

- se non hai fatto i numeri complessi devi semplicemente dire che l'equazione non ammette soluzioni
- se invece hai fatto i **numeri complessi** puoi procedere e trovare le soluzioni complesse. Procediamo:

$$= \frac{6 \pm 8i}{10} =$$

Adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno, raccolgo sopra il 2 e semplifico con il denominatore:

$$\frac{2(3 + 4i)}{10} = \frac{3 + 4i}{5}$$

$$\frac{2(3 - 4i)}{10} = \frac{3 - 4i}{5}$$

Ho quindi le due soluzioni complesse e coniugate:

$$x_1 = \frac{3 + 4i}{5} \quad x_2 = \frac{3 - 4i}{5}$$

essendo il **discriminante** dell'equazione minore di zero abbiamo due complesse e coniugate.

Consideriamo la formula risolutiva ridotta; ricordando che $\beta = b/2$:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

abbiamo:

$$a = 5$$

$$b = -6 \quad \beta = -3$$

$$c = 5$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{3^2 - (5)(5)}}{5} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 25}}{5} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{-16}}{5}$$

adesso devi comportarti diversamente a seconda del tuo programma:

- se non hai fatto i numeri complessi devi semplicemente dire che l'equazione non ammette soluzioni
- se invece hai fatto i **numeri complessi** puoi procedere e trovare le soluzioni complesse.

Procediamo:

$$\frac{3 \pm 4i}{5} =$$

adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno:

$$\frac{3 + 4i}{5}$$

$$\frac{3 - 4i}{5}$$

Ho quindi le due soluzioni complesse e coniugate:

$$x_1 = \frac{3 + 4i}{5} \quad x_2 = \frac{3 - 4i}{5}$$

Essendo il **discriminante** dell'equazione minore di zero abbiamo due complesse e coniugate

Esercizio 4

$$3x - \frac{x^2 - 3x - 10}{3} + \frac{(x-2)^2}{2} = 0 \quad \text{Soluzione:}$$

Dobbiamo prima fare i calcoli: eseguiamo il quadrato:

$$3x - \frac{x^2 - 3x - 10}{3} + \frac{x^2 - 4x + 4}{2} = 0$$

ora facciamo il minimo comune multiplo che e' 6 :

$$\frac{18x - 2(x^2 - 3x - 10) + 3(x^2 - 4x + 4)}{6} = \frac{0}{6}$$

eseguiamo i prodotti

$$\frac{18x - 2x^2 + 6x + 20 + 3x^2 - 12x + 12}{6} = \frac{0}{6}$$

Adesso, essendo un'equazione posso moltiplicare prima e dopo l'uguale per 6, cioe' posso togliere i denominatori per il **secondo principio di equivalenza** :

$$18x - 2x^2 + 6x + 20 + 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

Sommo i termini simili:

$$x^2 + 12x + 32 = 0$$

Possiamo risolverla :

1. con la formula normale
2. con la formula ridotta

Consideriamo la formula risolutiva normale:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1 \quad b = 12 \quad c = 32$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(32)}}{2(1)}$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$\frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2}$$

$$\frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\frac{-12 \pm 4}{2}$$

Adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno:

$$\frac{-12 + 4}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\frac{-12 - 4}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -8$$

Consideriamo la formula risolutiva ridotta ricordando che $\beta = b/2$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

abbiamo:

$$a = 5$$

$$b = 12 \quad \beta = 6$$

$$c = 32$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - (1)(32)}}{(1)}$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$-6 \pm \sqrt{36 - 32}$$

$$-6 \pm \sqrt{4}$$

$$= -6 \pm 2 =$$

Adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno:

$$-6 + 2 = -4$$

$$-6 - 2 = -8$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -8$$

Esercizio 5

$$x^2 + x\sqrt{3} + x + \sqrt{3} = 0 \quad \text{soluzione:}$$

Prima devo metterla in forma di equazione, con un solo termine x^2 , un solo termine in x ed un solo termine noto; Raccolgo la x per indicare che faccio la somma:

$$x^2 + x(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 1 + \sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{3}$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(-1 - \sqrt{3})^2 - 4(1)(\sqrt{3})}}{2(1)}$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{1 + 3 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}}{2}$$

Adesso posso scegliere due strade:

- eseguire i calcoli e poi, per estrarre di radice, applicare la formula dei [radicali doppi](#)
- oppure (metodo consigliato) controllo, senza sommare, se posso individuare un quadrato senza scomodare la formula dei radicali doppi.
Questo metodo puo' sempre essere applicato, e basta un po' di esercizio per diventare veloci [per approfondire](#).

Potresti anche notare che facendo la somma entro radice cambia di segno solamente il doppio prodotto, quindi... Vediamo entrambe i metodi.

1. con i radicali doppi
2. ragionando sul quadrato

Per usare i radicali doppi continuiamo i calcoli:

$$= \frac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

calcoliamo il radicale doppio:

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

prima devo portare il 2 dentro radice:

$$\sqrt{4 - \sqrt{12}}$$

applico la [formula](#) dei radicali doppi:

$$= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{(16-12)}}{2}} - \sqrt{\frac{4 - \sqrt{(16-12)}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{4}}{2}} - \sqrt{\frac{4 - \sqrt{4}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}} =$$

$$= \sqrt{3} - 1$$

quindi posso scrivere:

$$x_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} - 1)}{2}$$

nota che ho messo la parentesi perche' quando prendero' il segno meno cambiera' di segno anche l'1 dentro parentesi.

Considero il piu':

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

considero il meno :

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

Otengo quindi le soluzioni :

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

Ragionare sul quadrato.

Dobbiamo trasformare l'espressione:

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} =$$

devo trasformare l'espressione in somma di radicali semplici.

Per farlo il termine dentro radice deve essere un quadrato, cioè $4 - 2\sqrt{3}$ e' il quadrato di un binomio in cui i due quadrati sono stati sommati; il doppio prodotto vale $2\sqrt{3}$ e quindi il prodotto e' $\sqrt{3}$ e la somma dei due quadrati deve essere 4; se il prodotto e' $\sqrt{3}$ i termini saranno $\sqrt{3}$ ed 1 ed infatti il loro quadrato e' $3 + 1 = 4$ quindi posso scrivere:

$$\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})} =$$

so che $4 = 3 + 1$:

$$= \sqrt{(3 + 1 - 2\sqrt{3})} =$$

scompongo il trinomio in un quadrato :

$$= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} =$$

e semplificando il radicale esterno con il quadrato ottengo:

$$= \sqrt{3} - 1$$

Poichè il quadrato trasforma tutti i segni in segni positivi, tornando indietro potrei fare $\sqrt{3} - 1$ ma anche $1 - \sqrt{3}$ allora dovrai avere l'avvertenza, quando in mezzo c'e' il segno meno, di mettere al primo posto il termine di valore maggiore quindi posso scrivere:

$$x_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} - 1)}{2} =$$

Nota che ho messo la parentesi perche' quando prendero' il segno meno cambiera' di segno anche l'1 dentro parentesi.

Considero il piu' :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Considero il meno:

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

Otengo quindi le soluzioni :

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

Esercizio 6

$$\sqrt{3}(x^2 - 1) = x + 2(x + \sqrt{3}) \quad \text{Soluzione:}$$

Prima devo sviluppare i calcoli; moltiplico:

$$x^2\sqrt{3} - \sqrt{3} = x + 2x + 2\sqrt{3}$$

porto tutti i termini prima dell'uguale:

$$x^2\sqrt{3} - \sqrt{3} - x - 2x - 2\sqrt{3} = 0$$

sommo i termini simili:

$$x^2\sqrt{3} - 3x - 3\sqrt{3} = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = \sqrt{3}$$

$$b = -3$$

$$c = -3\sqrt{3}$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(\sqrt{3})(-3\sqrt{3})}}{2(\sqrt{3})} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2\sqrt{3}} =$$

estraggo di radice ricordando che $45 = 3^2 \cdot 5$:

$$= \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} =$$

quindi abbiamo come prima radice:

$$x_1 = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} =$$

ora devo razionalizzare:

$$= \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{15}}{6} =$$

$$= \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{15})}{6} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$$

abbiamo come seconda radice:

$$x_2 = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} =$$

ora devo razionalizzare:

$$= \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{15}}{6} =$$

$$= \frac{3(\sqrt{3} - \sqrt{15})}{6} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$$

ottengo quindi le soluzioni:

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{15}}{2}$$

Esercizio 7

$$(x+a)(x-a) + x(x-2b) = (x+b)(x-b) \quad \text{soluzione:}$$

Prima devo sviluppare i calcoli; multiplico:

$$x^2 - a^2 + x^2 - 2bx = x^2 - b^2$$

porto tutti i termini prima dell'uguale:

$$x^2 - a^2 + x^2 - 2bx - x^2 + b^2 = 0$$

sommo i termini simili:

$$x^2 - 2bx + (b^2 - a^2) = 0$$

Ho messo tra parentesi $b^2 - a^2$ per indicare che e' un termine unico: il termine noto.

Possiamo risolverla:

1. con la formula normale
2. con la formula ridotta

se devi scegliere e' meglio risolvere con la formula ridotta piuttosto che la formula normale, anche perche', come potrai vedere confrontando i metodi, con la formula ridotta le operazioni vengono semplificate, soprattutto se il primo coefficiente vale 1.

Procediamo con la formula risolutiva normale:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$1^\circ \text{ coefficiente} = 1$$

$$2^\circ \text{ coefficiente} = -2b$$

$$\text{terzo coefficiente} = b^2 - a^2$$

ho messo 1°, 2° e 3° coefficiente per non confondere la **b** della formula con quella dopo l'uguale: la prima **b** indica il coefficiente generico della x nell'equazione, invece -2b e' il valore di quel coefficiente; avrei dovuto usare simboli diversi, ma renderei piu' complicata la simbologia.

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{(-2b)^2 - 4(1)(b^2 - a^2)}}{2(1)} =$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4b^2 + 4a^2}}{2} =$$

$$= \frac{2b \pm \sqrt{4a^2}}{2} =$$

estraggo di radice:

$$= \frac{2b \pm 2a}{2} =$$

raccolgo il 2 sopra e poi semplifico con sotto:

$$= \frac{2(b \pm a)}{2} =$$

$$= b \pm a$$

quindi abbiamo le soluzioni :

$$x_1 = b + a \quad x_2 = b - a$$

Consideriamo la formula risolutiva ridotta ricordando che $\beta = b/2$:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$2^\circ \text{ coeff.} = -2b \quad \beta = -b$$

$$c = b^2 - a^2$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(-b)^2 - (1)(b^2 - a^2)}}{1} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$= b \pm \sqrt{b^2 - b^2 + a^2} =$$

$$= b \pm \sqrt{a^2} =$$

$$= b \pm a$$

Quindi abbiamo le soluzioni:

$$x_1 = b + a \quad x_2 = b - a$$

Da notare che, anche se ci sono delle lettere, non abbiamo messo condizioni perche' non abbiamo mai diviso per una lettera.

Esercizio 8

$$\frac{a - 3x}{a} + \frac{a + 3x}{2a} = \frac{x^2 - ax}{b} \quad \text{Soluzione:}$$

Poniamo subito le condizioni per la possibilita' dell'equazione:

$$a \neq 0 \quad b \neq 0$$

ora facciamo il minimo comune multiplo 2ab:

$$\frac{2b(a - 3x) + b(a + 3x)}{2ab} = \frac{2a(x^2 - ax)}{2ab}$$

Tolgo i denominatori per il **secondo principio** di equivalenza: posso farlo perche' ho supposto che a e b sono diversi da zero:

$$2b(a - 3x) + b(a + 3x) = 2a(x^2 - ax)$$

eseguo i calcoli:

$$2ab - 6bx + ab + 3bx = 2ax^2 - 2a^2x$$

porto tutti i termini prima dell'uguale:

$$2ab - 6bx + ab + 3bx - 2ax^2 + 2a^2x = 0$$

sommo i termini simili:

$$-2ax^2 - 3bx + 2a^2x + 3ab = 0$$

cambio di segno:

$$2ax^2 + 3bx - 2a^2x - 3ab = 0$$

$$2ax^2 + x(3b - 2a^2) - 3ab = 0$$

applico la formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$1^\circ \text{ coefficiente} = 2a$$

$$2^\circ \text{ coefficiente} = 3b - 2a^2$$

$$3^\circ \text{ coefficiente} = -3ab$$

Attenzione a non confondere le a e la b della formula con quelle dell'equazione: le prime indicano i coefficienti generici dell'equazione, mentre a e b nell'equazione sono dei numeri; avrei dovuto usare simboli diversi, ma renderei piu' complicata la simbologia.

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(3b - 2a^2) \pm \sqrt{(3b - 2a^2)^2 - 4(2a)(-3ab)}}{2(2a)} =$$

fuori facciamo cadere la parentesi e facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{2a^2 - 3b \pm \sqrt{9b^2 + 4a^4 - 12a^2b + 24a^2b}}{4a} =$$

$$= \frac{2a^2 - 3b \pm \sqrt{9b^2 + 4a^4 + 12a^2b}}{4a} =$$

dentro radice e' un quadrato:

$$= \frac{2a^2 - 3b \pm \sqrt{(3b + 2a^2)^2}}{4a} =$$

semplifico la radice con il quadrato:

$$= \frac{2a^2 - 3b \pm (2a^2 + 3b)}{4a} =$$

ora devo scegliere una volta il piu' ed una volta il meno:

$$x_1 = \frac{2a^2 - 3b + 2a^2 + 3b}{4a} = \frac{4a^2}{4a} = a$$

$$x_2 = \frac{2a^2 - 3b - 2a^2 - 3b}{4a} = \frac{-6b}{4a} = -\frac{3b}{2a}$$

quindi abbiamo le soluzioni:

$$x_1 = a \quad x_2 = -\frac{3b}{2a}$$

Da notare che, anche se abbiamo diviso per 4a non abbiamo posto ulteriori condizioni perche' per la possibilita' dell'equazione avevamo posto a diverso da zero.

Trovare le equazioni di cui conosciamo il valore delle radici

Ti vengono forniti dei valori: devi trovare le equazioni di cui quei valori sono radici
Come esercizi sono molto semplici quindi ci limiteremo a quattro casi diversi.

Esercizio 1

$x_1 = 3$ $x_2 = 4$ Soluzione:

Facciamo riferimento alla [forma](#) dell'equazione di secondo grado:

$$x^2 - sx + p = 0$$

con s e p somma e prodotto delle radici:

$$s = x_1 + x_2 = 3 + 4 = 7$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 4 = 12$$

Otteniamo quindi:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Per verificare che hai fatto tutto giusto basta risolvere l'equazione.

Esercizio 2

$x_1 = 3$ $x_2 = -2$ soluzione:

Facciamo anche qui riferimento alla [forma](#) dell'equazione di secondo grado:

$$x^2 - sx + p = 0$$

con s e p somma e prodotto delle radici:

$$s = x_1 + x_2 = 3 + (-2) = 3 - 2 = 1$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-2) = -6$$

Otteniamo quindi:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Per verificare che hai fatto tutto giusto basta risolvere l'equazione :

Esercizio 3

$x_1 = \sqrt{3}$ $x_2 = 2\sqrt{3}$ soluzione:

Sempre per la [forma](#) dell'equazione di secondo grado:

$$x^2 - sx + p = 0$$

con s e p somma e prodotto delle radici:

$$s = x_1 + x_2 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{(3)^2} = 2 \cdot 3 = 6$$

Otteniamo quindi:

$$x^2 - 3x\sqrt{3} + 6 = 0$$

Per verificare che hai fatto tutto giusto basta risolvere l'equazione .

Esercizio 4

$$x_1 = b - a \quad x_2 = -b \quad \text{soluzione:}$$

Sempre per la [forma](#) dell'equazione di secondo grado

$$x^2 - sx + p = 0$$

con s e p somma e prodotto delle radici

$$s = x_1 + x_2 = b - a + (-b) = b - a - b = -a$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = (b-a) \cdot (-b) = -b^2 + ab = ab - b^2$$

Otteniamo quindi

$$x^2 + ax + ab - b^2 = 0$$

Per verificare che hai fatto tutto giusto basta risolvere l'equazione

Trovare due numeri di cui conosciamo la somma ed il prodotto:

Possiamo dire che sono gli esercizi inversi della pagina precedente: chiamiamo i due numeri x_1 e x_2 e consideriamoli come radici di un'equazione di secondo grado.

Conosci la somma ed il prodotto delle radici: devi trovare le radici .

I piu' semplici di questi esercizi potresti anche risolverli con la scomposizione: [trinomio notevole](#), pero' qui ti viene fornito un metodo generale per tutti i casi possibili.

Esercizio 1

$$x_1 + x_2 = 7 \quad x_1 \cdot x_2 = 12 \quad \text{Soluzione:}$$

Facciamo riferimento alla [forma](#) dell'equazione di secondo grado:

$$x^2 - sx + p = 0$$

con s e p somma e prodotto delle radici:

$$s = x_1 + x_2 = 7$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = 12$$

Otteniamo l'equazione

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

per trovare i due numeri risolviamo l'equazione

applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -7$$

$$c = 12$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} =$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{7 \pm 1}{2} =$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu' :

$$= \frac{7 - 1}{2} = 3$$

$$= \frac{7 + 1}{2} = 4$$

quindi i due numeri cercati sono (cerco sempre di ordinarli chiamando x_1 il minore):

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 4$$

Puoi verificare che hai fatto giusto facendone semplicemente la somma ed il prodotto.

Esercizio n. 2

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \quad x_1 \cdot x_2 = -6 \quad \text{soluzione:}$$

Facciamo sempre riferimento alla [forma](#) dell'equazione di secondo grado:

$$x^2 - sx + p = 0$$

con s e p somma e prodotto delle radici:

$$s = x_1 + x_2 = 1$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = -6$$

Otteniamo l'equazione:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

per trovare i due numeri risolviamo l'equazione:

applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = -6$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} =$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm 5}{2} =$$

Adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu':

$$x_1 = \frac{1 - 5}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

Quindi i due numeri cercati sono (cerco sempre di ordinarli chiamando x_1 il minore) :

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$$

Puoi verificare che hai fatto giusto facendone semplicemente la somma ed il prodotto.

Esercizio 3

$$x_1 + x_2 = 3\sqrt{3} \quad x_1 \cdot x_2 = 6 \quad \text{soluzione:}$$

Facciamo sempre riferimento alla [forma](#) dell'equazione di secondo grado:

$$x^2 - sx + p = 0$$

con s e p somma e prodotto delle radici:

$$s = x_1 + x_2 = 3\sqrt{3}$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = 6$$

Otteniamo l'equazione:

$$x^2 - 3x\sqrt{3} + 6 = 0$$

per trovare i due numeri risolviamo l'equazione.

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -3\sqrt{3}$$

$$c = 6$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

facciamo i calcoli dentro radice :

$$= \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 24}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2}$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu':

$$x_1 = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

quindi i due numeri cercati sono (cerco sempre di ordinarli chiamando x_1 il minore):

$$x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = 2\sqrt{3}$$

Puoi verificare che hai fatto giusto facendone semplicemente la somma ed il prodotto.

Esercizio 4

$$x_1 + x_2 = -a \quad x_1 \cdot x_2 = ab - b^2 \quad \text{soluzione:}$$

Facciamo sempre riferimento alla [forma](#) dell'equazione di secondo grado:

$$x^2 - sx + p = 0$$

con s e p somma e prodotto delle radici:

$$s = x_1 + x_2 = -a$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = ab - b^2$$

Otteniamo l'equazione:

$$x^2 + ax + ab - b^2 = 0$$

per trovare i due numeri risolviamo l'equazione:
 applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = a$$

$$c = ab - b^2$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(1)(ab - b^2)}}{2(1)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice

$$= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{2} =$$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{(a - 2b)^2}}{2} =$$

$$= \frac{-a \pm (a - 2b)}{2} =$$

adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno:

$$x_1 = \frac{-a + a - 2b}{2} = \frac{-2b}{2} = -b$$

$$x_1 = \frac{-a - a + 2b}{2} = \frac{-2a + 2b}{2} = \frac{2(-a + b)}{2} = b - a$$

Quindi i due numeri cercati sono:

$$x_1 = -b \quad x_2 = b - a$$

Puoi verificare che hai fatto giusto facendone semplicemente la somma ed il prodotto.

Semplificazione di frazioni

In pratica se hai delle frazioni puoi utilizzare le equazioni di secondo grado per scomporre in fattori e poi semplificare numeratore e denominatore.

In pratica usi la [decomposizione del trinomio](#); l'unica difficoltà può venire dal come utilizzare il primo coefficiente per la scomposizione; vediamo alcuni esercizi.

Scomporre, fin dove possibile, le seguenti frazioni algebriche:

Esercizio 1

$$\frac{6x^2 - 2x - 8}{3x^2 + 8x - 16} = \text{soluzione:}$$

Per scomporre applichiamo la regola della [decomposizione del trinomio](#).

Nota: quando possibile useremo sempre la formula ridotta.

Troviamo le radici delle equazioni [associate](#) ai polinomi della frazione:

- risolvo la prima equazione:

$$6x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \text{Calcoli:}$$

Applico la formula ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}$$

Abbiamo:

$$\alpha = 6$$

$$\beta = -2 \quad \gamma = -1$$

$$c = -8$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 6(-8)}}{6} =$$

Eseguo i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{1 \pm 7}{6} =$$

Adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il più :

$$x_1 = \frac{1-7}{6} = -1 \quad x_2 = \frac{1+7}{6} = \frac{4}{3}$$

Ho le soluzioni:

$$x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

Quindi posso scomporre come:

$$6x^2 - 2x - 8 = 6(x+1)\left(x - \frac{4}{3}\right) = 2(x-1)(3x-4)$$

Da notare che nell'ultimo passaggio dal 6 iniziale ho tolto il 3 per moltiplicarlo per il secondo fattore in modo da non avere frazioni.

- risolvo la seconda equazione:

$$3x^2 + 8x - 16 = 0 \quad \text{Calcoli:}$$

Applico la formula ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

Abbiamo:

$$a = 3$$

$$b = 8 \quad \beta = 4$$

$$c = -16$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 3(-16)}}{3} =$$

Eseguo i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{3} = \frac{-4 \pm 8}{3} =$$

Adesso devo prendere una volta il più ed una volta il meno :

$$x_1 = \frac{-4+8}{3} = \frac{4}{3} \quad x_2 = \frac{-4-8}{6} = -4$$

Ho le soluzioni:

$$x_1 = -4 \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

Quindi posso scomporre come:

$$3x^2 + 8x - 16 = 3(x+4)\left(x - \frac{4}{3}\right) = (x+4)(3x-4)$$

Da notare che nell'ultimo passaggio ho moltiplicato il 3 iniziale per il secondo fattore in modo da non avere frazioni

Quindi ho:

$$\frac{6x^2 - 2x - 8}{3x^2 + 8x - 16} = \frac{2(x-1)(3x-4)}{(x+4)(3x-4)} = \frac{2(x-1)}{(x+4)}$$

Esercizio 2

$$\frac{(6x^2 - 5x + 1)(4x^2 - 9x + 2)}{(3x^2 - 7x + 2)(8x^2 - 6x + 1)} = \text{soluzione:}$$

Per scomporre applichiamo la regola della **decomposizione del trinomio**

Nota: quando possibile useremo sempre la formula ridotta

Troviamo le radici delle equazioni **associate** ai polinomi componenti:

- risolvo la prima equazione associata al primo polinomio al numeratore:

$$6x^2 - 5x + 1 = 0 \quad \text{Calcoli:}$$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 6$$

$$b = -5$$

$$c = 1$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(6)(1)}}{2 \cdot 6} =$$

Eseguo i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} =$$

Adesso devo prendere una volta il più ed una volta il meno :

$$x_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3}$$

Ho le soluzioni :

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Quindi posso scomporre come:

$$6x^2 - 5x + 1 = 6 \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) = (2x - 1)(3x - 1)$$

Da notare che nell'ultimo passaggio ho diviso il 6 iniziale in 2·3 in modo da moltiplicare 2 per il primo fattore e 3 per il secondo fattore così da non avere frazioni.

- risolvo la seconda equazione associata al secondo polinomio al numeratore

$$4x^2 - 9x + 2 = 0 \quad \text{Calcoli:}$$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 4$$

$$b = -9$$

$$c = 2$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(4)(2)}}{2 \cdot 4} =$$

Eseguo i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{9 \pm 7}{8} =$$

Adesso devo prendere una volta il più ed una volta il meno :

$$x_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad x_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

Ho le soluzioni:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

Quindi posso scomporre come:

$$4x^2 - 9x + 2 = 4 \left(x - 2\right) \left(x - \frac{1}{4}\right) = (x - 2)(4x - 1)$$

Da notare che nell'ultimo passaggio ho moltiplicato il 4 per il secondo fattore così da non avere frazioni.

- risolvo la terza equazione associata al primo polinomio al denominatore

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \quad \text{Calcoli:}$$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 3$$

$$b = -7$$

$$c = 2$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2 \cdot 3} =$$

Esegui i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} =$$

Adesso devo prendere una volta il più ed una volta il meno :

$$x_1 = \frac{7+5}{6} = 2 \quad x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$$

Ho le soluzioni:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Quindi posso scomporre come:

$$6x^2 - 5x + 1 = 6 \left(x - 2\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) = (x - 2)(3x - 1)$$

Da notare che nell'ultimo passaggio ho moltiplicato il 3 per il secondo fattore così da non avere frazioni.

- risolvo la quarta equazione associata al secondo polinomio al denominatore

$$8x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \text{Calcoli:}$$

Applico la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}$$

Abbiamo:

$$a = 8$$

$$b = -6 \quad \beta = -3$$

$$c = 1$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(8)}}{8} =$$

Esegui i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{-23}}{8} = \frac{3 \pm i\sqrt{23}}{8} =$$

Adesso devo prendere una volta il più ed una volta il meno :

$$x_1 = \frac{3+i\sqrt{23}}{8} \quad x_2 = \frac{3-i\sqrt{23}}{8}$$

Ho le soluzioni:

$$x_1 = \frac{3+i\sqrt{23}}{8} \quad x_2 = \frac{3-i\sqrt{23}}{8}$$

Quindi posso scomporre come:

$$8x^2 - 6x + 1 = 8 \left(x - \frac{3+i\sqrt{23}}{8}\right) \left(x - \frac{3-i\sqrt{23}}{8}\right) = (2x - 1)(4x - 1)$$

Da notare che nell'ultimo passaggio ho diviso l'8 iniziale in 2·4 in modo da moltiplicare 2 per il primo fattore e 4 per il secondo fattore così da non avere frazioni.

Quindi ho:

$$\frac{(6x^2 - 5x + 1)(4x^2 - 9x + 2)}{(3x^2 - 7x + 2)(8x^2 - 6x + 1)} = \frac{(2x-1)(3x-1)(x-2)(4x-1)}{(x-2)(3x-1)(2x-1)(4x-1)} = 1$$

Esercizio 3

$$\frac{6x^2 - x\sqrt{3} - 6}{3x^2 + 4x\sqrt{3} - 12} = \quad \text{Soluzione:}$$

Per scomporre applichiamo la regola della **decomposizione del trinomio**.

Nota: quando possibile useremo sempre la formula ridotta.

Troviamo le radici delle equazioni **associate** ai polinomi della frazione:

- risolvo la prima equazione

$$6x^2 - x\sqrt{3} - 6 = 0 \quad \text{Calcoli:}$$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 6$$

$$b = -\sqrt{3}$$

$$c = -6$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 4(6)(-6)}}{2 \cdot 6} =$$

Eseguo i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 144}}{12} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{147}}{12} =$$

scompongo in fattori e poi estraggo di radice:

$$= \frac{\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{12} =$$

Adesso devo prendere una volta il più ed una volta il meno :

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} + 7\sqrt{3}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} - 7\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ho le soluzioni:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi posso scomporre come:

$$6x^2 - x\sqrt{3} - 6 = 6 \left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (3x - 2\sqrt{3})(2x + \sqrt{3})$$

Da notare che nell'ultimo passaggio ho scomposto il 6 iniziale in 3·2 ed ho moltiplicato il 3 per il primo fattore ed il 2 per il secondo in modo da non avere frazioni.

- risolvo la seconda equazione

$$3x^2 + 4x\sqrt{3} - 12 = 0 \quad \text{Calcoli:}$$

Applico la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

Abbiamo:

$$a = 3$$

$$b = -4\sqrt{3} \quad \beta = -2\sqrt{3}$$

$$c = -12$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 3(-12)}}{3} =$$

Eseguo i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 36}}{3} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{3} =$$

scompongo in fattori e poi estraggo di radice:

$$= \frac{2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{3} =$$

Adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il più :

$$x_1 = \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = \frac{2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Ho le soluzioni:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = 2\sqrt{3}$$

Quindi posso scomporre come:

$$3x^2 + 4x\sqrt{3} - 12 = 3 \left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) (x + 2\sqrt{3}) = (3x - 2\sqrt{3}) (x + 2\sqrt{3})$$

Da notare che nell'ultimo passaggio ho moltiplicato il 3 iniziale per il primo fattore in modo da non avere frazioni.

Quindi ho:

$$\frac{6x^2 - x\sqrt{3} - 6}{3x^2 + 4x\sqrt{3} - 12} = \frac{(3x - 2\sqrt{3})(2x + \sqrt{3})}{(3x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})} = \frac{2x + \sqrt{3}}{x + 2\sqrt{3}}$$

Esercizio 4

$$\frac{6x^2 - ax - 2a^2}{3x^2 + 4ax - 4a^2} = \quad \text{Soluzione:}$$

Per scomporre applichiamo la regola della [decomposizione del trinomio](#).
Nota: quando possibile useremo sempre la formula ridotta

Troviamo le radici delle equazioni [associate](#) ai polinomi della frazione:

- risolvo la prima equazione

$$6x^2 - ax - 2^2 = 0 \quad \text{Calcoli:}$$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 6$$

$$b = -a$$

$$c = -2a^2 \quad \text{Attenzione a non confondere i simboli prima dell'uguale con quelli dopo l'uguale}$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-a) \pm \sqrt{a^2 + 48a^2}}{2 \cdot 6} =$$

Esegui i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{49a^2}}{12} = \frac{a \pm 7a}{12} =$$

Adesso devo prendere una volta il più ed una volta il meno :

$$x_1 = \frac{a + 7a}{12} = \frac{8a}{12} = \frac{2}{3}a \quad x_2 = \frac{a - 7a}{12} = \frac{-6a}{12} = -\frac{1}{2}a$$

Ho le soluzioni:

$$x_1 = \frac{2a}{3} \quad x_2 = -\frac{1}{2}a$$

Quindi posso scomporre come:

$$6x^2 - ax - 2a^2 = 6 \left(x - \frac{2a}{3} \right) \left(x + \frac{a}{2} \right) = (3x - 2a) (2x + a)$$

- risolvo la seconda equazione

$$3x^2 + 4ax - 4a^2 = 0 \quad \text{Calcoli:}$$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

Abbiamo:

$$a =$$

$$b = 4a \quad \beta = 2a$$

$$c = -4a^2 \quad \text{Attenzione a non confondere i simboli prima dell'uguale con quelli dopo l'uguale}$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 3(-4a^2)}}{3} =$$

Esegui i calcoli:

$$x_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 12a^2}}{3} = \frac{-2a \pm \sqrt{16a^2}}{3} = \frac{-2a \pm 4a}{3} =$$

Adesso devo prendere una volta il più ed una volta il meno :

$$x_1 = \frac{-2a + 4a}{3} = \frac{2}{3}a \quad x_2 = \frac{-2a - 4a}{3} = -2a$$

Ho le soluzioni:

$$x_1 = \frac{2a}{3} \quad x_2 = -2a$$

Quindi posso scomporre come:

$$3x^2 + 4a^2 = 3 \left(x - \frac{2a}{3} \right) (x + 2a) = (3x - 2a) (x + 2a)$$

Quindi ho:

$$\frac{6x^2 - ax - 2a^2}{3x^2 + 4ax - 4a^2} = \frac{(3x - 2a)(2x + a)}{(3x - 2a)(x + 2a)} = \frac{(2x + a)}{(x + 2a)}$$

(d) Equazioni di secondo grado con parametro

Sono esercizi che vengono spesso utilizzati dagli insegnanti soprattutto perché costringono l'alunno ad utilizzare un tipo di ragionamento "comparativo" possibile solo se ha appreso certe nozioni fondamentali sulle equazioni di secondo grado.

Per risolvere bene questi esercizi devi tener presenti le seguenti equivalenze:

Soluzioni coincidenti	$\Delta = b^2 - 4ac = 0$
Una soluzione nulla	Equazione spuria $c = 0$
Soluzioni opposte (la somma delle radici vale zero)	Equazione pura $b = 0$
Soluzioni inverse (il prodotto delle radici vale uno)	$\frac{c}{a} = 1$
Il prodotto delle radici vale un numero, ad esempio 5	$\frac{c}{a} = 5$
La somma delle radici vale un numero, ad esempio 6	$\frac{b}{a} = 6$

Questi sono i casi fondamentali: ne puoi aggiungere altri combinando questi fra loro; ad esempio:

la somma dei quadrati degli inversi delle radici vale 4

Sarebbe a dire:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 4$$

Faccio il m.c.m. prima dell'uguale:

$$\frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = 4$$

Sopra aggiungo e tolgo il doppio prodotto $2x_1x_2$ per farlo diventare un quadrato, sotto posso considerarlo come quadrato del prodotto:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2}{(x_1 x_2)^2} = 4$$

$$\frac{k-2}{k+1} = 1$$

Per poterla risolvere dobbiamo porre la condizione di realta':

C.R. $k+1 \neq 0 \quad k \neq -1$

ora posso fare il m.c.m. e togliere il denominatore (e' piu' semplice moltiplicare in croce):

$$k-2 = k+1$$

$$k-k = 2+1$$

$$0 = 3$$

equazione impossibile, quindi non esiste un valore di k che verifichi la condizione richiesta:

- la somma degli inversi delle radici valga 3 **Soluzione:**

Trovare il valore di k affinche' la somma degli inversi delle radici valga 3
cioe' dovremo avere

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$$

dobbiamo avere la somma $(-b/a)$ ed il prodotto (c/a) delle radici quindi facciamo qualche calcolo: eseguo il minimo comune multiplo prima dell'uguale

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3$$

sostituisco alla somma $-b/a$ ed al prodotto c/a ed ottengo

$$\frac{-b/a}{c/a} = 3$$

$$\frac{b}{a} = 3$$

cioe' moltiplicando il numeratore per l'inverso del denominatore

$$\frac{b}{a} = 3$$

quindi semplificando

$$\frac{-b}{c} = 3$$

abbiamo

$$a = k+1$$

$$b = -2k$$

$$c = k-2$$

quindi sostituendo

$$\frac{-b}{c} = 3$$

devo risolvere l'equazione

$$\frac{2k}{k-2} = 3$$

Per poterla risolvere dobbiamo porre la condizione di realta'

C.R. $k-2 \neq 0 \quad k \neq 2$

ora posso fare il m.c.m. e togliere il denominatore (e' piu' semplice moltiplicare in croce)

$$2k = 3(k-2)$$

$$2k = 3k - 6$$

$$2k - 3k = -6$$

$$-k = -6$$

$$k = 6$$

quindi l'equazione che soddisfa alla condizione si ottiene per $k=6$ cioe'

$$(6+1)x^2 - 2(6)x + 6 - 2 = 0$$

$$7x^2 - 12x + 4 = 0$$

Esercizio 2

Data l'equazione

$$kx^2 - (k-2)x + 1 = 0$$

trovare il valore di k affinche':

- la somma delle radici valga 5 **Soluzione:**

Trovare il valore di k affinche' la somma delle radici valga 5 significa:

$$\frac{b}{a} = 5$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{5}$$

abbiamo

$$a = k$$

$$b = -(k-2)$$

$$c = 1$$

quindi sostituendo

$$\frac{b}{a} = \frac{-(k-2)}{k} = 5$$

risolvo l'equazione (supponendo k diverso da zero per le condizioni di realta')

$$\frac{k-2}{k} = 5$$

$$k - 2 = 5k$$

$$k - 5k = 2$$

$$-4k = 2$$

$$4k = -2$$

$$k = -1/2$$

Quindi sostituendo a k il valore -1/2 si ottiene la condizione desiderata

- il prodotto delle radici valga 6

Soluzione:

Trovare il valore di k affinché il prodotto delle radici valga 6 significa:

$$\frac{c}{a} = 6$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{6}$$

Abbiamo:

$$a = k$$

$$b = -(k-2)$$

$$c = 1$$

quindi sostituendo:

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{k} = 6$$

$$\frac{a}{c} = k = \frac{1}{6}$$

risolvo l'equazione (supponendo k diverso da zero per le condizioni di realta') :

$$1 = 6k$$

$$6k = 1$$

$$k = 1/6$$

$$k = 1/6$$

$$6k = 1$$

$$k = 1/6$$

quindi per il valore k=1/6 il prodotto delle radici vale 6:

- la somma dei quadrati delle radici valga 5 **Soluzione:**

Trovare il valore di k affinché la somma dei quadrati delle radici valga 5 significa

$$x_1^2 + x_2^2 = 5$$

dobbiamo trasformare in somme e prodotti delle radici, quindi aggiungo e tolgo $2x_1x_2$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 5$$

cioè

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$$

siccome abbiamo

$$a = k$$

$$b = -(k-2)$$

$$c = 1$$

ricordando che

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a} = \frac{-(k-2)}{k} = \frac{2-k}{k}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{k}$$

sostituendo ho l'equazione

$$\left(\frac{2-k}{k}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{k} = 5$$

$$\begin{array}{r} k^2 \\ (k-2)^2 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{r} k \\ 2 \\ \hline \end{array} = 5$$

m.c.m. = k^2 supponendo che k sia diverso da zero

$$\begin{array}{r} (k-2)^2 - 2k \\ \hline k^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5k^2 \\ - \\ - \\ - \\ k^2 \end{array}$$

ed eliminando i denominatori

$$(k-2)^2 - 2k = 5k^2$$

sviluppo

$$k^2 - 4k + 4 - 2k = 5k^2$$

$$k^2 - 5k^2 - 6k + 4 = 0$$

$$-4k^2 - 6k + 4 = 0$$

cambio di segno

$$4k^2 + 6k - 4 = 0$$

semplifico dividendo per 2

$$2k^2 + 3k - 2 = 0$$

equazione di secondo grado: applico la formula risolutiva

$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{[(3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)]}}{4}$$

$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

ho quindi le due soluzioni

$$k_1 = -2 \quad k_2 = 1/2$$

- $x_1 + 3x_2 = 7$ Soluzione:

Trovare il valore di k affinché'

$$x_1 + 3x_2 = 7$$

in questo caso non e' possibile trasformare in modo semplice la relazione in somma e prodotto delle radici, quindi e' piu' conveniente risolvere un sistema fra le tre equazioni seguenti:

- la relazione data
- la somma delle radici
- il prodotto delle radici

abbiamo le tre incognite x_1 , x_2 e k e quindi risolvendo ne troveremo il valore (e' sufficiente trovare il solo valore di k)

Nota: questo metodo di utilizzare un sistema di tre equazioni in tre incognite e' applicabile ad ogni problema e potrebbe essere utilizzato come metodo generale, pero' se guardi i calcoli vedi che sono piuttosto lunghi e complicati, quindi sara' usato solamente quando non si potra' fare diversamente

nel nostro caso abbiamo

$$a = k$$

$$b = -(k-2)$$

$c = 1$

quindi la somma

$$b \quad -(k-2)$$

$$x_1 + x_2 =$$

a k

mi da' la relazione

$$kx_1 + kx_2 = k-2$$

invece il prodotto

c 1

$$----- = X_1 \cdot X_2 = -----$$

a k

mi da' la relazione

$$kx_1 \cdot x_2 = 1$$

Ora posso impostare il sistema

$$\begin{cases} x^1 + 3x^2 = 7 \\ kx_1 + kx_2 = k - 2 \\ kx^1 \cdot x^2 = 1 \end{cases}$$

Risolvere il sistema:

Ricavo x_1 dalla prima e sostituisco nella seconda e nella terza:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 + 7 \\ k(-3x_2 + 7) + kx_2 = k - 2 \\ k(-3x_2 + 7) \cdot x^2 = 1 \end{cases}$$

Esegui i calcoli nella seconda e nella terza; al posto della prima metto una linea:

$$\begin{cases} -3kx_2 + 7k + kx_2 - k + 2 = 0 \\ -3kx_2^2 + 7kx^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2kx_2 + 6k + 2 = 0 \\ -3kx_2^2 + 7kx^2 = 1 \end{cases}$$

divido la seconda equazione per -2

$$\begin{cases} kx^2 - 3k - 1 = 0 \\ -3kx_2^2 + 7kx^2 = 1 \end{cases}$$

ricavo x_2 dalla seconda e sostituisco nella terza (conviene lasciare per ultima la k perché a noi interessa solo quella e la troviamo subito; non siamo interessati ai valori di x_1 ed x_2):

$$\begin{cases} x_2 = (3k + 1)/k \\ -3k(3k + 1)^2/k^2 + 7k(3k + 1)/k = 1 \end{cases}$$

Essendo interessato solamente ai valori di k , considero solamente la terza equazione:

$$-3k \frac{(3k + 1)^2}{k^2} + 7k \frac{(3k + 1)}{k} = 1$$

semplifico i k al numeratore e al denominatore:

$$-3 \frac{(3k + 1)^2}{k} + 7(3k + 1) = 1$$

supponendo k diverso da zero faccio il minimo comune multiplo poi tolgo i denominatori uguali:

$$\frac{-3(3k + 1)^2 + 7k(3k + 1)}{k} = \frac{k}{k}$$

$$-3(3k + 1)^2 + 7k(3k + 1) = k$$

esegui i calcoli:

$$-3(9k^2 + 6k + 1) + 21k^2 + 7k = k$$

$$-27k^2 - 18k - 3 + 21k^2 + 7k - k = 0$$

$$-6k^2 - 12k - 3 = 0$$

divido tutto per -3:

$$2k^2 + 4k + 1 = 0$$

Risolvere l'equazione; applico la formula ridotta:

$$k_{1,2} = \frac{-(b/2) \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$$

Abbiamo:

$$a = 2$$

$$b = 4 \quad b/2 = 2$$

$$c = 1$$

$$k_{1,2} = \frac{-(2) \pm \sqrt{2^2 - (1)(2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il più ed ottengo le soluzioni:

$$k_1 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \quad k_2 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 3

Data l'equazione:

$$kx^2 - kx + k + 2 = 0$$

Trovare il valore di k affinché:

- il rapporto delle radici valga $1/2$

Soluzione:

Trovare il valore di k affinché il rapporto delle radici valga $1/2$ significa che:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 2x_1$$

cioè

$$x_2 = 2x_1$$

Ripeto l'avvertenza della quarta parte dell'esercizio precedente

in questo caso non è possibile trasformare in modo semplice la relazione in somma e prodotto delle radici, quindi è più conveniente risolvere un sistema fra le tre equazioni seguenti:

- la relazione data
- la somma delle radici

- il prodotto delle radici
abbiamo le tre incognite x_1 , x_2 e k e quindi risolvendo ne troveremo il valore (e' sufficiente trovare il solo valore di k)

Nota: questo metodo di utilizzare un sistema di tre equazioni in tre incognite e' applicabile ad ogni problema e potrebbe essere utilizzato come metodo generale, pero' se guardi i calcoli vedi che sono piuttosto lunghi e complicati, quindi sara' usato solamente quando non si potra' fare diversamente

nel nostro caso abbiamo

$$a = k$$

$$b = -k$$

$$c = k+2$$

quindi la somma

b		- k
----- = $x_1 + x_2 =$ -----		
a		k

mi da' la relazione

$$x_1 + x_2 = 1$$

invece il prodotto

c		k + 2
----- = $x_1 \cdot x_2 =$ -----		
a		k

mi da' la relazione

$$kx_1x_2 = k+2$$

Ora posso impostare il sistema:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ kx_1x_2 = k+2 \end{cases}$$

che per k mi da' la soluzione

$$k = -18/7$$

- una radice sia tripla dell'altra

Soluzione:

Trovare il valore di k affinche' una radice sia tripla dell'altra significa che:

$$x_2 = 3x_1$$

anche qui conviene risolvere un sistema fra le tre equazioni seguenti:

- la relazione data
 - la somma delle radici
 - il prodotto delle radici
- Nel nostro caso abbiamo:

$$a = k$$

$$b = -k$$

$$c = k+2$$

Quindi la somma:

b		- k
----- = $x_1 + x_2 =$ -----		
a		k

mi da' la relazione

$$x_1 + x_2 = 1$$

invece il prodotto

c		k + 2
----- = $x_1 \cdot x_2 =$ -----		
a		k

mi da' la relazione

$$kx_1x_2 = k+2$$

Ora posso impostare il sistema

$$x_2 = 3x_1$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$kx_1x_2 = k+2$$

che per k mi da' la soluzione:

$$k = -32/13$$

- una radice sia uguale al reciproco dell'altra

Soluzione:

Trovare il valore di k affinche' una radice sia uguale al reciproco dell'altra significa che:

	1
$x_1 =$	-----
	x_2

cioe'

$$x_1x_2 = 1$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{aligned} a &= k \\ b &= -k \\ c &= k+2 \end{aligned}$$

quindi posso impostare la relazione che il prodotto vale 1:

$$\begin{aligned} c &= k+2 \\ \frac{c}{a} &= \frac{k+2}{k} = 1 \end{aligned}$$

Otengo:

$$\begin{aligned} k+2 &= k \\ k-k &= 2 \\ 0 &= 2 \end{aligned}$$

equazione impossibile quindi non esiste nessun valore di k per cui una soluzione diventa inversa dell'altra.

- la somma dei quadrati degli inversi delle radici valga 4 **Soluzione:**

Trovare il valore di k affinché la somma dei quadrati degli inversi delle radici valga 4 significa che:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 4$$

faccio il m.c.m. prima dell'uguale:

$$\frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = 4$$

sopra aggiungo e tolgo il doppio prodotto $2x_1x_2$ per farlo diventare un quadrato, sotto posso considerarlo come quadrato del prodotto:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = 4$$

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = 4$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} a &= k \\ b &= -k \\ c &= k+2 \end{aligned}$$

quindi la somma:

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = \frac{-k}{k}$$

mi da' la relazione

$$x_1 + x_2 = 1$$

Il prodotto vale:

$$\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = \frac{k+2}{k}$$

Sostituendo ottengo:

$$\frac{(1)^2 - 2 \frac{k+2}{k}}{\frac{(k+2)^2}{k^2}} = 4$$

$$1 - \frac{2k+4}{k} = 4 \frac{(k+2)^2}{k^2}$$

$$\frac{k - 2k - 4}{k} = \frac{4(k^2 + 4k + 4)}{k^2}$$

$$\frac{-k - 4}{k} = \frac{4k^2 + 16k + 16}{k^2}$$

faccio il m.c.m.:

$$\frac{-k^2 - 4}{k^2} = \frac{4k^2 + 16k + 16}{k^2}$$

elimino i denominatori supponendo $k \neq 0$

$$k^2 - 4k = 4k^2 + 16k + 16$$

$$-5k^2 - 20k - 16 = 0$$

cambio segno

$$5k^2 + 20k + 16 = 0$$

Applico la formula risolutiva ed ottengo le due soluzioni:

$$k = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{5}$$

(1) Discussione di equazioni con parametro

Se cerchi le equazioni con parametro senza discussione guarda la [pagina precedente](#).

Questo argomento era essenziale quando ero alunno io: in tutti i compiti d'esame del liceo scientifico in quel periodo c'era sempre una discussione; oggi questa parte della matematica, forse perché troppo tecnica, è ormai trascurata.

(a) Introduzione

Come argomento è "trasversale"; cioè, partendo dalle equazioni di secondo grado, può essere applicato a vari problemi di diversi rami della matematica e quindi richiede conoscenze di geometria analitica, di algebra, di trigonometria.

Sviluppo qui le varie applicazioni senza frammentarle nelle varie discipline; naturalmente, per alcuni argomenti, dovrai prima aver studiato la parte di teoria relativa: in cima ad ogni parte indicherò quali sono gli argomenti da sapere (con una parolona: prerequisiti) per seguire il ragionamento.

Un' **equazione con parametro** è un'equazione in cui compare una lettera: al variare della lettera varierà il valore delle soluzioni.

La **discussione** di un'equazione con parametro è il confrontare le possibili soluzioni con uno o più valori assegnati in modo da controllare per quali valori del parametro tali soluzioni sono comprese in prefissati intervalli.

Questo serve quando fai un problema e le soluzioni che cerchi debbono rispettare certi limiti come ad esempio essere maggiori di un dato numero altrimenti un radicale non ti dà soluzioni, oppure comprese in un intervallo in modo che un punto di una figura geometrica non esca dalla figura stessa, eccetera.

Ne vedrai esempi nella discussione di un problema.

(b) Discussione di equazioni di primo grado

Solitamente è un argomento che viene saltato: in molte scuole si passa subito alla discussione di equazioni di secondo grado.

Pero' la discussione di equazioni di primo grado può servire a capire meglio quella delle equazioni di secondo grado.

Se vuoi passare subito alla [discussione di equazioni di secondo grado](#)

Ci limiteremo a confrontare la soluzione dell'equazione con un valore dato.

- [Metodo diretto](#)
- [Metodo grafico](#)

(i) Metodo diretto

Basta semplicemente confrontare la radice dell'equazione con il numero od i numeri dati. Vediamolo su un semplice esempio.

Discutere l'equazione

$$2x + k - 1 = 0$$

rispetto alla condizione

$$x > 2$$

In pratica devo vedere quali valori assegnare a k affinché la soluzione sia maggiore di 2 trovo la soluzione

$$2x + k - 1 = 0$$

$$2x = 1 - k$$

$$x = \frac{1 - k}{2}$$

ora pongo la soluzione maggiore di 2:

$$\frac{1 - k}{2} > 2$$

$$1 - k > 4$$

$$-k > 4 - 1$$

$$-k > 3$$

cambio di segno e verso:

$$k < -3$$

quindi se prendiamo k minore di -3 avremo che la soluzione x sarà maggiore di 2.

(ii) Metodo grafico

Consideriamo la corrispondenza (fare link a significato geometrico di un sistema) fra l'equazione di primo grado $ax+b=0$ ed il sistema:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = 0 \end{cases}$$

Questo si può rappresentare graficamente come una retta che taglia l'asse delle x nel punto che corrisponde alla soluzione dell'equazione:

Essendo la nostra equazione con un parametro avremo che potremo rappresentare il sistema come un fascio di rette.

La discussione si ridurrà a vedere quali rette del fascio risolvono la condizione richiesta, cioè quali rette hanno l'intersezione con l'asse delle x a destra od a sinistra del valore dato. Vediamo lo stesso esempio già fatto:

Discutere l'equazione:

$$2x + k - 1 = 0$$

rispetto alla condizione:

$$x > 2$$

Considero la funzione:

$$y = 2x + k - 1$$

Questa rappresenta un [fascio di rette parallele](#) perché al variare di k varia il termine noto mentre il coefficiente angolare è fisso e vale 2:

nel sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + k - 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

sostituisco a x il valore 2 e trovo il corrispondente valore di k:

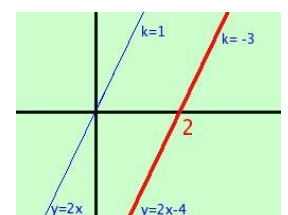
$$k = -3$$

Faccio il grafico riportando le rette del fascio.

Disegno prima la retta passante per l'origine $y=2x$ (basta togliere il termine noto).

Calcolo il suo valore di k (termine noto $k-1=0$ cioè $k=1$)

disegno ora quella con $k=-3$ cioè la parallela passante per $x=2$, avrà equazione $y=2x-4$.



Ora siccome devo prendere i valori per $x > 2$ cioè le rette che intersecano l'asse delle x a destra del punto 2 allora avrò la soluzione:

$$k < -3$$

Perché essendo $k=1$ per la retta passante per l'origine e $k=-3$ per la retta di base avrò che procedendo verso destra il valore di k diventerà sempre più piccolo (nel senso che raggiungerà valori negativi sempre più alti):

Come vedi non è che la discussione di un'equazione di primo grado sia troppo gratificante, anzi direi proprio il contrario.

potremmo far vedere cosa succede se il fascio di rette è proprio, cioè se k è moltiplicato per la x nell'equazione, ma in pratica non cambia granché; lo farò nella seconda stesura del sito.

(c) Discussione di equazioni di secondo grado

(i) Metodo di Tartinville

Per utilizzare questo metodo è necessario conoscere bene gli argomenti relativi alle equazioni di secondo grado ed anche le disequazioni di secondo grado, soprattutto ripassa gli schemi sui [valori interni ed esterni](#) all'intervallo delle radici.

Faremo uno schema con le seguenti disequazioni relative al parametro:

1. imponiamo, come prima cosa, che, al variare del parametro, il discriminante dell'equazione sia maggiore di zero per la realtà delle radici
2. poniamo poi il primo coefficiente maggiore di zero, per sapere, al variare del parametro, se i valori positivi sono interni od esterni alle radici seguendo gli [schemi delle disequazioni di secondo grado](#)
3. sostituiamo i valori limite x_1 x_2 x_3 alla x e calcolare per quali valori del parametro si ha

$$f(x_1) > 0 ;$$

$$f(x_2) > 0 ;$$

$$f(x_3) > 0 ;$$
 questo ci permetterà di vedere se il valore limite è interno oppure esterno all'intervallo delle radici. Di solito la discussione è fatta rispetto a due valori assegnati x_1 x_2 , ma nei problemi talvolta si potranno anche avere tre valori; il terzo valore x_3 verrà chiamato limite aggiunto
4. calcoliamo infine al variare del parametro la semisomma Σ delle radici, per sapere da che parte sono esterni i valori limiti x_1 , x_2 , x_3 , calcoleremo:

$$\Sigma - x_1$$

$$\Sigma - x_2$$

$$\Sigma - x_3$$
5. riportiamo tutti i dati (caposaldi) trovati per il parametro nei primi tre punti sulla prima linea di un grafico e sulle altre linee riportiamo tutte le disequazioni precedenti; i dati sulla semisomma sono da considerare solo se utili e non vanno riportati fra i caposaldi
6. discutiamo il grafico in ogni intervallo ed in ogni punto trovato.

Vediamo l'applicazione del metodo su un esercizio.

Da notare che, purtroppo, esercizi di questo genere sono sempre piuttosto lunghi.

Discutere al variare del parametro k l'equazione:

$$(k-1)x^2 + 4kx + 3k = 0 \quad \text{con i limiti} \quad -2 < x \leq 4$$

abbiamo:

$$a = k-1$$

$$b = 4k$$

$$c = 3k$$

seguiamo lo schema:

- poniamo il discriminante dell'equazione maggiore di zero per la realt  delle radici:

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$(4k)^2 - 4(k-1)(3k) > 0$$

$$16k^2 - 12k^2 + 12k > 0$$

$$4k^2 + 12k > 0$$

$$k^2 + 3k > 0$$

l'equazione associata $k^2 + 3k = 0$ ha soluzioni:

$$k = 0 \quad k = -3$$

quindi la disequazione e' verificata per valori esterni cioe':

$$k < -3 \text{ U } k > 0$$

- poniamo il primo coefficiente maggiore di zero:

$$k-1 > 0 \quad \text{se } k > 1$$

- sostituiamo i valori limite alla x e poniamo maggiore di zero l'espressione che otteniamo

- sostituisco 2:

$$f(-2) = (k-1)(-2)^2 + 4k(-2) + 3k > 0$$

$$(k-1)4 - 8k + 3k > 0$$

$$4k - 4 - 8k + 3k > 0$$

$$-k > 4$$

$$k < -4$$

- sostituisco 4:

$$f(4) = (k-1)(4)^2 + 4k(4) + 3k > 0$$

$$(k-1)16 + 16k + 3k > 0$$

$$16k - 16 + 16k + 3k > 0$$

$$35k > 16$$

$$k > \frac{16}{35}$$

- adesso calcoliamo la semisomma delle radici Σ :

$$\Sigma = \frac{-b}{2a} = \frac{-4k}{2(k-1)} = \frac{-2k}{k-1}$$

- calcoliamo $\Sigma - (-2)$:

$$\Sigma - (-2) = \frac{-2k}{k-1} + 2 > 0$$

$$\frac{-2k + 2k - 2}{k-1} > 0$$

$$\frac{-2}{k-1} > 0$$

- quindi:

$$\Sigma + 2 > 0 \text{ per } k < 1$$

- calcoliamo $\Sigma - 4$:

$$\Sigma - 4 = \frac{-2k}{k-1} - 4 > 0$$

Num > 0	
Den > 0	1
Frazione	$\frac{+}{+} = +$

$$\frac{-2k - 4k + 4}{k-1} > 0$$

$$\frac{-6k + 4}{k-1} > 0$$

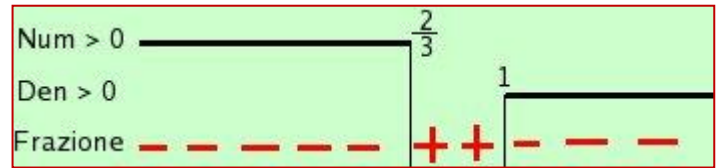
○ Calcoli:

$$-6k+4 > 0 \quad 6k-4 < 0 \quad 6k < 4 \quad k < \frac{4}{6} \quad k < \frac{2}{3}$$

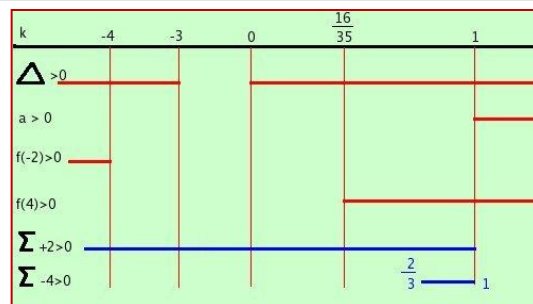
quindi:

$$\Sigma - 4 > 0 \text{ per } \frac{2}{3} < k < 1$$

5. Ora ordino i capisaldi e faccio il grafico:



Fai attenzione ad ordinare esattamente i capisaldi, io sbagliavo sempre e poi non mi tornavano i conti; basta che siano ordinati, non c'è bisogno di rispettare la lunghezza degli intervalli

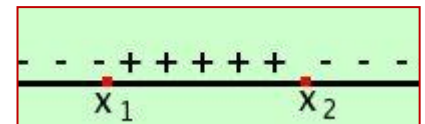


Ho indicato con una linea gli intervalli in cui le disequazioni sono verificate.

6. facciamo la discussione procedendo da sinistra verso destra.

Se $k < -4$ abbiamo il discriminante maggiore di zero quindi abbiamo due radici reali e distinte x_1 e x_2

Il primo coefficiente è negativo, pertanto i valori interni fra x_1 e x_2 sono positivi:

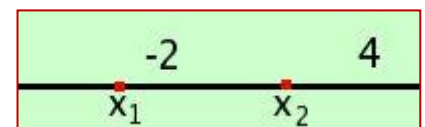


$f(-2)$ è positivo quindi -2 è interno alle radici

$f(4)$ è negativo quindi 4 è esterno alle radici

quindi abbiamo che in mezzo ai limiti c'è una radice accettabile.

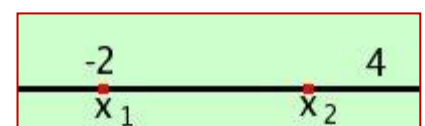
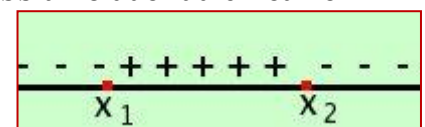
Se $k < -4$ una radice accettabile



Se $k = -4$ abbiamo il discriminante maggiore di zero quindi abbiamo due radici reali e distinte x_1 e x_2 .

Il primo coefficiente è negativo, pertanto i valori interni fra x_1 e x_2 sono positivi:

$f(-2)$ è nullo quindi -2 coincide con una delle radici; essendo la semisomma positiva coinciderà con la radice minore x_1 la semisomma è sempre a metà tra x_1 ed x_2 , quindi se semisomma-valore è positivo allora il valore si trova a

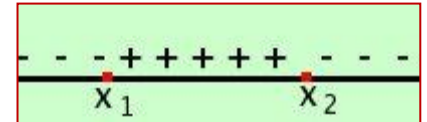


sinistra, mentre se e' negativa allora il valore sarà a destra;
 $f(4)$ è negativo quindi 4 è esterno alle radici
 quindi abbiamo una radice coincidente col valore limite;
 questa soluzione sarebbe accettabile se avessimo la condizione maggiore od uguale,
 mentre avendo solo maggiore la soluzione x_1 non è accettabile
 La soluzione x_2 è invece accettabile perché compresa fra -2 e 4

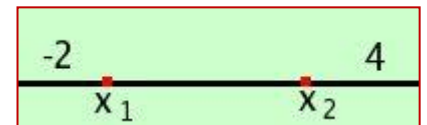
Se $k = -4$ una radice accettabile

Se $-4 < k < -3$ abbiamo il discriminante maggiore di zero quindi abbiamo due radici reali e distinte x_1 e x_2 .

Il primo coefficiente è negativo, pertanto i valori interni fra x_1 e x_2 sono positivi:



$f(-2)$ è negativo quindi -2 è esterno alle radici ed essendo la semisomma positiva sarà esterno a sinistra
 $f(4)$ è negativo quindi 4 è esterno alle radici ed essendo la semisomma negativa sarà esterno a destra

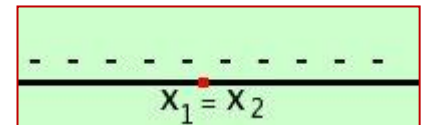


quindi abbiamo che in mezzo ai limiti ci sono entrambe le radici e sono accettabili

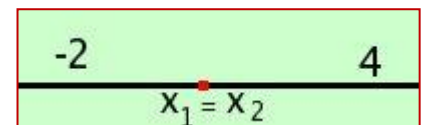
Se $-4 < k < -3$ due radici accettabili

Se $k = -3$ abbiamo il discriminante uguale a zero quindi abbiamo due radici reali e coincidenti $x_1 = x_2$.

Il primo coefficiente è negativo, pertanto i valori esterni alle radici sono negativi:



$f(-2)$ è negativo quindi -2 è esterno alle radici e, essendo la semisomma meno il limite positiva, sarà esterno a sinistra
 $f(4)$ è negativo quindi 4 è esterno alle radici ed, essendo la semisomma meno il limite negativa, sarà esterno a destra



Quindi abbiamo che in mezzo ai limiti ci sono entrambe le radici che sono coincidenti ed accettabili

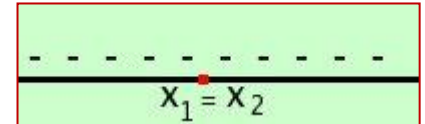
Se $k = -3$ due radici coincidenti accettabili

Se $-3 < k < 0$ abbiamo il discriminante minore di zero quindi nessuna soluzione reale

Se $-3 < k < 0$ nessuna soluzione

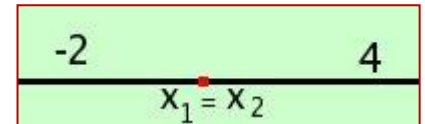
Se $k = 0$ abbiamo il discriminante e' uguale a zero quindi abbiamo due radici reali e coincidenti $x_1 = x_2$.

Il primo coefficiente e' negativo, pertanto i valori esterni alle radici sono negativi:



$f(-2)$ e' negativo quindi -2 e' esterno alle radici e' , essendo la semisomma meno il limite positiva, $sara'$ esterno a sinistra

$f(4)$ e' negativo quindi 4 e' esterno alle radici e' ed essendo la semisomma negativa $sara'$ esterno a destra

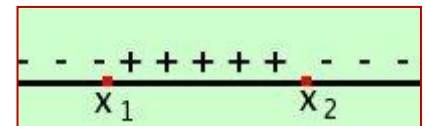


Quindi abbiamo che in mezzo ai limiti ci sono entrambe le radici che sono coincidenti ed accettabili

Se $k = 0$ due radici coincidenti accettabili

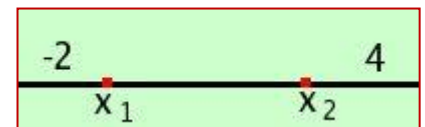
Se $0 < k < 16/35$ abbiamo il discriminante maggiore di zero quindi abbiamo due radici reali e distinte x_1 e x_2 .

Il primo coefficiente e' negativo, pertanto i valori interni fra x_1 e x_2 sono positivi:



$f(-2)$ e' negativo quindi -2 e' esterno alle radici e' ed essendo la semisomma meno il limite positiva $sara'$ esterno a sinistra

$f(4)$ e' negativo quindi 4 e' esterno alle radici e' ed essendo la semisomma meno il limite negativa $sara'$ esterno a destra

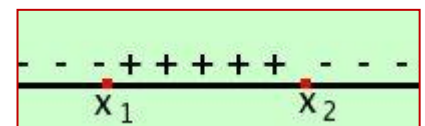


quindi abbiamo che in mezzo ai limiti ci sono entrambe le radici e sono accettabili

Se $0 < k < 16/35$ due radici accettabili

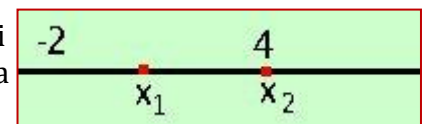
Se $k = 16/35$ abbiamo:

il discriminante maggiore di zero quindi abbiamo due radici reali e distinte x_1 e x_2



Il primo coefficiente e' negativo, pertanto i valori interni fra x_1 e x_2 sono positivi

$f(-2)$ e' negativo quindi -2 e' esterno all'intervallo delle radici
 $f(4)$ e' nullo quindi 4 coincide con una delle radici; essendo la semisomma negativa coincidera' con la radice maggiore x_2



Quindi abbiamo una radice coincidente col valore limite;

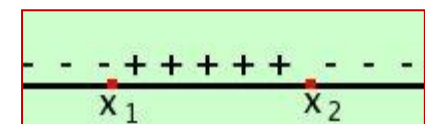
questa soluzione e' accettabile perche' abbiamo la condizione minore od uguale a 4

La soluzione x_1 e' anch'essa accettabile perche' compresa fra -2 e 4

Se $k = 16/35$ due soluzioni accettabili di cui una limite

Se $16/35 < k < 1$ abbiamo il discriminante maggiore di zero quindi abbiamo due radici reali e distinte x_1 e x_2 .

Il primo coefficiente e' negativo, pertanto i valori interni fra x_1 e x_2 sono positivi:



$f(-2)$ e' negativo quindi -2 e' esterno alle radici

$f(4)$ e' positivo quindi 4 e' interno alle radici

Quindi abbiamo che in mezzo ai limiti c'e' solamente la radice x_1

Se $16/35 < k < 1$ una radice accettabile

Se $k = 1$ abbiamo l'equazione, annullandosi il primo coefficiente diventa di primo grado;
in tal caso andiamo a calcolare direttamente; sostituiamo a k il valore 1 nell'equazione di partenza ed otteniamo

$$(k-1)x^2 + 4kx + 3k = 0$$

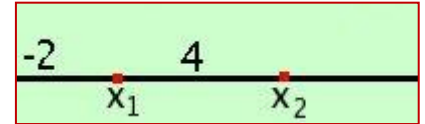
$$(1-1)^2 + 4(1)x + 3(1) = 0$$

$$4x + 3 = 0$$

$$x = -3/4$$

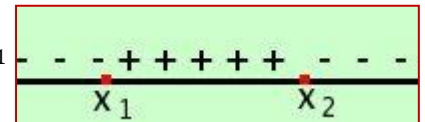
essendo il valore $-3/4$ compreso fra -2 e 4 la soluzione e' accettabile

Se $k = 1$ esiste una sola radice ed e' accettabile



Se $k > 1$ abbiamo il discriminante maggiore di zero quindi abbiamo due radici reali e distinte x_1 e x_2 .

Il primo coefficiente e' positivo, pertanto i valori interni fra x_1 e x_2 sono negativi:

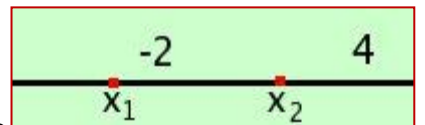


$f(-2)$ e' negativo quindi -2 e' interno alle radici

$f(4)$ e' positivo quindi 4 e' esterno alle radici

Quindi abbiamo che in mezzo ai limiti c'e' solamente la radice x_2

Se $k > 1$ una radice accettabile



Non e' finita: adesso devo raccogliere i risultati

Due soluzioni per $-4 < k \leq -3$ U $0 \leq k \leq 16/35$

Una soluzione per $k \leq -4$ U $k > 16/35$

U sta per unione, cioe' e' valido sia il primo intervallo che il secondo

(ii) Metodo grafico

Qui devi essere abbastanza "esperto" di geometria cartesiana: il problema si puo' scomporre di solito nell'intersezione o fra una retta ed una parabola, oppure fra due parabole, od anche, soprattutto nei problemi trigonometrici nell'intersezione fra una retta ed una circonferenza: una delle due, possibilmente la retta, variera' al variare del parametro k , intersecando l'altra curva in uno, nessuno o due punti. Queste intersezioni nelle parti di figura comprese nei limiti, forniranno le soluzioni:

Per ora ci limiteremo ad un semplice esempio, rimandando alla seconda stesura del sito lo studio dei vari casi possibili:

Discutere al variare del parametro k l'equazione:

$$x^2 - 3x + 2k - 1 = 0 \quad \text{con i limiti} \quad -2 < x \leq 4$$

qui siamo abbastanza liberi: dobbiamo trasportare dopo l'uguale una parte dell'equazione in modo da avere l'uguaglianza fra due curve note di cui una fissa (cioe' una senza il

parametro).

I punti comuni alle due curve nei limiti richiesti saranno le soluzioni cercate.

Potrei prendere:

$x^2 - 3x - 1 = -2k$ la parabola fissa $y = x^2 - 3x - 1$ con la retta variabile $y = -2k$

$x^2 - 3x = 1 - 2k$ la parabola fissa $y = x^2 - 3x$ con la retta variabile $y = 1 - 2k$

$x^2 = 3x + 1 - 2k$ la parabola fissa $y = x^2$ con la retta variabile $y = 3x + 1 - 2k$

$x^2 + 2k = 3x + 1$ la parabola variabile $y = x^2 + 2k$ con la retta fissa $y = 3x + 1$

$x^2 + 2k - 1 = 3x$ la parabola variabile $y = x^2 + 2k - 1$ con la retta fissa $y = 3x$

$x^2 - 3x + 2k = 1$ la parabola variabile $y = x^2 - 3x + 2k$ con la retta fissa $y = 1$

Prendiamo quella che ci sembra piu' semplice:

$$x^2 = 3x + 1 - 2k$$

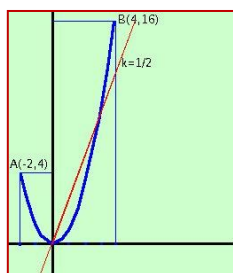
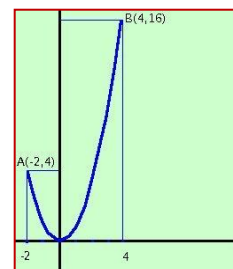
la parabola fissa $y = x^2$ con la retta variabile $y = 3x + 1 - 2k$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x + 1 - 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x + 1 - 2k \end{cases}$$

Disegniamo la curva $y = x^2$: e' una parabola con il vertice nell'origine e prendiamone solo la parte che ci interessa, cioe' per $-2 < x \leq 4$

Troviamo i valori al limite sostituendo nella x della parabola i valori limite: otteniamo i punti $A(-2,4)$ $B(4,16)$.



Adesso prendiamo la retta $y = 3x + 1 - 2k$; notiamo che varia solamente il termine noto; quindi l'equazione rappresenta un fascio di rette parallele. Cominciamo col disegnare la retta del fascio che passa per l'origine $y = 3x$ e mettiamola nel grafico; ad essa corrisponde il valore di k :

$$(\text{termine noto} = 0) \quad 1 - 2k = 0 \quad k = 1/2$$

Non sarebbe necessario fare il passaggio per l'origine ma ti puo' aiutare a capire meglio il problema.

Adesso devi pensare di spostare la retta parallelamente a se' stessa in modo che passi per il punto A, per il punto B e per il punto di tangenza e contare quante sono le intersezioni con l'arco di parabola.

Nella prossima figura prendo solo le rette necessarie.

Facciamo il passaggio per il punto $A(-2,4)$ e troviamo il valore di k : basta sostituire nella retta ad x il valore -2 e ad y il valore 4 :

$$4 = 3(-2) + 1 - 2k$$

$$4 = -5 - 2k$$

$$2k = -9$$

$$k = -9/2$$

Facciamo il passaggio per il punto $B(4,16)$ e troviamo il valore di k : basta sostituire nella retta ad x il valore 4 e ad y il valore 16 :

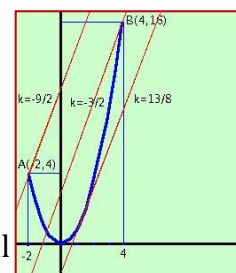
$$16 = 3(4) + 1 - 2k$$

$$16 = 13 - 2k$$

$$2k = -3$$

$$k = -3/2$$

Troviamo ora il valore di k quando la retta e' tangente; bastera' risolvere il sistema tra la retta e la parabola (cioe' prendere l'equazione iniziale) e porre il discriminante uguale a zero:



$$x^2 - 3x + 2k - 1 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 2k - 1$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-3)^2 - 4(1)(2k-1) = 0$$

$$9 - 8k + 4 = 0$$

$$-8k = -13$$

$$k = 13/8$$

quindi abbiamo:

- Una soluzione per $-9/2 < k < -3/2$

- Due soluzioni per $-3/2 \leq k \leq 13/8$

Per i segni di minore e di minore uguale, siccome abbiamo $-2 < x \leq 4$ il punto B e' da considerare valido per la soluzione, mentre il punto A non da' soluzioni.

4. Equazioni di grado superiore

Sono equazioni in cui la x compare a potenza 3, 4, 5, ecc...

Per quelle di terzo grado esiste una formula risolutiva che non considereremo.

Noi tratteremo le soluzioni preferibilmente in campo complesso; se non hai fatto i **numeri complessi** devi considerare solo le soluzioni reali (qualche docente, purtroppo, le spiega solo in R)

a) Teorema fondamentale dell'algebra

Il teorema fondamentale dell'algebra dice che:

Un'equazione di grado n ammette sempre n soluzioni reali distinte, reali coincidenti o complesse e coniugate.

Una cosa e' sapere che le soluzioni ci sono ed un'altra e' trovarle: infatti finora si sanno risolvere equazioni fino al quarto grado mentre per i gradi superiori qualche volta si possono trovare le soluzioni ma e' stato dimostrato che non esiste un metodo generale.

b) Equazioni abbassabili di grado

Considero il polinomio associato all'equazione e lo **scompongo in fattori**, ad esempio con **Ruffini** poi pongo il polinomio scomposto uguale a zero ed utilizzando la legge di annullamento del prodotto risolvo le equazioni componenti.

La legge di annullamento del prodotto dice che:

Un prodotto e' zero se e solo se uno dei suoi fattori vale zero.

Vediamo assieme qualche esercizio per meglio fissare il procedimento

Esercizio 1

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0 \quad \text{soluzione:}$$

Considero il polinomio associato:

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 =$$

Devo **scomporlo**.

Non posso raccogliere niente a fattor comune.

Passo a considerare il numero di termini : 4

Enumero le varie possibilita'

Non e' un cubo di binomio

Raccoglimento parziale; potrebbe essere:

tra il primo termine ed il secondo raccolgo x^2 e tra il terzo ed il quarto raccolgo -4

$$= x^2(x-4) - 4(x-4) =$$

dentro parentesi ho ottenuto termini uguali quindi va bene; procedo a raccogliere le parentesi

$$= (x-4)(x^2-4) =$$

scompongo la differenza di quadrati (anche se potrei farne a meno perché so risolvere le equazioni di secondo grado) metto anche in ordine: nei prodotti fra polinomi prima si mettono quelli con i termini più piccoli poi i più grandi

$$= (x+2)(x-2)(x-4)$$

ora pongo il polinomio uguale a zero per ottenere un'equazione equivalente a quella da cui siamo partiti:

$$(x+2)(x-2)(x-4) = 0$$

per la legge di annullamento del prodotto (siccome cerco i valori che mi rendono tutta l'espressione uguale a zero) dovrò porre ogni termine del prodotto uguale a zero.

Quindi la mia equazione è equivalente alle seguenti 3 equazioni:

1. $(x+2) = 0$

2. $(x-2) = 0$

3. $(x-4) = 0$

Risolve la prima:

$$(x+2) = 0$$

$$x = -2$$

Risolve la seconda:

$$(x-2) = 0$$

$$x = 2$$

Risolve la terza:

$$(x-4) = 0$$

$$x = 4$$

le tre soluzioni dell'equazione (di 3° grado) sono:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4$$

Esercizio 2

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

soluzione:

considero il polinomio associato

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 =$$

Devo scomporlo

Non posso raccogliere niente a fattor comune.

Passo a considerare il numero di termini : 4

Enumero le varie possibilità

Non è un cubo di binomio

Non è un raccoglimento parziale

Non è un raggruppamento

Devo provare Ruffini

i possibili divisori sono polinomi del tipo $(x-a)$ essendo a un divisore del termine noto, cioè a può essere:

$$+1 \quad -1 \quad +2 \quad -2 \quad +3 \quad -3 \quad +6 \quad -6$$

Provo a vedere se è scomponibile per $(x-1)$

$$P(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

$(x-1)$ è un fattore quindi eseguo la divisione di Ruffini e scrivo

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Ora posso scrivere l'equazione di partenza come

$$(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

e per la legge di annullamento del prodotto equivale alle due equazioni

1. $(x-1) = 0$

2. $(x^2 - 5x + 6) = 0$

risolve la prima

$$x - 1 = 0 \quad x = 1$$

risolve la seconda

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$2$$

eseguo i calcoli

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(25 - 24)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

- $x_1 = 3$
- $x_2 = 2$
- $x_1 = 1$
- $x_2 = 2$
- $x_3 = 3$

Esercizio 3

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24 = 0 \quad \text{soluzione:}$$

considero il polinomio associato

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24 =$$

Devo scomporlo

Non posso raccogliere niente a fattor comune

Passo a considerare il numero di termini : 5

Enumero le varie possibilità

Non vedo raggruppamenti

Devo provare Ruffini

i divisori del termine noto sono:

$$+1 \ -1 \ +2 \ -2 \ +3 \ -3 \ +4 \ -4 \ +6 \ -6 \ +12 \ -12 \ +24 \ -24$$

- Provo a vedere se e' scomponibile per $(x - 1)$
 $P(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 - 24 = 1 - 5 + 2 + 20 - 24 \neq 0$
 Non e' scomponibile per $(x - 1)$
- Provo a vedere se e' scomponibile per $(x + 1)$
 $P(-1) = (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 20 \cdot (-1) - 24 = -1 + 5 + 2 - 20 - 24 \neq 0$
 Non e' scomponibile per $(x + 1)$
- Provo a vedere se e' scomponibile per $(x - 2)$
 $P(2) = 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 - 24 = 16 - 40 + 8 + 40 - 24 = 0$
 E' scomponibile per $(x - 2)$

Divido per $(x-2)$ ed ottengo:

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24 = (x - 2)(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) =$$

Ora devo scomporre il polinomio di terzo grado;

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

Ricomincio dall'ultimo fattore che e' andato bene

- Provo a vedere se e' scomponibile per $(x - 2)$
 $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$
 E' ancora scomponibile per $(x - 2)$

Divido per $(x-2)$ ed ottengo:

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24 = (x - 2)(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) =$$

$$= (x - 2)(x - 2)(x^2 - x - 6)$$

Ora siccome il polinomio e' tutto composto di polinomi di primo e secondo grado ricostruisco l'equazione

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24 = 0$$

equivale a

$$(x - 2)(x - 2)(x^2 - x - 6) = 0$$

Risolvere le singole equazioni:

1. $(x - 2) = 0$
2. $(x - 2) = 0$
3. $(x^2 - x - 6) = 0$

- risolvo la prima
 $x - 2 = 0 \quad x = 2$

	1	-5	2	20	-24
2		2	-6	-8	24
	1	-3	-4	12	0

	1	-3	-4	12
2		2	-2	-12
	1	-1	-6	0

- risolvo la seconda

$$x - 2 = 0 \quad x = 2$$

- risolvo la terza

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{[(1)^2 - 4(1)(-6)]}}{2}$$

eseguo i calcoli

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(25)}}{2}$$

$$x_{1,2} = (1 \pm 5)/2$$

Otengo le soluzioni

$$x = -2 \quad x = 3$$

Le soluzioni dell'equazione di partenza saranno:

- $x_1 = 2$
- $x_2 = 2$
- $x_3 = -2$
- $x_4 = 3$

posso anche dire

- $x_{1,2} = 2$ soluzione doppia
- $x_3 = -2$
- $x_4 = 3$

Come vedi il procedimento e' lungo e noioso, allora, se possibile, si cercano metodi piu' rapidi ed equazioni particolari che permettano di utilizzare metodi piu' efficienti per trovare le soluzioni. Vedremo questi metodi nelle prossime pagin

c) Equazioni biquadratiche

Si chiamera' **biquadratica** un'equazione che ha tre termini, uno con x^4 , uno con x^2 , ed un termine noto:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Per risolvere quest'equazione conviene sostituire x^2 con y e quindi x^4 con y^2 , quindi l'equazione diviene di secondo grado in y ;

$$ay^2 + by + c = 0$$

trovate le due soluzioni y_1 ed y_2 dovro' risolvere le due equazioni:

$$x^2 = y_1$$

$$x^2 = y_2$$

Le 4 soluzioni trovate saranno le soluzioni dell'equazione di partenza.

In qualche libro di testo viene addirittura fornita una formula finale

$$\pm \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vediamo un esempio concreto; risolvere:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

pongo

$$x^2 = y \text{ e quindi } x^4 = y^2$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

risolvo rispetto ad y :

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(25 - 16)}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

- $y_1 = (5 + 3)/2 = 8/2 = 4$
- $y_2 = (5 - 3)/2 = 2/2 = 1$

Ora devo risolvere le due equazioni:

- $x^2 = 4$
- $x^2 = 1$

- risolvo la prima

- $x_1 = -2$
- $x_2 = +2$

- risolvo la seconda

- $x_3 = -1$
- $x_4 = +1$

quindi le 4 soluzioni (messe in fila) sono:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = +1 \quad x_4 = +2$$

Risolviamo per esercizio le seguenti equazioni

Esercizio 1

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad \text{soluzione:}$$

pongo

$$x^2 = y \text{ e quindi } x^4 = y^2$$

$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

risolvo rispetto ad y (con la [formula ridotta](#))

$$y_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b^2/4 - ac)}}{a}$$

$$y = 5 \pm \sqrt{(25 - 19)}$$

$$y = 5 \pm \sqrt{16}$$

$$y = 5 \pm 4$$

- $y_1 = 5 + 4 = 9$
- $y_2 = 5 - 4 = 1$

Ora devo risolvere le due equazioni:

- $x^2 = 9$
- $x^2 = 1$
- risolvo la prima $x = \pm\sqrt{9}$

- $x_1 = -3$
- $x_2 = +3$

- risolvo la seconda $x = \pm\sqrt{1}$
- $x_3 = -1$
- $x_4 = +1$

quindi ho 4 soluzioni reali che (messe in fila) sono:

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = +1 \quad x_4 = +3$$

Esercizio 2

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{soluzione:}$$

pongo

$$x^2 = y \text{ e quindi } x^4 = y^2$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

risolvo rispetto ad y

$$-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{(9 + 16)}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

- $y_1 = (3 + 5)/2 = 8/2 = 4$

- $y_2 = (3 - 5)/2 = -2/2 = -1$

Ora devo risolvere le due equazioni:

- $x^2 = 4$

- $x^2 = -1$

- risolvo la prima $x = \pm\sqrt{4}$

- $x_1 = -2$

- $x_2 = +2$

- risolvo la seconda $x = \pm\sqrt{-1}$
e' un'equazione a **valori immaginari**

- $x_3 = -i$

- $x_4 = +i$

quindi ho 2 soluzioni reali e 2 immaginarie:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -i \quad x_4 = +i$$

Esercizio 3

$$x^4 + 13x^2 + 36 = 0 \quad \text{soluzione:}$$

pongo

$$x^2 = y \text{ e quindi } x^4 = y^2$$

$$y^2 + 13y + 36 = 0$$

risolvo rispetto ad y

$$-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$\frac{-13 \pm \sqrt{(169 - 144)}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-13 \pm 5}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-13 \pm 5}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-13 \pm 5}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-13 \pm 5}{2}$$

- $y_1 = (-13 + 5)/2 = -8/2 = -4$

- $y_2 = (-13 - 5)/2 = -18/2 = -9$

Ora devo risolvere le due equazioni:

- $x^2 = -9$

- $x^2 = -4$

sono equazioni a **valori immaginari**

- risolvo la prima $x = \pm\sqrt{-9}$

- $x_1 = -3i$

- $x_2 = +3i$
 - risolvo la seconda $x = \pm\sqrt{-4}$
 - $x_3 = -2i$
 - $x_4 = +2i$
- quindi ho 4 soluzioni immaginarie (metto in fila):
 $x_1 = -3i$ $x_2 = -2i$ $x_3 = +2i$ $x_4 = +3i$

d) Equazioni binomie

Si chiamerà *binomia* un'equazione che ha due termini, uno con x^n ed un termine noto.
 $ax^n = b$

Per risolvere teoricamente quest'equazione, siccome sappiamo fare bene solo le radici del numero 1, conviene lasciare 1 dopo l'uguale dividendo entrambe i termini per b:

$$\frac{a}{b} x^n = 1$$

a questo punto e' possibile fare la radice ennesima a destra ed a sinistra dell'uguale per ottenere il risultato:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b} x^n} = \sqrt[n]{1}$$

Possiamo subito dire che se a e b hanno lo stesso segno allora entrambe i membri dell'equazione sono positivi, quindi se n e' pari avremo due soluzioni reali, mentre se n e' dispari avremo una sola soluzione reale.

Se a e b hanno segno contrario invece se n e' pari non avremo soluzioni reali, mentre ne avremo una se n e' dispari.

Invece in pratica si fa diversamente e dobbiamo distinguere due casi:

- ricerca delle sole soluzioni reali
- ricerca delle soluzioni sia reali che complesse

Ricerca delle soluzioni reali nelle equazioni binomie

Se cerchiamo solo le soluzioni reali non ci si fanno troppi problemi: si isola la x e si fa la radice a destra ed a sinistra dell'uguale.

Primo esempio con sole soluzioni reali

$$2x^4 = 32$$

divido per 2

$$x^4 = 16$$

$$x = \pm\sqrt[4]{16}$$

soluzioni reali: $x_1 = -2$ e $x_2 = +2$

Secondo esempio con sole soluzioni reali

$$2x^3 = -54$$

divido per 2

$$x^3 = -27$$

$$x = \sqrt[3]{(-27)}$$

C'e' una sola soluzione reale: $x_1 = -3$

Ricerca delle soluzioni reali e complesse nelle equazioni binomie

Se cerchiamo le soluzioni sia reali che complesse dovremo fare ricorso alle scomposizioni di **somme e differenze di potenze**.

Risolviamo gli stessi esercizi della pagina precedente.

Primo esempio:

$$2x^4 = 32$$

divido per 2:

$$x^4 = 16$$

$$x^4 - 16 = 0$$

scompongo

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

Pongo uguali a zero i fattori :

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + 4 = 0$$

Risolvo la prima:

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = +2$$

Risolvo la seconda:

$$x = \pm\sqrt{(-4)}$$

$$x_1 = -2i \quad x_2 = +2i$$

in accordo con il **teorema fondamentale dell'algebra** ho 4 soluzioni:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = +2 \quad x_3 = -2i \quad x_4 = +2i$$

Secondo esempio:

$$2x^3 = -54$$

divido per 2:

$$x^3 = -27$$

$$x^3 + 27 = 0$$

scompongo

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

Pongo uguali a zero i fattori :

$$x + 3 = 0$$

$$x^2 - 3x + 9 = 0$$

Risolvo la prima:

$$x_1 = -3$$

Risolvo la seconda:

$$3 \pm \sqrt{(9 - 36)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(9 - 36)}}{2}$$

$$x_1 = (3 - 3i\sqrt{3})/2 \quad x_2 = (3 + 3i\sqrt{3})/2$$

In accordo con il **teorema fondamentale dell'algebra** ho 3 soluzioni:

$$x_1 = -3 \quad x_2 = (3 - 3i\sqrt{3})/2 \quad x_3 = (3 + 3i\sqrt{3})/2$$

e) Equazioni trinomie

Si chiamerà **trinomia** un'equazione che ha tre termini, il primo (x^{2n}) con la potenza della x doppia del secondo (x^n) ed un termine noto.

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

come ad esempio:

$$x^6 + 9x^3 + 8 = 0$$

Per risolvere quest'equazione (facendo come nelle biquadratiche) conviene sostituire x^n con y e quindi x^{2n} con y^2 , quindi l'equazione diviene di secondo grado in y :

$$ay^2 + by + c = 0$$

Trovate le due soluzioni y_1 ed y_2 dovro' risolvere le due equazioni binomie:

$$x^n = y_1$$

$$x^n = y_2$$

Le $2n$ soluzioni trovate saranno le soluzioni dell'equazione di partenza.

Se non hai capito bene segui questo esempio sull'equazione sopra:

$$x^6 + 9x^3 + 8 = 0$$

pongo:

$$x^3 = y \text{ e quindi } x^6 = y^2$$

Quindi otteniamo:

$$y^2 + 9y + 8 = 0$$

Risolvendola otterro' le soluzioni:

$$y_1 = -1 \text{ e } y_2 = -8 \quad \text{calcoli}$$

ora dovro' risolvere le due equazioni binomie:

$$x^3 = -1$$

$$x^3 = -8$$

Ora, seguendo le spiegazioni del tuo Prof. scegli se vuoi trovare:

- Solo le soluzioni reali
- Sia le soluzioni reali che complesse

- Trovare le **soluzioni reali** delle equazioni:

$$x^3 = -1$$

$$x^3 = -8$$

Risolve la prima:

$$x^3 = -1$$

$$x = \sqrt[3]{-1}$$

$$x = -1$$

Risolve la seconda:

$$x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8}$$

$$x = -2$$

Si hanno due soluzioni reali :

$$x_1 = -2 \text{ e } x_2 = -1$$

- Trovare le soluzioni **reali e complesse** delle equazioni:

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 + 8 = 0$$

Risolve la prima; devo **scomporre**:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Per la legge di **annullamento del prodotto** per trovare tutte le soluzioni dovro' porre :

- $x + 1 = 0$

- $x^2 - x + 1 = 0$

Risolve la prima equazione:

$$x = -1$$

Risolve la seconda equazione:

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{\dots\dots\dots}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Ho quindi le tre soluzioni:

$$x_1 = -1 \quad x_2 = (1 - i\sqrt{3})/2 \quad x_3 = (1 + i\sqrt{3})/2$$

Risolvero la seconda; devo scomporre:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

Per la legge di **annullamento del prodotto** per trovare tutte le soluzioni dovrò porre:

- $x + 2 = 0$
- $x^2 - 2x + 4 = 0$

Risolvero la prima equazione:

$$x = -2$$

Risolvero la seconda equazione:

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

Applico la formula ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(1 - 4)}}{1}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

Ho quindi le tre soluzioni:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 1 - i\sqrt{3} \quad x_3 = 1 + i\sqrt{3}$$

In accordo con il **teorema fondamentale dell'algebra** ho 6 soluzioni:

$$x_1 = -1 \quad x_2 = (1 - i\sqrt{3})/2 \quad x_3 = (1 + i\sqrt{3})/2$$

$$x_4 = -2 \quad x_5 = 1 - i\sqrt{3} \quad x_6 = 1 + i\sqrt{3}$$

Due soluzioni sono reali e 4 complesse.

Proviamo qualche esercizio:

Esercizio 1

$$x^6 - 26x^3 - 27 = 0 \quad \text{soluzione:}$$

Esercizio 2

$$x^8 - 17x^4 + 16 = 0 \quad \text{soluzione:}$$

f) Equazioni irrazionali

Sono equazioni in cui la **x** compare sotto il segno di radice; per poterle risolvere dovremo eliminare le radici elevando i termini opportunamente.

In queste equazioni si cercano solamente i valori Reali

Distinguiamo i due casi:

- **Radici a indice dispari**
- **Radici a indice pari**

Equazioni irrazionali con indice dispari

Se ho una radice con esponente dispari posso isolare la radice e quindi elevare a potenza prima e dopo l'uguale.

Risolvere ad esempio:

$$x - \sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 - 1)} = -1$$

Isolo la radice trasportandola dopo l'uguale (di solito si porta la radice dove il suo segno e' positivo) e porto 1 prima dell'uguale:

$$x + 1 = \sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 - 1)}$$

Elevo entrambe i membri alla terza:

$$(x + 1)^3 = [\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 - 1)}]^3$$

Eseguo i calcoli: sviluppo il cubo prima dell'uguale e dopo l'uguale semplifico la radice con la potenza

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 2x^2 - 1$$

trasporto tutto prima dell'uguale

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

Sommo i termini simili:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Risolvere :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(9 - 8)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

Le soluzioni sono:

$$x_1 = (-3 - 1)/2 = -2$$

$$x_2 = (-3 + 1)/2 = -1$$

Quindi nel caso di radice a potenza dispari la soluzione e' piuttosto ovvia: elevo a potenza per togliere la radice e risolvo normalmente

Equazioni irrazionali con indice pari

La radice con il suo termine e' sempre considerata positiva quindi :

$\sqrt{x}$ e' un numero positivo

$-\sqrt{x}$ e' un numero negativo

Per poterle risolvere dovremo eliminare le radici elevando i termini a potenza pari.

Cio' puo' tuttavia dar luogo a qualche problema: elevando a potenza pari potrebbero comparire delle soluzioni aggiunte dovute solamente all'elevamento. Per riconoscere quali soluzioni siano valide abbiamo due strade diverse:

- la prima (piu' difficile e, di solito, meno seguita a parte qualche Liceo Scientifico) consiste nel porre le condizioni iniziali e poi accettare solo le soluzioni che le soddisfino
Occorre saper fare i **sistemi di disequazioni**
- la seconda (piu' facile e quasi ovunque seguita) invece, consiste nel verificare, soluzione per soluzione, quali radici siano accettabili sostituendole nell'equazione di partenza e vedendo quali la verificano
Negli esercizi useremo il secondo metodo e, per i casi piu' semplici, anche il primo.

Anche se vi sono alcune equazioni che, con un po' di attenzione, possono essere risolte in modo immediato, vediamo di classificare alcuni tipi di equazioni irrazionali relativamente al numero di radicali presenti:

- Una sola radice piu' un'espressione senza radici
- Due radici
- Due radici piu' un'espressione senza radici
- Tre radici
- Tre radici piu' un'espressione senza radici
- Quattro radici

Una sola radice piu' un'espressione senza radici

Isoleremo la radice, eleveremo al quadrato (per eliminare la radice) poi risolveremo

Elevando a quadrato potrebbero aggiungersi delle soluzioni quindi le soluzioni trovate vanno o verificate sull'equazione di partenza oppure controllate con delle condizioni di realta' iniziali,

Vediamo il procedimento su degli esempi,

Esercizio 1:

$$x + 2 - \sqrt{(x^2 - 4)} = 0$$

- Metodo della verifica

Isolo la radice portandola dopo l'uguale:

$$x + 2 = \sqrt{(x^2 - 4)}$$

Elevo a quadrato da una parte e dall'altra:

$$(x + 2)^2 = [\sqrt{(x^2 - 4)}]^2$$

Eseguo il quadrato prima dell'uguale. Dopo l'uguale semplifico il quadrato con la radice:

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4$$

Trasporto tutto prima dell'uguale:

$$x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4 = 0$$

Sommo:

$$4x + 8 = 0$$

Risolvo:

$$4x = -8$$

$$8$$

$$x = - \frac{8}{4} = -2$$

Ora devo verificare se la soluzione va bene nell'equazione di partenza o e' dovuta all'elevamento a quadrato

Verifica:

Sostituisco nell'equazione iniziale alla x il valore -2

$$-2 + 2 - \sqrt{[(-2)^2 - 4]} = 0$$

$$0 - \sqrt{0} = 0$$

$$0 = 0$$

Avendo ottenuto un'uguaglianza la soluzione $x = -2$ e' accettabile.

- Metodo delle condizioni iniziali

Isolo la radice portandola dopo l'uguale:

$$x + 2 = \sqrt{(x^2 - 4)}$$

Pongo le condizioni iniziali: il termine sotto radice deve essere maggiore od uguale a zero, inoltre il termine senza radice deve avere lo stesso segno della radice (nel nostro caso +):

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Per risolvere la prima considero l'equazione associata:

$$x^2 - 4 = 0$$

Risolvo:

$$x^2 = 4$$

2 soluzioni:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$$

Essendo il Delta maggiore di zero la disequazione e' positiva per valori esterni:

$$\begin{cases} x \leq -2 & \cup & x \geq 2 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Quindi la soluzione e':

$$x = -2 \quad \cup \quad x \geq 2$$

oppure usando un'altra notazione:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} + & + & + & (-2) & - & - & (+2) & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ - & - & - & (-2) & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ & & & 0 & & & 0 & & & & & & & & & \end{array}$$

Quindi saranno accettabili solo le soluzioni che siano uguali a -2 oppure maggiori od uguali a +2.

Le parentesi indicano che e' accettabile anche il valore indicato.

Ora risolvo normalmente:

Isolo la radice portandola dopo l'uguale:

$$x + 2 = \sqrt{(x^2 - 4)}$$

Elevo a quadrato da una parte e dall'altra:

$$(x + 2)^2 = [\sqrt{(x^2 - 4)}]^2$$

Eseguo il quadrato prima dell'uguale. Dopo l'uguale semplifico il quadrato con la radice:

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4$$

Trasporto tutto prima dell'uguale:

$$x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4 = 0$$

Sommo:

$$4x + 8 = 0$$

Risolvo:

$$4x = -8$$

$$x = \frac{-8}{4} = -2$$

Ora la soluzione $x = -2$ essendo fra i valori accettabili e' accettabile.

Esercizio 2

$$x + 2 + \sqrt{(x + 2)} = 0$$

- Metodo della verifica

Isolo la radice portando gli altri termini dopo l'uguale:

$$\sqrt{(x + 2)} = -x - 2$$

Elevo a quadrato da una parte e dall'altra:

$$[\sqrt{(x + 2)}]^2 = (-x - 2)^2$$

Eseguo il quadrato dopo l'uguale. Prima dell'uguale semplifico il quadrato con la radice:

$$x + 2 = x^2 + 4x + 4$$

Trasporto tutto prima dell'uguale:

$$x + 2 - x^2 - 4x - 4 = 0$$

Sommo:

$$-x^2 - 3x - 2 = 0$$

Cambio segno:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Risolvo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(9 - 8)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

Le radici sono:

$$x_1 = (-3 - 1)/2 = -2$$

$$x_2 = (-3 + 1)/2 = -1$$

Non e' finita! Devo fare la verifica:

- Verifica soluzione $x = -2$

Sostituisco nell'equazione di partenza -2 al posto di x :

$$-2 + 2 + \sqrt{(-2 + 2)} = 0$$

$$0 = 0$$

L'uguaglianza e' valida e la soluzione $x = -2$ e' accettabile:

- Verifica soluzione $x = -1$

Sostituisco nell'equazione di partenza -1 al posto di x :

$$-1 + 2 + \sqrt{(-1 + 2)} = 0$$

$$1 + \sqrt{1} = 0$$

$$2 = 0$$

L'uguaglianza non e' valida e la soluzione $x = -1$ non e' accettabile:

Una sola soluzione $x = -2$

- Metodo delle condizioni iniziali

isolo la radice portando gli altri termini dopo l'uguale:

$$\sqrt{x + 2} = -x - 2$$

Pongo le condizioni iniziali: il termine sotto radice deve essere maggiore od uguale a zero e l'altro termine deve avere lo stesso segno del radicale:

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ -x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ -x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Cambio di segno e di verso la seconda:

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

Risolve:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Quindi la soluzione e' :

$$x = -2$$

Quindi saranno accettabili solo le soluzioni che siano uguali a -2.

Ora procedo normalmente:

Elevo a quadrato da una parte e dall'altra:

$$[\sqrt{x + 2}]^2 = (-x - 2)^2$$

Eseguo il quadrato dopo l'uguale. Prima dell'uguale semplifico il quadrato con la radice:

$$x + 2 = x^2 + 4x + 4$$

Trasporto tutto prima dell'uguale:

$$x + 2 - x^2 - 4x - 4 = 0$$

Sommo:

$$-x^2 - 3x - 2 = 0$$

Cambio segno:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Risolve:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

Le radici sono:

$$x_1 = (-3 - 1)/2 = -2$$

$$x_2 = (-3 + 1)/2 = -1$$

La prima soluzione $x=-2$ e' accettabile.
la seconda $x=-1$ non e' accettabile.

Esercizio 3

Con un po' di attenzione e' talvolta possibile risolvere l'equazione in modo immediato senza fare troppi calcoli. Esempio:

$$x^2 + \sqrt{(x^2 - 4)} = 0$$

Se isolo la radice ottengo:

$$\sqrt{(x^2 - 4)} = -x^2$$

Ora il primo termine e' positivo mentre il secondo e' sicuramente negativo (essendo un quadrato col segno meno davanti) e un numero positivo non puo' mai essere uguale ad un numero negativo quindi l'equazione non ammette soluzioni.

Comunque non ti preoccupare, anche se non te ne accorgi, con i soliti metodi si ottengono gli stessi risultati; te lo mostro:

- **Metodo della verifica**

Isolo la radice, ottengo:

$$\sqrt{(x^2 - 4)} = -x^2$$

Elevo a quadrato da una parte e dall'altra:

$$[\sqrt{(x^2 - 4)}]^2 = (-x^2)^2$$

Prima dell'uguale semplifico il quadrato con la radice, dopo l'uguale eseguo il quadrato:

$$x^2 - 4 = x^4$$

Trasporto tutto prima dell'uguale:

$$-x^4 + x^2 - 4 = 0$$

Cambio segno:

$$x^4 - x^2 + 4 = 0$$

Equazione biquadratica. Risolvo:

Pongo:

$$x^2 = y \text{ e quindi } x^4 = y^2$$

$$y^2 - y + 4 = 0$$

risolvo rispetto ad y:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1^2 - 16)}}{2}$$

Essendo il Delta minore di zero l'equazione non ha soluzioni reali.
Nessuna soluzione.

- **Metodo delle condizioni iniziali**

Isolo la radice ed ottengo:

$$\sqrt{(x^2 - 4)} = -x^2$$

Pongo le condizioni iniziali: il termine sotto radice deve essere maggiore od uguale a zero e l'altro termine deve avere lo stesso segno del radicale:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ -x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Cambio di segno e di verso la seconda:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{Questa ammette la sola soluzione } x = 0$$

Risolvo:

$$\begin{cases} x \leq -2 & \cup & x \geq 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il sistema non ammette soluzioni quindi l'equazione irrazionale non e' risolvibile.

Due radici

Lasciamo una radice prima dell'uguale e porteremo l'altra dopo l'uguale poi eleveremo a quadrato entrambe i membri dell'equazione.

Elevando a quadrato potrebbero aggiungersi delle soluzioni quindi le soluzioni trovate vanno o verificate

sull'equazione di partenza oppure controllate con delle condizioni di realta' iniziali.
Vediamo il procedimento su degli esempi.

Esercizio 1

$$\sqrt{(5x + 10)} - \sqrt{(4 - x^2)} = 0$$

- Metodo della verifica

Porto la seconda radice dopo l'uguale:

$$\sqrt{(5x + 10)} = \sqrt{(4 - x^2)}$$

Elevo a quadrato da una parte e dall'altra:

$$[\sqrt{(5x + 10)}]^2 = [\sqrt{(4 - x^2)}]^2$$

Semplifico i quadrati con le radici:

$$5x + 10 = 4 - x^2$$

Trasporto tutto prima dell'uguale:

$$5x + 10 - 4 + x^2 = 0$$

Sommo:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Risolvero:

$$-5 \pm \sqrt{(5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(25 - 24)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(25 - 24)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -3$$

Ora devo verificare se le soluzioni vanno bene nell'equazione di partenza o sono dovute all'elevamento a quadrato:

- Verifica per $x = -2$:

Sostituisco nell'equazione iniziale alla x il valore -2

$$\sqrt{[5 \cdot (-2) + 10]} - \sqrt{[4 - (-2)^2]} = 0$$

$$\sqrt{0} - \sqrt{0} = 0$$

Avendo ottenuto un'uguaglianza la soluzione $x = -2$ e' accettabile

- Verifica per $x = -3$:

Sostituisco nell'equazione iniziale alla x il valore -3

$$\sqrt{[5 \cdot (-3) + 10]} - \sqrt{[4 - (-3)^2]} = 0$$

$$\sqrt{(-5)} - \sqrt{(-5)} = 0$$

Avendo radici di numeri negativi la soluzione $x = -3$ non e' accettabile :

Soluzione $x = -2$

- Metodo delle condizioni iniziali

Anche qui con un po' di attenzione e' talvolta possibile risolvere l'equazione in modo immediato senza fare troppi calcoli. Esempio:

$$\sqrt{(x^2 - 3)} + \sqrt{(x^2 - 4)} = 0$$

Se isolo la prima radice ottengo:

$$\sqrt{(x^2 - 3)} = -\sqrt{(x^2 - 4)}$$

Ora il primo termine e' positivo mentre il secondo e' sicuramente negativo (essendo un radicale col segno meno davanti) e un numero positivo non puo' mai essere uguale ad un numero negativo quindi l'equazione non ammette soluzioni.

Anche qui se non te ne accorgi, con i soliti metodi si ottengono gli stessi risultati

Due radici piu' un'espressione senza radici

Lasciemo una radice prima dell'uguale e porteremo gli altri termini dopo l'uguale poi eleveremo a quadrato entrambe i membri dell'equazione.

Considera come termini le due radici piu' il termine fuori radice: hai tre termini: ne devi lasciare due da una parte ed uno dall'altra dell'uguale, quindi puoi anche fare diversamente da come faccio io: ormai per me isolare una radice prima dell'uguale e' un'abitudine e, di solito, e' anche il sistema piu' semplice.

In questo modo otteniamo un'equazione ove resta una sola radice (il doppio prodotto dell'elevamento a quadrato) piu' dei termini fuori radice e ci rifacciamo a un caso precedente gia' visto.

D'ora in avanti controlliamo la compatibilita' delle soluzioni solamente sostituendole nell'espressione iniziale.

Vediamo il procedimento su un esempio:

$$\sqrt{x+7} - 2 = \sqrt{x-1}$$

Isolo la prima radice:

$$\sqrt{x+7} = 2 + \sqrt{x-1}$$

Elevo al quadrato da una parte e dall'altra:

$$[\sqrt{x+7}]^2 = [2 + \sqrt{x-1}]^2$$

Nel primo termine semplifico la radice con il quadrato, nel secondo eseguo il **quadrato**:

$$x+7 = 4 + x-1 + 4\sqrt{x-1}$$

Isolo la radice lasciandola dopo l'uguale (perche' li' e' positiva):

$$x+7-4-x+1 = 4\sqrt{x-1}$$

$$4 = 4\sqrt{x-1}$$

Rilevo al quadrato:

$$(4)^2 = [4\sqrt{x-1}]^2$$

Calcolo:

$$16 = 16(x-1)$$

$$16 = 16x - 16$$

$$16x = 32$$

$$x = 2$$

Ora devo verificare se la soluzione va bene nell'equazione di partenza o e' dovuta all'elevamento a quadrato:

Verifica per x = 2

Sostituisco nell'equazione iniziale alla x il valore 2:

$$\sqrt{2+7} - 2 = \sqrt{2-1}$$

$$3 - 2 = 1$$

Avendo ottenuto un'uguaglianza la soluzione x=2 e' accettabile.

Tre radici

Lasciemo una radice da una parte e porteremo le altre due dall'altra parte facendo in modo, per semplicita', di spostare le radici dove hanno il segno positivo.

In questo modo otteniamo un'equazione ove resta una sola radice (il doppio prodotto dell'elevamento a quadrato), inoltre dei termini fuori radice che potremo sommare per ottenere un termine unico e ci rifacciamo a un caso precedente gia' visto.

Anche qui controlliamo la compatibilita' delle soluzioni solamente sostituendole nell'espressione iniziale

Vediamo il procedimento su un esempio:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = \sqrt{2x-7}$$

Lascio una radice prima dell'uguale:

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{x} + \sqrt{2x-7}$$

Elevo al quadrato da una parte e dall'altra:

$$[\sqrt{x+5}]^2 = [\sqrt{x} + \sqrt{2x-7}]^2$$

Nel primo termine semplifico la radice con il quadrato, nel secondo eseguo il quadrato di un binomio:

$$x+5 = x + 2\sqrt{x}\cdot(2x-7) + 2x-7$$

Isolo la radice lasciandola dopo l'uguale (perche' li' e' positiva) e dentro la radice eseguo la moltiplicazione:

$$x + 5 - x - 2x + 7 = 2\sqrt{(2x^2 - 7x)}$$

$$12 - 2x = 2\sqrt{(2x^2 - 7x)}$$

Osserviamo che possiamo semplificare tutta l'equazione per due (e' una cosa abbastanza comune in queste equazioni il poter semplificare: conviene farlo sempre per rendere piu' semplice il successivo elevamento a quadrato):

$$6 - x = \sqrt{(2x^2 - 7x)}$$

La radice e' gia' isolata, quindi elevo a quadrato da entrambe le parti:

$$(6 - x)^2 = [\sqrt{(2x^2 - 7x)}]^2$$

$$36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 7x$$

$$36 - 12x + x^2 - 2x^2 + 7x = 0$$

$$-x^2 - 5x + 36 = 0$$

Otengo l'equazione:

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

Risolve:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -9$$

Ora devo verificare se le soluzioni vanno bene nell'equazione di partenza o sono dovute all'elevamento a quadrato:

- **Verifica per $x = 4$**

Sostituisco nell'equazione iniziale alla x il valore 4

$$\sqrt{(4 + 5)} - \sqrt{4} = \sqrt{(2 \cdot 4 - 7)}$$

$$3 - 2 = 1$$

Avendo ottenuto un'uguaglianza la soluzione $x=4$ e' accettabile

- **Verifica per $x = -9$**

Sostituisco nell'equazione iniziale alla x il valore -9

$$\sqrt{(-9 + 5)} - \sqrt{(-9)} = \sqrt{(2 \cdot (-9) - 7)}$$

Avendo ottenuto radici con argomento negativo la soluzione $x=-9$ non e' accettabile.

Tre radici piu' un'espressione senza radici

Lasciamo una radice ed il termine senza radice da una parte e porteremo le altre due radici dall'altra parte facendo in modo, per semplicita', di spostare le radici dove hanno il segno positivo (se possibile).

In questo modo otteniamo un'equazione ove restano due radici (il doppio prodotto dell'elevamento a quadrato uno prima ed uno dopo l'uguale) ed anche i 4 quadrati che potremo sommare per ottenere un termine unico.

Quindi ci rifacciamo a un caso precedente gia' visto (2 radici piu' un termine senza radici).

Anche qui controlliamo la compatibilita' delle soluzioni solamente sostituendole nell'espressione iniziale.

Qui andiamo su esercizi chilometrici. Vediamone comunque almeno uno:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{2x+1}$$

Elevo al quadrato da una parte e dall'altra:

$$(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2 = (\sqrt{2x+1})^2$$

otteniamo:

$$x + 1 + 2\sqrt{x(x+1)} + x = 2x + 2\sqrt{2x+1}$$

Sommo i termini simili e, fortunatamente, mi si semplificano parecchie cose.

Restano solamente (ci e' andata bene, abbiamo solo due termini) :

$$2\sqrt{x(x+1)} + x = 2\sqrt{2x}$$

Divido per 2 da entrambe le parti e multiplico dentro radice.

Siccome quasi sempre e' possibile semplificare, per rendere piu' semplici i calcoli e' necessario appena possibile semplificare i termini:

$$\sqrt{x^2 + x + x} = \sqrt{2x}$$

Adesso elevo al quadrato da una parte e dall'altra:

$$(\sqrt{x^2 + x + x})^2 = (\sqrt{2x})^2$$

Elimino le radici con i quadrati ed ottengo:

$$x^2 + x = 2x$$

$$x^2 + x - 2x = 0$$

$$x^2 - x = 0$$

e' un'equazione spuria; raccolgo la x:

$$x(x - 1) = 0$$

Otengo le soluzioni:

- $x = 0$
- $x - 1 = 0 \quad x = 1$

Ora devo verificare se le soluzioni vanno bene nell'equazione di partenza o sono dovute all'elevamento a quadrato:

- **Verifica per $x = 0$**

Sostituisco nell'equazione iniziale alla x il valore 0:

$$\sqrt{0+1} + \sqrt{0} = \sqrt{2-0} + 1$$

$1 = 1$ Avendo ottenuto un'uguaglianza la soluzione $x=0$ e' accettabile.

- **Verifica per $x = 1$**

Sostituisco nell'equazione iniziale alla x il valore 1:

$$\sqrt{1+1} + 1 = \sqrt{2 \cdot 1} + 1$$

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

Essendo questa un'uguaglianza valida anche la soluzione $x=1$ e' accettabile.

Quattro radici

Lasciamo due radici da una parte e porteremo le altre due radici dall'altra parte facendo in modo, per semplicita', di spostare le radici dove hanno il segno positivo (se possibile).

In questo modo otteniamo un'equazione ove restano due radici (il doppio prodotto dell'elevamento a quadrato uno prima ed uno dopo l'uguale) ed anche i 4 quadrati che potremo sommare per ottenere un termine unico.

Quindi ci rifacciamo a un caso precedente gia' visto (2 radici piu' un termine senza radici).

Anche qui controlliamo la compatibilita' delle soluzioni solamente sostituendole nell'espressione iniziale.

Anche qui andiamo su esercizi chilometrici; vediamone comunque uno:

$$\sqrt{x+35} + \sqrt{x} = \sqrt{x+8} + \sqrt{x+15}$$

Elevo al quadrato da una parte e dall'altra:

$$(\sqrt{x+35} + \sqrt{x})^2 = (\sqrt{x+8} + \sqrt{x+15})^2$$

Otengo:

$$x + 35 + 2\sqrt{x(x+35)} + x = x + 8 + 2\sqrt{(x+8)(x+15)} + x + 15$$

sommo i termini simili (le x spariscono) e eseguo le operazioni dentro radice:

$$12 + 2\sqrt{x^2 + 35x} = 2\sqrt{x^2 + 23x + 120}$$

Divido per 2 tutti i termini:

Siccome quasi sempre e' possibile semplificare, per rendere piu' semplici i calcoli e' necessario semplificare i termini subito appena possibile:

$$6 + \sqrt{x^2 + 35x} = \sqrt{x^2 + 23x + 120}$$

$6 + \sqrt{x^2 + 35x}$ elevo ancora al quadrato da entrambe le parti:

$$(6 + \sqrt{x^2 + 35x})^2 = (\sqrt{x^2 + 23x + 120})^2$$

Prima dell'uguale sviluppo il quadrato, dopo l'uguale semplifico il quadrato con la radice:

$$36 + 12\sqrt{x^2 + 35x} + x^2 + 35x = x^2 + 23x + 120$$

sommo i termini simili:

$$12\sqrt{x^2 + 35x} = 84 - 12x$$

divido tutti i termini per 12:

$$\sqrt{x^2 + 35x} = 7 - x$$

Ora elevo ancora a quadrato da entrambe le parti dell'uguale:

$$(\sqrt{x^2 + 35x})^2 = (7 - x)^2$$

ottengo:

$$x^2 + 35x = 49 - 14x + x^2$$

$$35x + 14x = 49$$

$$49x = 49$$

$$x = 1$$

Ora devo verificare se la soluzione va bene nell'equazione di partenza o e' derivata dall'elevamento a quadrato:

Verifica per $x = 1$

Sostituisco nell'equazione iniziale alla x il valore 1:

$$\sqrt{1 + 35} + \sqrt{1} = \sqrt{1 + 8} + \sqrt{1 + 15}$$

$$6 + 1 = 3 + 4$$

$$7 = 7$$

Avendo ottenuto un'uguaglianza la soluzione $x=1$ e' accettabile.

g) Equazioni reciproche

Sono equazioni caratterizzate dal fatto che per ogni soluzione esiste sempre come soluzione anche la sua reciproca (senza considerare il segno), cioe' se ho soluzione $x = 2/3$ avro' come soluzione anche $x = 3/2$ oppure $x = -3/2$.

Si riconoscono per il fatto che, considerando il polinomio associato, i coefficienti equidistanti dal centro del polinomio sono uguali come modulo (possono anche avere segni contrari).

Le chiameremo di prima specie se i segni dei termini equidistanti sono uguali, di seconda specie se i segni sono diversi; per fare un esempio pratico le seguenti sono equazioni reciproche:

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$$

di prima specie

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$$

di seconda specie

$$2x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

di seconda specie

Dividiamole per tipi secondo il grado dell'equazione (per quelle di secondo grado useremo la normale formula risolutiva):

- di terzo grado
- di quarto grado
- di quinto grado

(1) Equazioni reciproche di terzo grado

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

prima specie

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

seconda specie

Come prima cosa c'e' da dire che se l'equazione reciproca e' di grado dispari, siccome ogni soluzione deve avere la sua reciproca e, per il [teorema fondamentale dell'algebra](#) le

soluzioni sono in numero dispari, allora (intuitivamente) tra le soluzioni dovrà sempre esservi 1 (o -1) come numero reciproco di se' stesso:

- in particolare, per le equazioni reciproche di prima specie, -1

- per le equazioni reciproche di seconda specie +1

Pertanto potremo sempre usare Ruffini con il divisore.

(x+1) per le equazioni di prima specie Dimostrazione:

Per mostrare che e' possibile utilizzare la scomposizione di Ruffini con il divisore (x+1), consideriamo il polinomio associato e scomponiamolo:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a =$$

sono 4 termini possiamo raccogliere a fra il primo ed il quarto termine e bx fra il secondo ed il terzo

$$= a(x^3 + 1) + bx(x + 1) =$$

dentro la prima parentesi ho una somma di cubi: la scompongo

$$= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) =$$

ora raccolgo il termine comune (x+1)

$$= (x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] =$$

$$= (x + 1)[ax^2 - ax + a + bx] =$$

$$= (x + 1)[ax^2 + x(b-a) + a]$$

quindi un fattore del polinomio e' (x+1). Come volevamo.

(x-1) per le equazioni di seconda specie Dimostrazione:

Per mostrare che e' possibile utilizzare la scomposizione di Ruffini con il divisore (x-1) consideriamo il polinomio associato e scomponiamolo

$$ax^3 + bx^2 - bx - a =$$

sono 4 termini possiamo raccogliere a fra il primo ed il quarto termine e bx fra il secondo ed il terzo

$$= a(x^3 - 1) + bx(x - 1) =$$

dentro la prima parentesi ho una differenza di cubi: la scompongo

$$= a(x - 1)(x^2 + x + 1) + bx(x - 1) =$$

ora raccolgo il termine comune (x-1)

$$= (x - 1)[a(x^2 + x + 1) + bx] =$$

$$= (x - 1)[ax^2 + ax + a + bx] =$$

$$= (x - 1)[ax^2 + x(a+b) + a]$$

quindi un fattore del polinomio e' (x-1). Come volevamo.

Vediamo un esempio per tipo:

Equazione reciproca di prima specie

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$$

E' reciproca di prima specie perche' i coefficienti equidistanti dal centro dell'equazione sono uguali e di stesso segno:

3 con 3 e 13 con 13; posso scomporre per (x+1). Infatti:

$$P(-1) = 3(-1)^3 + 13(-1)^2 + 13(-1) + 3 =$$

$$= 3(-1) + 13(1) + 13(-1) + 3 =$$

$$= -3 + 13 - 13 + 3 = 0$$

quindi faccio la divisione di Ruffini:

	3	13	13	3
-1	3	10	3	0

Quindi ottengo:

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = (x + 1)(3x^2 + 10x + 3)$$

Adesso pongo uguali a zero i fattori ed ottengo:

- primo fattore:
 $x + 1 = 0$ cioè $x = -1$

- secondo fattore:
 $3x^2 + 10x + 3 = 0$
Applico la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

con $\beta = b/2$

Abbiamo:

$$a = 3$$

$$b = 10 \quad \beta = 5$$

$$c = 3$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(25 - 3 \cdot 3)}}{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(25 - 9)}}{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{16}}{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 4}{3}$$

- $x_1 = (-5-4)/3 =$
- $x_2 = (-5+4)/3 =$

che mi da' come soluzioni:

$$x = -3 \quad x = -1/3$$

Otengo quindi le tre soluzioni (le ordino):

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = -1/3$$

Equazione reciproca di seconda specie:

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$$

E' reciproca di seconda specie perche' i coefficienti equidistanti dal centro dell'equazione sono uguali e di segno contrario:

2 con -2 e -7 con 7

Posso scomporre per (x-1). Infatti:

$$P(1) = 2(1)^3 - 7(1)^2 + 7(1) - 2 = 2 - 7 + 7 - 2 = 0$$

quindi faccio la divisione di Ruffini:

1	2	-7	7	-2
2	-5	2	0	

Quindi ottengo:

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (x - 1)(2x^2 - 5x + 2)$$

Adesso pongo uguali a zero i fattori ed ottengo:

- primo fattore:
 $x - 1 = 0$ cioè $x = 1$

- secondo fattore:
 $2x^2 - 5x + 2 = 0$
applico la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 2 \quad b = -5 \quad c = 2$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(25 - 4 \cdot 2 \cdot 2)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(25 - 16)}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

- $x_1 = (5-3)/4 = 2/4 = 1/2$
 - $x_2 = (5+3)/4 = 8/4 = 2$
- Otengo quindi le tre soluzioni (le ordino)

$$x_1 = 1/2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

(2) Equazioni reciproche di quarto grado

Abbiamo due tipi diversi:

- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ detta anche di prima specie
- $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$ detta anche di seconda specie

(a) Equazioni reciproche di quarto grado di prima specie

E' del tipo:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Per risolvere un'equazione di questo genere prima dividiamo tutti i termini dell'equazione per x^2 :

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

Raccolgo poi i coefficienti uguali a e b :

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0$$

e poi operiamo la sostituzione:

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \text{e quindi} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Otterremo quindi un'equazione di secondo grado in y che risolveremo normalmente ottenendo per y due valori y_1 e y_2 .

Successivamente risolveremo le due equazioni (di **secondo grado**) :

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \quad x + \frac{1}{x} = y_2$$

ottenendo per la x i quattro valori delle soluzioni.

E' piu' facile risolverle praticamente che in teoria. Vediamo un esempio:

Risolvere l'equazione:

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$$

divido tutti i termini per x^2

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

Raccolgo poi i coefficienti uguali **6** e **-5** :

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

e poi operiamo la sostituzione:

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \text{e} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

otteniamo:

$$6(y^2 - 2) - 5y - 38 = 0$$

$$6y^2 - 12 - 5y - 38 = 0$$

$$6y^2 - 5y - 50 = 0$$

che ha soluzioni [calcoli](#)

Nota che questi risultati non devono essere reciproci tra loro:

$$y_1 = -\frac{5}{2} \quad y_2 = \frac{10}{3}$$

Ho quindi le due equazioni

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$$

- Risolvo la prima. Il minimo comune multiplo e' $2x$ che e' certamente **diverso da zero**:

$$\frac{2x^2 + 2}{2x} = \frac{-5x}{2x}$$

- elimino i denominatori:

$$2x^2 + 2 = -5x$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

Nota che e' un'equazione reciproca: il primo e l'ultimo termine hanno lo stesso coefficiente 2 che ha come soluzioni

le soluzioni sono reciproche:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$$

2

Ecco i calcoli:

risolviamo l'equazione:

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)} =$$

abbiamo:

$$a = 2$$

$$b = 5$$

$$c = 2$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} =$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} =$$

$$= \frac{-5 \pm 3}{4} =$$

adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno

$$= \frac{-5 + 3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-5 - 3}{4} = -2$$

Ho quindi le due soluzioni

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -2$$

- Risolvo la seconda. Il minimo comune multiplo e' 3x che e' certamente **diverso da zero**:

$$\frac{3x^2 + 3}{2x} = \frac{10x}{2x}$$

- elimino i denominatori:

$$3x^2 + 3 = 10x$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

- Nota che e' un'equazione reciproca: il primo e l'ultimo termine hanno lo stesso coefficiente 3 che ha come soluzioni. [calcoli](#)

Anche queste sono reciproche:

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = 3$$

Ecco i calcoli:

risolviamo l'equazione:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

abbiamo:

$$a = 3$$

$$b = -10 \quad \beta = -5$$

$$c = 3$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - (3)(3)}}{3} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{16}}{3} =$$

$$= \frac{5 \pm 4}{3}$$

adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno:

$$= \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5 + 4}{3} = 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = 3$$

Ottenendo per la x i quattro valori delle soluzioni:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -\frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{1}{3} \quad x_4 = 3$$

(b) Equazioni reciproche di quarto grado di seconda specie

Sono del tipo:

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

Il polinomio associato e' sempre scomponibile per $(x-1)(x+1)$.

Per mostrare che e' possibile utilizzare la scomposizione di Ruffini con i divisori $(x-1)$ $(x+1)$, consideriamo il polinomio associato e scomponiamolo:

$$ax^4 + bx^3 - bx - a =$$

Sono 4 termini possiamo raccogliere a fra il primo ed il quarto termine e bx fra il secondo ed il terzo:

$$= a(x^4 - 1) + bx(x^2 - 1) =$$

dentro la prima parentesi ho una differenza di quadrati; la scompongo:

$$= a(x^2 - 1)(x^2 + 1) + bx(x^2 - 1) =$$

Ora raccolgo il termine comune $(x^2 - 1)$

$$= (x^2 - 1)[a(x^2 + 1) + bx] = (x^2 - 1)[ax^2 + a + bx] = (x - 1)(x + 1)(ax^2 + bx + a)$$

quindi due fattori del polinomio sono: $(x-1)(x+1)$

e scomponendo con Ruffini otterremo come quoziente un'equazione di secondo grado.

Vediamo un esempio:

Risolvere l'equazione

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$$

Considero il polinomio associato:

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 \text{ e scompongo per } (x-1).$$

Faccio subito la divisione di Ruffini ricordandomi di ordinare perche' manca il termine in x^2

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & -10 & // & 10 & -3 & \\ 1 & & 3 & -7 & -7 & 3 & \\ \hline & 3 & -7 & -7 & 3 & 0 & \end{array}$$

Otengo:

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = (x - 1)(3x^3 - 7x^2 - 7x + 3) =$$

ora continuo a scomporre per $(x+1)$; faccio subito la divisione di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -7 & -7 & 3 \\ -1 & & -3 & 10 & -3 \\ \hline & 3 & -10 & 3 & 0 \end{array}$$

Quindi ho:

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = (x - 1)(3x^3 - 7x^2 - 7x + 3) = (x-1)(x+1)(3x^2 - 10x + 3)$$

Devo risolvere:

$$(x-1)(x+1)(3x^2 - 10x + 3) = 0$$

Pongo ogni fattore uguale a zero:

- $x - 1 = 0$ ottengo $x = 1$
- $x + 1 = 0$ ottengo $x = -1$
- $3x^2 - 10x + 3 = 0$

Ha come soluzioni:

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = 3$$

Ecco i calcoli; risolviamo l'equazione:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

abbiamo:

$$a = 3$$

$$b = -10 \quad \beta = -5$$

$$c = 3$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - (3)(3)}}{3} =$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{16}}{3}$$

$$= \frac{5 \pm 4}{3}$$

adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno:

$$= \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5 + 4}{3} = 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = 3$$

Quindi le soluzioni dell'equazione di partenza sono (le ho ordinate) :

$$x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 3$$

(3) Equazioni reciproche di quinto grado

Facciamo solo un cenno sul metodo di soluzione.

Possono essere di due tipi:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad \text{prima specie}$$

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0 \quad \text{seconda specie}$$

L'equazione reciproca e' di grado dispari; siccome ogni soluzione deve avere la sua reciproca e, per il [teorema fondamentale dell'algebra](#) le soluzioni sono in numero dispari (5), allora (intuitivamente) tra le soluzioni dovra' sempre esservi 1 (o -1) come numero reciproco di se' stesso:

- in particolare, per le equazioni reciproche di prima specie, -1

- per le equazioni reciproche di seconda specie +1

Pertanto potremo sempre usare Ruffini con il divisore:

$(x+1)$ per le equazioni di prima specie

$(x-1)$ per le equazioni di seconda specie

In questo modo l'equazione si trasforma in prodotto fra il termine $(x+1)$ oppure $(x-1)$ ed un'equazione reciproca di quarto grado che sappiamo già risolvere.

h) Equazioni da risolvere con artifici

Qui purtroppo non c'è niente da fare: sono equazioni che riesci a risolvere solamente con l'esperienza e quindi saprai come comportarti quando avrai fatto esercizi, esercizi ed esercizi.

Vediamo qualche esempio molto semplice e limitato ad opportune sostituzioni, ricordando che non è possibile considerare tutti i casi possibili.

Devi vedere come prima cosa se è possibile suddividere le incognite in gruppi in modo che un gruppo sia il quadrato dell'altro: in questo modo puoi trasformare la tua equazione in un'equazione di secondo grado.

Risolvere:

$$(x^2 - 4x + 8)^2 - x^2 + 4x = 28$$

se vado a sviluppare ottengo un'equazione di quarto grado.

Osservo che prima dell'uguale il termine dentro parentesi è quasi simile (a parte il segno) a quello fuori di parentesi; manca il numero 8, lo estraggo dal termine noto:

$$(x^2 - 4x + 8)^2 - x^2 + 4x = 20 + 8$$

$$(x^2 - 4x + 8)^2 - x^2 + 4x - 8 = 20$$

adesso metto in evidenza il meno:

$$(x^2 - 4x + 8)^2 - (x^2 - 4x + 8) = 20$$

Ora posso operare la sostituzione:

$$x^2 - 4x + 8 = y$$

e la mia equazione diventa:

$$y^2 - y = 20$$

$$y^2 - y - 20 = 0$$

ottengo le soluzioni:

$$y_1 = -4 \quad y_2 = 5$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione:

$$y^2 - y - 20 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = -20$$

sostituiamo nella formula

$$y_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-20)}}{2(1)}$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2}$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il più:

$$\frac{1 - 9}{2} = -4 \quad \frac{1 + 9}{2} = 5$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$y_1 = -4 \quad y_2 = 5$$

Adesso sostituisco i valori trovati alla y e devo risolvere le due equazioni:

$$x^2 - 4x + 8 = -4$$

$$x^2 - 4x + 8 = 5$$

- Risolve la prima:

$$x^2 - 4x + 8 = -4$$

$$x^2 - 4x + 12 = 0$$

Otengo le soluzioni:

$$x_1 = 2 - 2i\sqrt{2}$$

$$x_2 = 2 + 2i\sqrt{2}$$

Ecco i calcoli:

Risolvi l'equazione:

$$x^2 - 4x + 12 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4ac)}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -4 \quad \beta = -2$$

$$c = 12$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - (1)(12)}}{2}$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 12} = 2 \pm \sqrt{-8} =$$

Essendo negativo il termine dentro radice otterremo due radici complesse e coniugate

ricordando che $8 = 2^3 = 2^2 \cdot 2$ ottengo

$$= 2 \pm 2i\sqrt{2}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 2 - 2i\sqrt{2} \quad x_2 = 2 + 2i\sqrt{2}$$

- Risolve la seconda

$$x^2 - 4x + 8 = 5$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Otengo le soluzioni:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

Ecco i calcoli:

Risolvi l'equazione:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4ac)}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -4 \quad \beta = -2$$

$$c = 3$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - (1)(3)}}{2}$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1$$

Adesso devo prendere una volta il più ed una volta il meno ed ottengo le due soluzioni

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 3$$

Ho quindi le soluzioni

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 2 - 2i\sqrt{2} \quad x_4 = 2 + 2i\sqrt{2}$$

Naturalmente potevo eseguire i calcoli e poi risolvere l'equazione di quarto grado con il metodo delle equazioni abbassabili di grado, ma qui ti ho mostrato il metodo che puoi applicare anche quando non puoi utilizzare altri metodi. Pensa se le soluzioni fossero state $\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$, $3/7$, $5/4$ in tal caso è un po' difficile usare il metodo di abbassare di grado.

lo stesso ragionamento vale anche per l'equazione successiva che, se facessi i calcoli, si trasformerebbe in una equazione trinomia di sesto grado.

Quando hai delle frazioni e' utile cercare di raggruppare tutte le incognite in termini uguali in modo da poterli sostituire mediante una y:
risolvere:

$$\frac{7}{x^3 - 1} + 7x^3 = 57$$

siccome sotto abbiamo x^3-1 vediamo se possiamo trasformare anche l'altra x in modo che diventi x^3-1

siccome davanti ad x^3 ho il 7 devo togliere un 7; lo estraggo dal termine noto

$$\frac{7}{x^3 - 1} + 7x^3 = 50 + 7$$

$$\frac{7}{x^3 - 1} + 7x^3 - 7 = 50$$

ora metto in evidenza il 7 :

$$\frac{7}{x^3 - 1} + 7(x^3 - 1) = 50$$

Adesso opero la sostituzione:

$$x^3 - 1 = y$$

ed ottengo:

$$\frac{7}{y} + 7y = 50$$

supponendo y diverso da zero posso fare il minimo comune multiplo:

$$\frac{7 + 7y^2}{y} = \frac{50y}{y}$$

elimino i denominatori:

$$7 + 7y^2 = 50y$$

$$7y^2 - 50y + 7 = 0$$

ottengo le soluzioni:

$$x_1 = \frac{1}{7} \quad x_2 = 7$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione:

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4ac)}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 2 \quad \beta = 1$$

$$c = 4$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - (1)(4)}}{1}$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm \sqrt{-3}$$

Essendo negativo il termine dentro radice otterro' due radici complesse e coniugate

$$= 1 \pm i\sqrt{3}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 1 - i\sqrt{3} \quad x_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

Adesso sostituisco i valori trovati alla y e devo risolvere le due equazioni:

$$x^3 - 1 = \frac{1}{7} \quad x^3 - 1 = 7$$

- Risolve la prima:

$$x^3 - 1 = \frac{1}{7}$$

$$x^3 = \frac{1}{7} + 1$$

$$x^3 = \frac{8}{7}$$

- Cerco sia le radici reali che complesse:

$$x^3 - \frac{8}{7} = 0$$

- considero il polinomio associato e lo scompongo come [differenza di cubi](#) :

$$x^3 - \frac{8}{7} = \left(x - \frac{2}{\sqrt[3]{7}}\right) \left(x^2 + \frac{2x}{\sqrt[3]{7}} + \frac{4}{\sqrt[3]{7^2}}\right)$$

- uguagliando a zero devo risolvere le due equazioni:

$$x - \frac{2}{\sqrt[3]{7}} = 0 \quad x^2 + \frac{2x}{\sqrt[3]{7}} + \frac{4}{\sqrt[3]{7^2}} = 0$$

- risolve la prima ed ottengo una soluzione reale:

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt[3]{7}}$$

la seconda mi dara' due soluzioni complesse e coniugate.

Faccio il minimo comune multiplo:

$$\frac{x^2 \sqrt[3]{7^2} + 2x \sqrt[3]{7} + 4}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{0}{\sqrt[3]{7^2}}$$

- elimino i denominatori:

$$x^2 \sqrt[3]{7^2} + 2x\sqrt[3]{7} + 4 = 0$$

Otengo le soluzioni:

$$x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{7}}$$

$$x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{7}}$$

Ecco i calcoli:

Risoliamo l'equazione:

$$x^2 \sqrt[3]{7^2} + 2x\sqrt[3]{7} + 4 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - ac)}}{a}$$

abbiamo:

$$a = \sqrt[3]{7^2}$$

$$b = 2x\sqrt[3]{7} \quad \beta = \sqrt[3]{7}$$

$$c = 4$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt[3]{7} \pm \sqrt{(\sqrt[3]{7})^2 - (\sqrt[3]{7}1)(4)}}{\sqrt[3]{7^2}}$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt[3]{7} \pm \sqrt{3\sqrt[3]{7^2}}}{\sqrt[3]{7^2}} =$$

posso estrarre $\sqrt[3]{7}$ di radice perche' ho 7^2

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt[3]{7} \pm \sqrt[3]{7}\sqrt{-3}}{\sqrt[3]{7^2}} \quad \text{cioè} = \frac{-\sqrt[3]{7} \pm i\sqrt[3]{7}\sqrt{3}}{\sqrt[3]{7^2}}$$

ora raccolgo $\sqrt[3]{7}$ al numeratore per semplificarlo con parte del denominatore:

$$\frac{\sqrt[3]{7}(-1 \pm i\sqrt{3})}{\sqrt[3]{7^2}} =$$

semplifico ed ottengo:

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{7}} =$$

adesso devo prendere una volta il piu' ed una volta il meno ed ottengo le due soluzioni:

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{7}} \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{7}}$$

- Risolve la seconda:

$$x^3 - 1 = 7$$

$$x^3 = 8$$

Cerco sia le radici reali che complesse.

Considero il polinomio associato e lo scompongo come **differenza di cubi**:

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Uguagliando a zero devo risolvere le due equazioni:

$$x - 2 = 0 \quad x^2 + 2x + 4 = 0$$

- la prima mi da' la soluzione reale:

$$x_1 = 2$$

la seconda mi dara' due soluzioni complesse e coniugate:

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

Otengo le soluzioni:

$$x_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$x_3 = -1 + i\sqrt{3}$$

Ecco i calcoli:

Risolvi l'equazione:

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 2 \quad \beta = 1$$

$$c = 4$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - (1)(4)}}{1}$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 4} = 1 \pm \sqrt{-3}$$

Essendo negativo il termine dentro radice otterro' due radici complesse e coniugate

$$= 1 \pm i\sqrt{3}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 1 - i\sqrt{3} \quad x_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

Ho quindi le 6 soluzioni:

$$x_1 = \sqrt[2]{2} \quad x_2 = \sqrt[2]{-1 + i\sqrt{3}} \quad x_3 = \sqrt[2]{-1 - i\sqrt{3}} \quad x_4 = 2 \quad x_5 = -1 - i\sqrt{3} \quad x_6 = -1 + i\sqrt{3}$$

i) Equazioni risolubili graficamente

E' l'ultima spiaggia: se proprio non e' possibile fare nient'altro, con questo metodo potrai almeno ottenere una soluzione approssimata. Rimandando al capitolo [Analisi numerica](#) per l'analisi dell'approssimazione. Vediamo qui un semplice esempio del metodo.

Per seguire il metodo devi conoscere bene la geometria cartesiana e devi saper tracciare i [grafici delle principali funzioni](#).

Vediamo il metodo su un semplice esempio.

Risolvere:

$$\log x + x = 0$$

per $\log x$ intendiamo il logaritmo naturale di x : $\log x = \ln x = \log_e x$

cerchiamo di separare l'espressione in due funzioni di cui conosciamo i grafici una prima ed una dopo l'uguale:

$$\log x = -x$$

La soluzione cercata sara' l'ascissa del punto di intersezione delle due funzioni (o anche punto comune alle due funzioni)

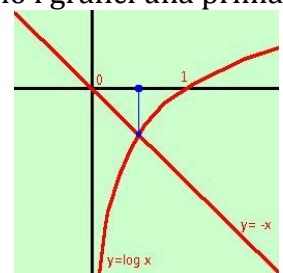
$$\begin{cases} y = \log x \\ y = -x \end{cases}$$

E' sufficiente ora tracciare i grafici delle due funzioni.

La prima e' la funzione [logaritmo](#).

La seconda e' la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

La soluzione (il punto blu piu' grosso) e' compresa fra 0 ed 1 e vale circa 0,4.



B. Disequazioni

1. Definizione

La disequazione e' una disuguaglianza che e' verificata per certi intervalli di valori

Ad esempio la disequazione

$$x - 4 \geq 0$$

e' verificata per tutti i valori della x maggiori di 4, cioe' se al posto della x metto 5, 6, oppure 4,111... e' vero che il primo termine della disuguaglianza e' maggiore o uguale al secondo.

Risolvere una disequazione significa trovare gli intervalli dei valori che sostituiti alla x rendono la disuguaglianza vera.

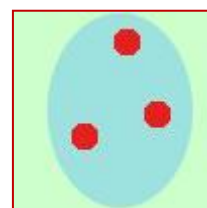
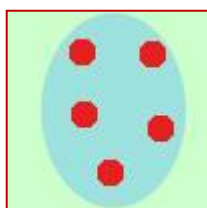
In una disequazione possiamo trovare solo i valori maggiori $>$ oppure minori $<$ di qualcosa oppure possiamo trovare i valori maggiori e uguali $\geq$ oppure minori e uguali $\leq$.

Occorre fare molta attenzione e considerare sempre se devo o no prendere il valore corrispondente all'uguale

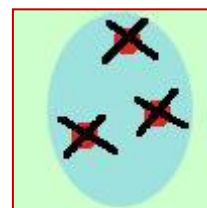
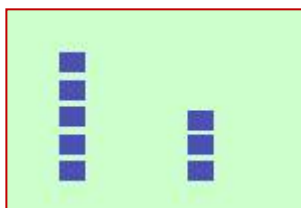
Se fai confusione fra i segni **maggiore e minore**, leggi quanto segue:

Il simbolo maggiore deriva dalla teoria degli insiemi

Supponiamo di avere due insiemi con oggetti e supponiamo di non saper contare: come facciamo a sapere quale insieme ha il maggior numero di oggetti?

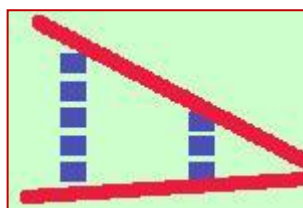


Cancello un oggetto da un insieme e contemporaneamente faccio un quadratino finche' non termino gli oggetti, ottengo due colonne.

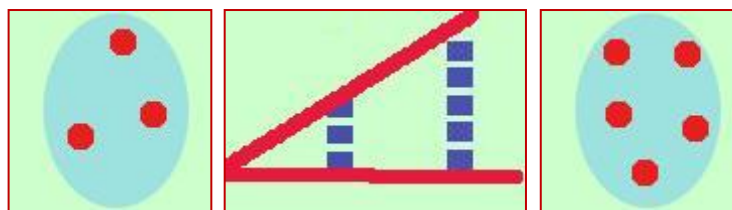


Se ora congiungo gli estremi delle colonne ottengo che le congiungenti si intersecano dove c'e' l'insieme piu' piccolo.

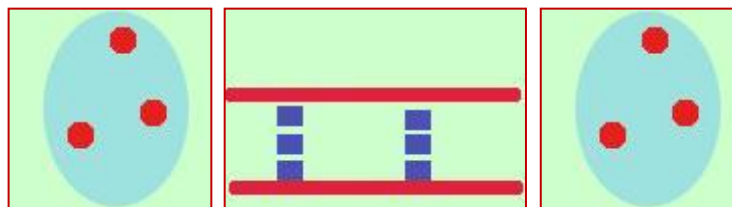
Il piu' piccolo e' sempre verso la punta



ottengo il simbolo maggiore



Il simbolo minore



Il simbolo uguale

2. Disequazioni di primo grado

Una disequazione si dice di primo grado quando le incognite vi compaiono a potenza 1

Ad esempio:

$$x + 2y - 3z - 4 \geq 3x + 2y$$

e' una disequazione di primo grado a tre incognite (x, y e z)

Qui e in seguito trattiamo essenzialmente le disequazioni ad una incognita, ma facciamo anche un cenno a quelle a piu' incognite

- Disequazioni di primo grado ad una incognita
- Disequazioni di primo grado a due incognite
- Disequazioni di primo grado a piu' incognite (cenno)

a) Disequazioni di primo grado ad una incognita

Una disequazione si dice di primo grado quando la x vi compare a potenza 1

Ad esempio:

$$x - 4 \geq 3x + 2$$

e' una disequazione di primo grado.

Per risolvere la disequazione valgono le stesse regole delle equazioni di primo grado con una grossissima differenza:

Se moltiplico o divido per un numero negativo devo cambiare di verso la disequazione

Se vuoi sapere il perche', ecco:

Cambiamento di segno e verso nelle disequazioni

Consideriamo la retta reale: su di essa possiamo sempre fissare un verso per cui i numeri a destra sono sempre superiori ai numeri a sinistra. Consideriamo ora due numeri qualunque, ad esempio 2 e 5



e la disuguaglianza corrispondente

$$2 < 5$$

Se moltiplico per -1 ottengo i due valori -2 e -5 che nella retta reale sono



e la disuguaglianza corrispondente e'

$$-2 > -5$$

oppure in modo equivalente (preferibilmente lungo la retta reale si cerca sempre di andare da sinistra verso destra cioe' scrivo prima i valori piu' piccoli poi il segno minore e infine i valori piu' grandi)

$$-5 < -2$$

Se moltiplico o divido per un numero negativo devo cambiare di verso la disequazione

Porto le x prima dell'uguale ed i numeri dopo l'uguale; chi salta l'uguale cambia di segno.

$$x - 3x \geq 2 + 4$$

calcolo

$$-2x \geq 6$$

Divido entrambe i membri per -2 e contemporaneamente cambio di verso la disequazione

$$-2x \quad 6$$

$$---- \leq ---$$

$$-2 \quad -2$$

Semplifico

$$x \leq -3$$

Quindi la soluzione e' l'insieme delle x minori od uguali a -3

Si puo' indicare anche nei seguenti modi:

$$\{x \in \mathbb{R} / x \leq -3\}$$

oppure

$$(-\infty, -3]$$

od anche



Quest'ultimo metodo di solito e' il piu' usato (quando anche il valore terminale e' compreso vi si mette un tondino)

E' possibile dare delle disequazioni di primo grado una [rappresentazione grafica](#), eccola:

[Rappresentazione grafica nelle disequazioni](#)

La rappresentazione grafica delle equazioni e' fondamentale nella risoluzione di problemi della scelta (programmazione lineare negli Istituti tecnici commerciali ed in generale per matematica finanziaria)

Si basa sulla geometria cartesiana e sulla rappresentazione di una retta nel piano cartesiano

Partiamo da un esempio: consideriamo la disequazione

$$x > 2$$

Posso anche scriverla

$$x - 2 > 0$$

Equivale a dire che devo trovare dove e' positiva la funzione

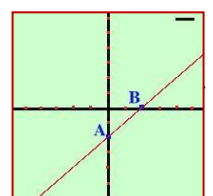
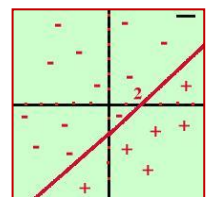
$$y = x - 2$$

che nel piano cartesiano rappresenta una retta.

[se hai bisogno di aiuto per tracciare la retta](#), ecco:

Tracciamo retta

$y = x - 2$ devo dare dei valori alla x e leggere i corrispondenti valori per y



$$\begin{array}{cc} x & y \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{array}$$

Segno i due punti $A(0,-2)$ e $B(2,0)$ su un piano cartesiano poi li congiungo con una retta

La retta taglia il piano in due parti, una in cui la funzione e' positiva ed una in cui la funzione e' negativa

La soluzione e' quella parte dell'asse x che si trova dalla parte richiesta: nel nostro caso la parte dell'asse x maggiore di 2

Vediamo ora insieme alcuni Esercizi sulle disequazioni di primo grado:

1) $x + 2 - 2x < 4x - 3 - 6x$ soluzione:

Trasporto le x prima dell'uguale, i termini noti dopo l'uguale e chi salta l'uguale cambia di segno

$$x - 2x - 4x + 6x \leq -3 - 2$$

sommo

$$x < -5$$

soluzione:



2) $3x + 2 - 2x \leq 4x - 8$ soluzione:

Trasporto le x prima dell'uguale, i termini noti dopo l'uguale e chi salta l'uguale cambia di segno

$$3x - 2x - 4x \leq -8 - 2$$

sommo

$$-3x \leq -10$$

divido per -3 e cambio di verso

$$-3x \quad -10$$

$$\text{-----} \geq \text{-----}$$

$$-3 \quad -3$$

simplifico

$$x \geq 10/3$$

soluzione:



Ho cerchiato il punto per indicare che e' un valore compreso

3) $6x + 12 - 2x > 4x - 3$ soluzione:

Trasporto le x prima dell'uguale, i termini noti dopo l'uguale e chi salta l'uguale cambia di segno

$$6x - 2x - 4x > -3 - 12$$

sommo

$$0 > -15$$

Sempre vero (perche' 0 e' sempre superiore a -15), quindi tutto R



4)

$$x + 2 \quad 4x + 3$$

$$\text{-----} - 2x \geq \text{-----}$$

$$2$$

$$3$$

il minimo comune multiplo e' 6

$$3 \cdot (x + 2) - 6 \cdot 2x \quad 2 \cdot (4x + 3)$$

$$\text{-----} \geq \text{-----}$$

soluzione:

6

6

Elimino i denominatori ed eseguo le operazioni al numeratore

$$3x + 6 - 12x \geq 8x + 6$$

Trasporto le x prima dell'uguale, i termini noti dopo l'uguale e chi salta l'uguale cambia di segno

$$3x - 12x - 8x \geq 6 - 6$$

sommo

$$-17x \geq 0$$

cambio di segno e di verso

$$17x \leq 0$$

Divido per 17 da entrambe le parti

$$17x \leq 0$$

$$x \leq 0$$

$$x \leq 0$$

$$x \leq 0$$

soluzione:



il punto e' cerchiato per indicare che e' il valore e' compreso

5) $(x + 2)^2 - 2x < x^2 - 4x - 3$ soluzione:

Eseguo i calcoli

$$x^2 + 4x + 4 - 2x < x^2 - 4x - 3$$

Trasporto le x prima dell'uguale, i termini noti dopo l'uguale e chi salta l'uguale cambia di segno

$$x^2 + 4x - 2x - x^2 + 4x < -4 - 3$$

sommo (essendo esercizi su equazioni di primo grado evidentemente i termini di grado due dovranno annullarsi)

$$6x < -7$$

Divido per 6 da entrambe le parti

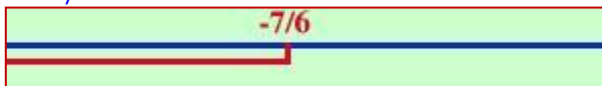
$$6x < -7$$

$$x < -7/6$$

$$x < -7/6$$

Risultato

$$x < -7/6$$



b) Disequazioni di primo grado a due incognite

Per poterle risolvere devi conoscere la rappresentazione cartesiana della retta nel piano [vedere](#)

Avremo le due incognite x ed y a potenza 1.

Ad esempio:

$$3x - 2y - 3 \geq 2x - y - 2$$

e' una disequazione di primo grado in due incognite.

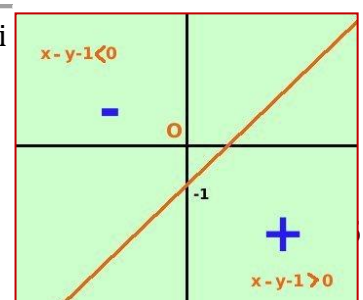
Tieni sempre presente, se devi fare una moltiplicazione, la regola vista nella pagina precedente.

Porto tutti i termini prima dell'uguale; chi salta l'uguale cambia di segno:

$$3x - 2y - 3 - 2x + y + 2 \geq 0$$

calcolo:

$$x - y - 1 \geq 0$$



Considero la funzione $x - y - 1 = 0$:

essa nel piano cartesiano rappresenta una retta che divide il piano in due parti.

In una delle due parti allora l'espressione $x - y - 1$ sarà positiva, mentre nell'altra parte sarà negativa.

Per decidere in quale delle due parti è positiva basta sostituire ad x e ad y un valore di qualunque punto che si trovi in una delle due parti.

Ad esempio considero il punto origine

$$0 \equiv (0;0)$$

e sostituisco zero ad x e ad y ;

ottengo:

$$0 + 0 - 1 < 0$$

quindi nella parte dove è l'origine l'espressione è negativa mentre nell'altra parte l'espressione è positiva.

L'espressione nulla è rappresentata dai punti della retta.

La soluzione alla nostra disequazione è quindi rappresentata dal semipiano che si trova sotto la retta (retta compresa).

c) Disequazioni di primo grado a più incognite (cenno)

Con 3 incognite potremo ancora rifarci ad una rappresentazione geometrica:

Un'espressione tipo:

$$x + y + z - 1 \geq 0$$

si può risolvere pensando che la funzione:

$$x + y + z - 1 = 0:$$

rappresenta un piano nello spazio a 3 dimensioni ed il piano divide lo spazio in due semispazi.

In una dei due semispazi allora l'espressione $x + y + z - 1$ sarà positiva, mentre nell'altra parte sarà negativa.

Anche qui per decidere in quale delle due parti è positiva basta sostituire ad x , y e z un valore di qualunque punto che si trovi in una delle due parti (di solito conviene sostituire l'origine).

Per analogia, anche se non è più possibile farsene una rappresentazione geometrica, si procederà con 4, 5, ..., n incognite;

in tal caso l'espressione uguagliata a zero rappresenterà un iperpiano nell'iperspazio a 4, 5, ..., n dimensioni e l'iperpiano dividerà l'iperspazio in due semiiperspazi: In uno dei semiiperspazi l'espressione risulterà positiva e nell'altro risulterà negativa.

Questi argomenti troveranno applicazioni nella programmazione lineare utilizzando il metodo del simplesso per risolvere problemi di minimo o massimo.

3. Sistemi di disequazioni di primo grado

Un sistema di disequazioni e' un insieme di disequazioni che valgono contemporaneamente.

Il sistema si dice di primo grado quando le disequazioni che lo compongono sono di primo grado.

Per risolvere un sistema basta risolvere le disequazioni che lo compongono poi considerare le soluzioni che vanno bene per tutte le disequazioni.

Ad esempio risolviamo:

$$\begin{cases} 2x + 14 \geq 12 + x \\ 3x - 2 < 7 \end{cases}$$

Sposto i termini con x prima dell'uguale, quelli noti dopo l'uguale cambiando di segno quelli che saltano l'uguale:

$$\begin{cases} 2x - x \geq 12 - 14 \\ 3x < 7 + 2 \end{cases}$$

sommo :

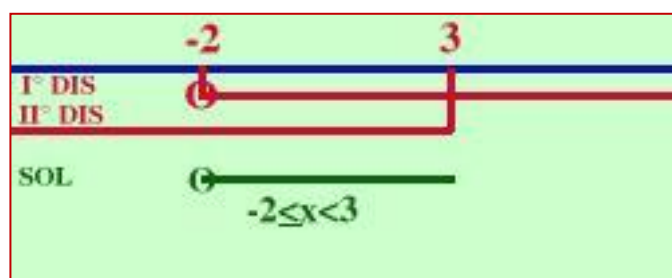
$$\begin{cases} x \geq -2 \\ 3x < 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 3 \end{cases}$$

la soluzione e':

$$-2 \leq x < 3$$

o meglio.



Come vedi i sistemi sono semplici, un po' piu' difficile e' la [loro applicazione](#).

a) Applicazioni

In genere i sistemi di disequazioni di primo grado vengono usati per trovare il segno di espressioni piu' complesse ma in genere le espressioni si possono ridurre a pochi tipi fondamentali

- [espressioni prodotto di due espressioni elementari](#)
- [espressioni quoziente di due espressioni elementari](#)
- [disequazioni con moduli](#)

(1) Espressioni prodotto di due o più espressioni elementari

Vediamo di ragionare su un esempio pratico.

Consideriamo un'espressione del tipo:

$$x^2 - 6x + 8 > 0$$

Voglio trovare l'insieme dei valori che posso assegnare alla x perche' l'espressione sia maggiore di zero.

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Risolve:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(36 - 32)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 4$$

allora posso sostituire la disequazione di partenza con l'espressione equivalente:

$$(x-2)(x-4) > 0$$

Essendo questa espressione prodotto di due termini sarà maggiore di zero quando i due termini che la compongono hanno lo stesso segno, cioè entrambe maggiori di zero oppure entrambi minori di zero. Quindi dovrei risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

Capisci che questo sarebbe un metodo molto pesante, soprattutto se invece del prodotto di due termini l'espressione fosse il prodotto di 3,4,5... termini.

Allora mettiamo in un grafico il segno di ognuno dei termini e poi scegliamo gli intervalli dove i segni sono concordi (entrambe positivi od entrambe negativi).

Poniamo sempre tutti i fattori componenti maggiori di zero per trovare i segni, indicando poi su un grafico dove sono positivi e dove negativi; poi se dovremo risolvere una disequazione positiva prenderemo gli intervalli dove il prodotto è positivo; se dobbiamo cercare dove la disequazione è negativa prenderemo gli intervalli dove il prodotto dei fattori diventa negativo.

Risolvo la prima disequazione:

$$x - 2 > 0 \quad x > 2 \quad \text{il primo fattore è positivo per } x \text{ maggiore di due.}$$

Risolvo la seconda:

$$x - 4 > 0 \quad x > 4$$

il secondo fattore è positivo per x maggiore di quattro.

Faccio lo schema Hai bisogno di [aiuto](#) per fare lo schema?

$$x > 2 \quad \text{----- (2) + + + + + + + + + + + + + + +}$$

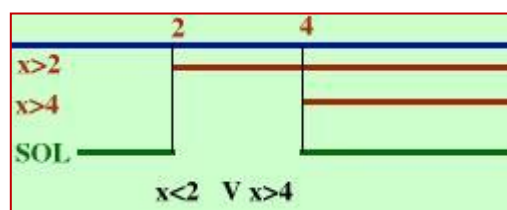
$$x > 4 \quad \text{----- (4) + + + + + + + + + + + + + + +}$$

$$\text{Espressione} \quad + + + + (2) \text{-----} (4) + + + + + + + + + +$$

L'espressione è positiva dove i due fattori sono entrambe positivi ed anche dove sono entrambe negativi, quindi avremo

$$x < 2 \vee x > 4$$

oppure in altra notazione:



In tal caso si intende positivo dove si indica con la linea intera e negativo ove la linea manca (oppure qualche professore preferisce farla tratteggiata).

Invece di SOL (soluzione) di solito si preferisce mettere $f(x)$.

Ricapitolando: Se devi risolvere una disequazione di grado superiore

- Devi considerare l'equazione associata e risolverla per trovare le soluzioni
- Devi poi scomporre la disequazione in prodotto di fattori di primo grado
- Poni tutte i fattori di primo grado maggiori di zero
- Costruisci un grafico dove metti tutti i valori positivi e negativi trovati
- In fondo al grafico fai il calcolo dei segni del prodotto fra i singoli fattori
- Se la disequazione è maggiore di zero consideri come soluzione i valori in cui il prodotto dei fattori è positivo
- Se la disequazione è minore di zero consideri come soluzione i valori in cui il prodotto dei fattori è negativo.

Più avanti, quando avremo visto le regole per risolvere le disequazioni di secondo grado scomporremo le disequazioni di grado superiore come prodotto di fattori composti da equazioni (polinomi) sia di primo che di secondo grado.

Approfondimento per disequazioni con $\geq$ o con $\leq$ e con un termine di grado superiore ad 1:

Se abbiamo disequazioni dove dobbiamo studiare anche il caso di uguaglianza a zero è necessario distinguere fra l'equazione e la disequazione e risolvere sia l'equazione che la disequazione e quindi considerare entrambe i risultati.

Normalmente, se abbiamo tutti fattori di primo grado, si procede senza farci troppo caso, in questo modo risolvo gli esercizi 2,3 e 4.

Invece, nell'esercizio 5, la presenza del fattore x^2 può generare errore ed è effettivamente necessario dividere l'equazione e la disequazione.

Vediamo alcuni esercizi

1. $x^2 - x - 6 < 0$ Soluzione:

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \text{Risolvo:}$$

$$1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 + 5}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -2$$

Quindi la disequazione è **equivalente** a:

$$(x+2)(x-3) < 0$$

Devo risolvere le due disequazioni:

$$(x+2) > 0$$

$$(x-3) > 0$$

e considerare dove i segni sono discordi (più per meno da meno) perché devo trovare i valori dove tutta l'espressione è negativa.

Risolvo la prima:

$$x + 2 > 0 \quad x > -2 \quad \text{il primo fattore è positivo per } x \text{ maggiore di meno due.}$$

Risolvero:

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 5$$

Quindi la disequazione e' equivalente a :

$$(x+2)(x-5) \geq 0$$

Devo risolvere le due disequazioni:

$$(x+2) \geq 0$$

$$(x-5) \geq 0$$

e considerare dove i segni sono concordi perche' devo trovare i valori dove tutta l'espressione e' positiva, inoltre devo anche vedere dove l'espressione si annulla.

Risolvero la prima:

$$x + 2 \geq 0 \quad x \geq -2 \quad \text{il primo fattore e' positivo o nullo per } x \text{ maggiore o uguale a } -2$$

Risolvero la seconda:

$$x - 5 \geq 0 \quad x \geq 5 \quad \text{il secondo fattore e' positivo o nullo per } x \text{ maggiore o uguale a } 5.$$

Faccio lo schema:

$$x \geq -2 \quad \text{-----} (-2) \text{+++++++++++}$$

$$x \geq 5 \quad \text{-----} (5) \text{+++++++}$$

$$f(x) \quad \text{++++} (-2) \text{-----} (5) \text{+++++++}$$

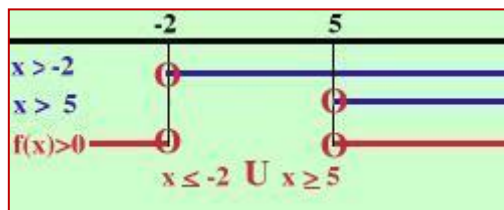
$f(x)$ indica l'espressione di partenza.

La parentesi tonda indica che l'espressione si annulla nel punto:

Io devo cercare dove l'espressione e' positiva o nulla e questo succede per:

$$x \leq -2 \text{ ed anche per (unione) } x \geq 5$$

oppure in altra notazione:



4. $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$ Soluzione:

Considero l'equazione associata:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Si tratta di un'equazione biquadratica

Risolvero:

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 2$$

Quindi la disequazione e' equivalente a:

$$(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) \geq 0$$

Devo risolvere le quattro disequazioni:

$$(x+2) \geq 0$$

$$(x+1) \geq 0$$

$$(x-1) \geq 0$$

$$(x-2) \geq 0$$

e considerare dove il prodotto dei segni da' un risultato positivo perche' devo trovare i valori dove tutta l'espressione e' positiva, inoltre devo anche vedere dove l'espressione si annulla.

Risolvero la prima:

$$x + 2 \geq 0 \quad x \geq -2 \quad \text{il primo fattore e' positivo o nullo per } x \text{ maggiore o uguale a } -2.$$

Risolvero la seconda:

$$x + 1 \geq 0 \quad x \geq -1 \quad \text{il secondo fattore e' positivo o nullo per } x \text{ maggiore o uguale a } -1.$$

Risolvero la terza:

$$x - 1 \geq 0 \quad x \geq 1 \quad \text{il terzo fattore e' positivo o nullo per } x \text{ maggiore o uguale a } 1.$$

Risolvero la quarta:

$$x - 2 \geq 0 \quad x \geq 2 \quad \text{il quarto fattore e' positivo o nullo per } x \text{ maggiore o uguale a } 2.$$

Faccio lo schema (l'unica differenza con gli esercizi precedenti e' che devo fare piu' righe):

$$\begin{array}{ll}
 x \geq -2 & \text{----} (-2) + + + + + + + + + + + + + + + + + \\
 x \geq -1 & \text{-----} (-1) + + + + + + + + + + + + + + + \\
 x \geq 1 & \text{-----} (1) + + + + + + + + + + + \\
 x \geq 2 & \text{-----} (2) + + + + + + \\
 f(x) & + + + (-2) \text{-----} (-1) + + + + (1) \text{-----} (2) + + + + + + +
 \end{array}$$

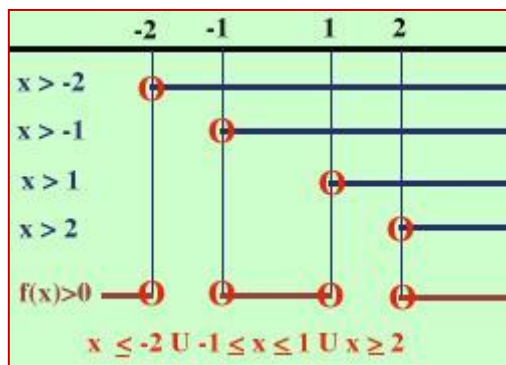
$f(x)$ indica l'espressione di partenza.

La parentesi tonda indica che l'espressione si annulla nel punto.

Io devo cercare dove l'espressione e' positiva o nulla e questo succede per:

$$x \leq -2 \cup -1 \leq x \leq 1 \cup x \geq 2$$

oppure in altra notazione:



$$5. \quad x^2(x-1) \geq 0$$

Soluzione:

L'espressione e' composta dalle due parti

$$x^2 \quad \text{ed} \quad (x-1)$$

In questo caso se risolvo nel modo "veloce" ottengo

$$x^2 \geq 0$$

$$x-1 \geq 0$$

$$x \geq 0 \quad \text{essendo un quadrato la disequazione e' sempre valida}$$

$$(x-1) \geq 0 \quad x \geq 1$$

Se vado a fare lo schema ottengo:

$$\begin{array}{ll}
 x \geq 0 & + + + + + + + + + + + + + + + + + \\
 x \geq 1 & \text{-----} (1) + + + + + + + + + + + \\
 f(x) & \text{-----} (1) + + + + + + + + + + +
 \end{array}$$

In questo schema **manca la soluzione $x=0$** che evidentemente risolve la disequazione:

Il metodo giusto per risolvere questa disequazione e':

1) risolvo l'equazione associata

2) risolvo la disequazione associata

3) unisco i risultati ottenuti

Facciamolo:

1) Risolvo l'equazione associata:

$$x^2(x-1) = 0$$

ottengo le soluzioni:

$$x = 0 \quad x = 1$$

2) Risolvo la disequazione associata; visto che l'ho risolta sopra metto solo l'ultimo passaggio ;

$$\begin{array}{ll}
 x > 0 & + + + + + + + + + + + + + + + + + \\
 x > 1 & \text{-----} 1 + + + + + + + + + + + \\
 f(x) & \text{-----} 1 + + + + + + + + + + +
 \end{array}$$

Otengo le soluzioni:

$$x > 1$$

3) Unisco le soluzioni trovate ed ottengo:

$$x = 0 \cup x \geq 1$$

(2) Segno di espressioni quoziente di due espressioni elementari

Vediamo di ragionare su un esempio pratico.

Consideriamo un'espressione del tipo:

$$x - 2$$

$$----- < 0$$

$$x - 4$$

Voglio trovare l'insieme dei valori che posso assegnare alla x perché l'espressione sia minore di zero.

Essendo questa espressione quoziente di due termini sarà minore di zero quando i due termini che la compongono hanno segno diverso, cioè una maggiore di zero e l'altra minore oppure viceversa.

Per il segno di un quoziente valgono le stesse regole che per il prodotto:

piu' diviso *piu'* uguale *piu'*

piu' diviso *meno* uguale *meno*

meno diviso *piu'* uguale *meno*

meno diviso *meno* uguale *piu'*

Quindi dovrei risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$$

Capisci che questo sarebbe un metodo molto pesante, soprattutto se invece del prodotto di due termini l'espressione fosse il prodotto di 3,4,5... termini.

Allora mettiamo in un grafico il segno di ognuno dei termini e poi scegliamo gli intervalli dove i segni sono concordi (entrambe positivi od entrambe negativi).

Poniamo sempre tutti i fattori componenti maggiori di zero per trovare i segni, indicando poi su un grafico dove sono positivi e dove negativi; poi se dovremo risolvere una disequazione positiva prenderemo gli intervalli dove il quoziente è positivo; se dobbiamo cercare dove la disequazione è negativa prenderemo gli intervalli dove il prodotto dei fattori diventa negativo.

Risolvero la prima disequazione:

$$x - 2 > 0 \quad x > 2 \quad \text{il primo fattore è positivo per } x \text{ maggiore di due.}$$

Risolvero la seconda:

$$x - 4 > 0 \quad x > 4 \quad \text{il secondo fattore è positivo per } x \text{ maggiore di quattro.}$$

Faccio lo schema:

$$x > 2 \quad \text{----- (2) + + + + + + + + + + + + + + +}$$

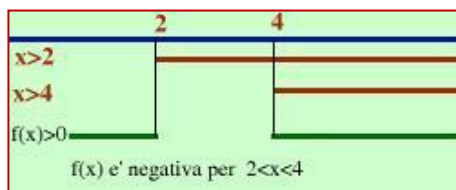
$$x > 4 \quad \text{----- (4) + + + + + + + + + +}$$

$$\text{Espressione} \quad + + + + (2) \text{-----} (4) + + + + + + + + +$$

L'espressione è negativa dove i due fattori sono uno positivo ed uno negativo, quindi avremo:

$$2 < x < 4$$

oppure in altra notazione:



Ricapitolando:

- Se devi risolvere una disequazione fratta
- Poni il numeratore ed il denominatore maggiori di zero
- Costruisci un grafico dove metti tutti i valori positivi e negativi trovati
- In fondo al grafico fai il calcolo dei segni del quoziente fra i singoli fattori
- Se la disequazione e' maggiore di zero consideri come soluzione i valori in cui il quoziente dei fattori e' positivo
- Se la disequazione e' minore di zero consideri come soluzione i valori in cui il quoziente dei fattori e' negativo:

Come costruire lo schema

Pongo che i due termini del quoziente siano maggiori di zero:

$$x - 2 > 0$$

$$x - 4 > 0$$

Comincio dal primo: $x - 2 > 0$ risolvo come fosse un'equazione: porto il numero dall'altra parte cambiandolo di segno $x > 2$ cioè' partendo da sinistra prima di 2 indico - e dopo 2 indico +

$$x > 2 \quad \text{-----} (2) \quad + + + + + + + + + + + + + + + + +$$

Ora prendo $x - 4 > 0$ risolvo come fosse un'equazione: porto il numero dall'altra parte cambiandolo di segno $x > 4$ cioè' partendo da sinistra prima di 4 indico - e dopo 4 indico +

$$\begin{array}{l} x > 2 \quad \text{-----} (2) \quad + + + + + + + + + + + + + + + + + \\ x > 4 \quad \text{-----} (4) \quad + + + + + + + + + + + \end{array}$$

Ora l'espressione e' il quoziente dei fattori considerati:

$$\text{Espressione} = \frac{(x-2)}{(x-4)}$$

Quindi il segno dell'espressione si otterra' con il quoziente dei segni dei fattori (e' identica alla regola per il prodotto). Partendo da sinistra prima di due il primo fattore e' negativo ed il secondo e' negativo, allora il quoziente e' positivo (meno diviso meno uguale piu'):

$$\begin{array}{l} x > 2 \quad \text{-----} (2) \quad + + + + + + + + + + + + + + + + + \\ x > 4 \quad \text{-----} (4) \quad + + + + + + + + + + + \\ \text{Espressione} \quad + + + + (2) \end{array}$$

Tra 2 e 4 il primo fattore e' positivo ed il secondo e' negativo (piu' diviso meno uguale meno) quindi l'espressione e' negativa:

$$\begin{array}{l} x > 2 \quad \text{-----} (2) \quad + + + + + + + + + + + + + + + + + \\ x > 4 \quad \text{-----} (4) \quad + + + + + + + + + + + \\ \text{Espressione} \quad + + + + (2) \text{-----} (4) \end{array}$$

Oltre 4 sia il primo che il secondo fattore e' positivo quindi l'espressione sara' positiva (piu' diviso piu' uguale piu'):

$x > 2$	----- (2) + + + + + + + + + + + + + + + +
$x > 4$	----- (4) + + + + + + + + + + + + + + + +
Espressione	+ + + + (2) ----- (4) + + + + + + + + + + + + + + + +

Vediamo alcuni esercizi

1) $x - 3$

----- > 0 Soluzione

$x + 1$

Pongo sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero:

$$x - 3 > 0$$

$$x + 1 > 0$$

Risolvo:

$$x > 3$$

$$x > -1$$

faccio lo schema:

$$x > 3 \quad \text{-----} (3) + + + + + + + + + + + + + + + +$$

$$x > -1 \quad \text{-----}] -1 [+ + + + + + + + + + + + + + + +$$

$$f(x) \quad + + + +] -1 [\text{-----} (3) + + + + + + + + + + + + + + + +$$

$f(x)$ indica l'espressione di partenza.

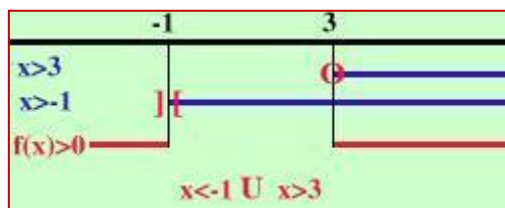
La parentesi tonda indica che l'espressione si annulla nel punto mentre la quadra indica che il valore non e' accettabile.

$] -1 [$ non e' accettabile perche' annulla il denominatore e non si puo' mai dividere per zero.

Io devo cercare dove l'espressione e' positiva e questo succede per:

$$x < -1 \cup x > 3$$

oppure in altra notazione:



2) $x - 4$

----- ≤ 0 Soluzione

$x + 2$

Pongo sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero (si fa sempre cosi' anche se devo trovare dove l'espressione e' minore od uguale a zero) :

$$x - 4 \geq 0$$

$$x + 2 > 0$$

Ho posto il numeratore maggiore od uguale a zero perche' stavolta devo cercare anche i valori dove l'espressione vale zero ed una frazione e' zero quando sopra (il numeratore) e' zero. Invece il denominatore non potra' mai essere uguale a zero.

Risolvo:

$$x \geq 4$$

$$x > -2$$

faccio lo schema:

$$x > 4 \quad \text{-----} (4) + + + + + + + + + + + + + + + +$$

$$x > -2 \quad \text{-----}] -2 [+ + + + + + + + + + + + + + + +$$

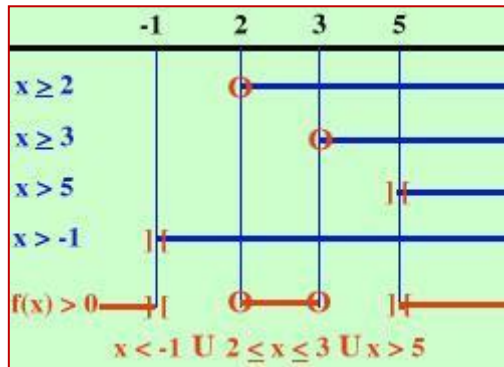
$$f(x) \quad + + + +] -2 [\text{-----} (4) + + + + + + + + + + + + + + + +$$

$f(x)$ indica l'espressione di partenza.

La parentesi tonda indica che l'espressione si annulla nel punto mentre la quadra indica che il valore non e' accettabile.

$] -2 [$ non e' accettabile perche' annulla il denominatore e non si puo' mai dividere per zero.

Io devo cercare dove l'espressione e' negativa o nulla e questo succede per x maggiore di -2 ed x minore od uguale a 4 :



(3) Disequazioni con moduli

La trattazione del modulo e' sempre la stessa sia che si tratti di equazioni di primo grado, che di disequazioni. In pratica devi suddividere la retta reale in parti e in ogni parte devi considerare la disequazione (l'equazione) tale che la parte interna del modulo sia maggiore di zero.

Accetterai pero' solo le soluzioni che cadono entro gli intervalli in cui sono valide le disequazioni (le equazioni).

Vediamo un esempio:

$$2x + |x-3| > 0$$

Il modulo $|x-3|$ e' sempre definito positivo, quindi dov'e' positivo lo prendo com'e', dov'e' negativo lo cambio di segno:

$$|x-3| = x-3 \text{ se } x \geq 3$$

$$|x-3| = -x+3 \text{ se } x < 3$$

Nota: quando risolvi il modulo devi mettere una delle parti anche uguale a zero oltre che maggiore o minore, e' indifferente se mettere l'uguale assieme col maggiore od assieme col minore, l'importante e' metterlo (io, in questa pagina lo metterò assieme col minore) .

Quindi divido la retta reale nei due intervalli:

- da meno infinito a 3 compreso ove la disequazione diventa

$$2x - x + 3 > 0$$

- da 3 a piu' infinito ove la disequazione diventa

$$2x + x - 3 > 0$$

Cioe' devo risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - x + 3 > 0 \end{cases}$$

e

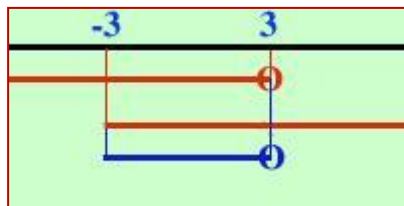
$$\begin{cases} x > 3 \\ 2x + x - 3 > 0 \end{cases}$$

Risolve il primo:

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x > -3 \end{cases}$$

facendo lo schema:



Otengo:

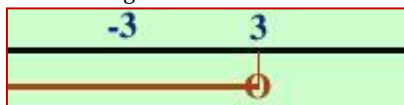
$$-3 < x \leq 3$$

Se hai bisogno di aiuto per lo schema, ecco:

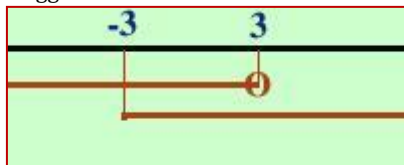
Sulla retta reale considero i due valori 3 e -3



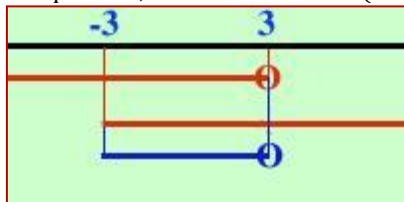
nella prima disequazione del sistema ho x minore uguale a 3 quindi faccio una riga e prendo i valori minori od uguali a tre:



nella seconda disequazione del sistema ho x maggiore di -3 quindi faccio un'altra riga e prendo i valori maggiori di meno tre:



Essendo un sistema devo prendere i valori che vanno bene sia per la prima che per la seconda disequazione, cioè i valori comuni (in blu):



ottengo

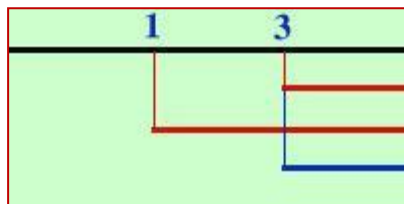
$$-3 < x \leq 3$$

Risolve il secondo:

$$\begin{cases} x > 3 \\ 2x + x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ x > 1 \end{cases}$$

facendo lo schema:

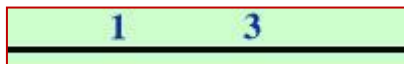


ottengo

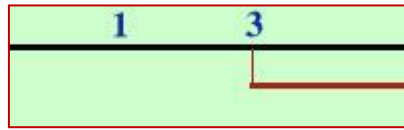
$$x > 3$$

Se hai bisogno di aiuto per lo schema, ecco:

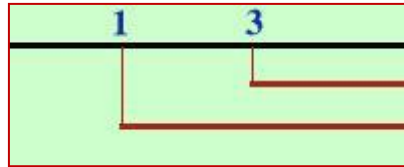
Sulla retta reale considero i due valori 3 e 1



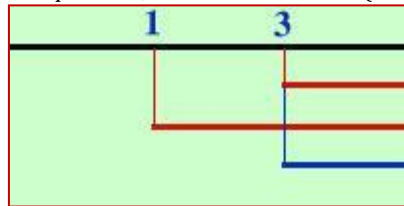
nella prima disequazione del sistema ho x maggiore di 3 quindi faccio una riga e segno i valori maggiori di tre:



nella seconda disequazione del sistema ho x maggiore di 1 quindi faccio un'altra riga e prendo i valori maggiori di uno:



Essendo un sistema devo prendere i valori che vanno bene sia per la prima che per la seconda disequazione, cioè i valori comuni (in blu) :



ottengo:

$$x > 3$$

Ora metto **assieme** le soluzioni dei due sistemi ed ottengo:

$$x > -3.$$

Ecco:

Devo mettere assieme le soluzioni dei due sistemi

$$-3 < x \leq 3 \quad \text{e} \quad x > 3$$

la prima parte va da -3 escluso a 3 compreso e la seconda da 3 escluso fino a più infinito quindi le due parti si susseguono con continuità ed otteniamo

$$-3 < x$$

cioè i valori da meno tre a più infinito

4. Disequazioni di secondo grado

Come hai visto per alcune disequazioni di secondo grado potremmo usare la scomposizione in fattori di primo grado, però vi sono delle equazioni che non sono scomponibili.

Quindi è necessario elaborare un metodo generale per determinare sempre il segno delle disequazioni di secondo grado.

Vi sono due metodi, uno più razionale e l'altro più intuitivo:

- [Metodo algebrico](#)
- [Metodo della parabola](#)

L'uno e l'altro conducono comunque agli stessi risultati:

- [Tabella di riepilogo](#)

a) Metodo algebrico

Risolvere una disequazione di secondo grado significa trovare il segno del polinomio di secondo grado.

Considero il polinomio di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c$$

Per determinarne il segno consideriamo sempre il caso in cui $a > 0$ (se fosse a minore di zero basterebbe moltiplicare tutto per -1 e in tal caso ricorda di cambiare il verso alla

disequazione).

Distinguiamo i tre casi:

- Delta del polinomio maggiore di zero
- Delta del polinomio uguale a zero
- Delta del polinomio minore di zero

(1) Delta del polinomio maggiore di zero

Voglio trovare il segno del polinomio di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c$$

Considero l'equazione associata:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se il **discriminante** dell'equazione e' maggiore di zero allora ho due soluzioni

x_1 e x_2 reali e distinte

e in questo caso posso utilizzare la **decomposizione del trinomio**:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

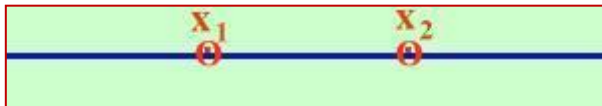
Quindi bastera' trovare il segno di:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

Anzi, siccome a e' maggiore di zero possiamo limitarci a:

$$(x - x_1)(x - x_2)$$

Dobbiamo trovare il segno di quest'espressione quando ad x assegniamo un valore sulla retta reale:



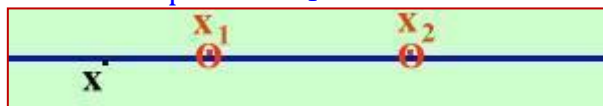
Ho cerchiato i valori perche' in quei punti l'espressione vale zero

Vi sono tre possibilita', la x si puo' trovare (partendo da sinistra):

- Prima di x_1
- tra x_1 ed x_2
- Dopo x_2

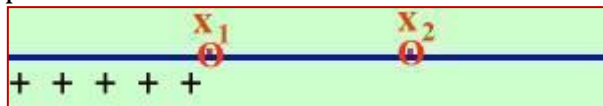
dobbiamo studiare tutti e tre i casi :

- **la x si trova prima di x_1 :**

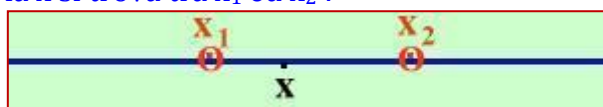


In questo caso il fattore $(x - x_1)$ e' negativo (perche' ho un numero piu' a sinistra meno un numero piu' a destra); ma anche il fattore $(x - x_2)$ e' negativo (perche' ho un numero piu' a sinistra meno un numero piu' a destra).

Quindi l'espressione $(x - x_1)(x - x_2)$ essendo il prodotto di due fattori negativi e' positiva:



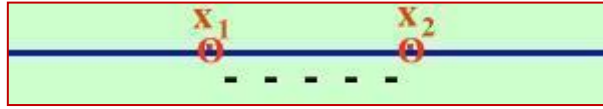
- **la x si trova tra x_1 ed x_2 :**



In questo caso il fattore $(x - x_1)$ e' positivo (perche' ho un numero piu' a destra meno un numero piu' a sinistra); mentre il fattore $(x - x_2)$ e' negativo (perche' ho un

numero piu' a sinistra meno un numero piu' a destra).

Quindi l'espressione $(x - x_1)(x - x_2)$ essendo il prodotto di un positivo ed un negativo e' negativa:

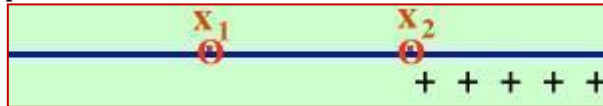


- La x si trova dopo x_2 :

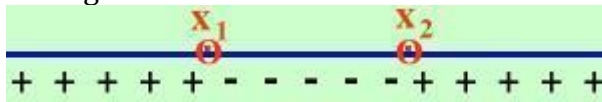


In questo caso il fattore $(x - x_1)$ e' positivo (perche' ho un numero piu' a destra meno un numero piu' a sinistra); ma anche il fattore $(x - x_2)$ e' positivo (perche' ho un numero piu' a destra meno un numero piu' a sinistra).

Quindi l'espressione $(x - x_1)(x - x_2)$ essendo il prodotto di due numeri positivi e' positiva:



Raccogliendo i risultati avremo:



Cioe' se il delta e' maggiore di zero il trinomio e' positivo per valori esterni all'intervallo delle radici ed e' negativo per valori interni:

	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > a > 0$	valori esterni all'intervallo delle radici	valori interni all'intervallo delle radici

(2) Delta del polinomio uguale zero

Se il **discriminante** dell'equazione e' uguale a zero allora ho due soluzioni:

$x_1 = x_2$ reali e coincidenti

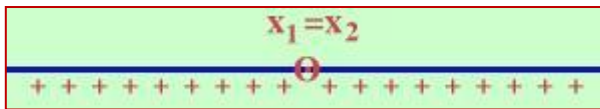
e in questo caso la **decomposizione del trinomio** diventera':

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$$

e il segno di un quadrato e' sempre positivo

Apriamo una parentesi per capirci meglio: e' come se le due soluzioni del caso precedente si avvicinassero tra loro sino a **toccarsi**, allora avremo solo valori positivi, mentre i valori negativi spariscono .

Quindi avremo:



Se il delta e' uguale a zero il trinomio e' positivo per tutti i valori eccetto il valore per cui si annulla.

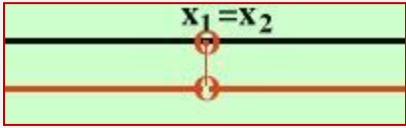
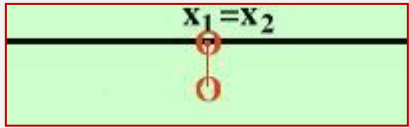
Quando il delta vale zero le soluzioni dell'equazione di secondo grado valgono $-b/2a$:

infatti se nella formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

pongo il termine sotto radice uguale a zero ottengo

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$

	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta = a > 0$	 tutti i valori eccetto $-b/2a$ per cui si annulla	 nessun valore

(3) Delta del polinomio minore di zero

Se il **discriminante** dell'equazione e' minore di zero allora non ho nessuna soluzione quindi non posso fare riferimento ad x_1 ed x_2 .

Allora per vedere il segno del trinomio:

$$ax^2 + bx + c$$

Devo riferirmi a qualcos'altro: in matematica io so che un quadrato ha sempre il segno positivo, quindi cerco di isolare parte del trinomio facendola diventare un quadrato.

Come prima cosa metto in evidenza a fra i vari termini:

$$ax^2 + bx + c =$$

Ma se a non c'e' in tutti i termini come si fa a metterla in evidenza? Per metterla in evidenza basta prima farla comparire moltiplicando i termini senza a per a/a (e' come moltiplicarli per 1):

$$= ax^2 + \frac{abx}{a} + \frac{ac}{a} =$$

Ora posso mettere in evidenza la a raccogliendo quella al numeratore:

$$= a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}) =$$

Ora il primo termine entro parentesi e' quadrato, posso considerare il secondo come doppio prodotto.

Il **termine da aggiungere (e togliere)** perche' venga un quadrato e':

$$\frac{b^2}{4a^2}$$

$$-----$$

$$4a^2$$

Eseguo:

$$= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) =$$

Scrivo i primi tre termini come quadrato e negli ultimi due faccio il minimo comune multiplo:

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

e questa e' un'espressione di cui conosciamo il segno, infatti:

- il quadrato e' positivo
- il termine sopra il segno di frazione $b^2 - 4ac$ corrisponde al Delta ed e' negativo, quindi con il meno davanti diventa positivo
- il termine al denominatore $4a^2$ e' positivo perche' e' quadrato; tutta l'espressione e' positiva

Quindi posso dire:

Se il delta e' minore di zero il trinomio e' sempre positivo per tutti i valori della x:

	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta < 0$ $a > 0$	sempre verificato per ogni valore di x	mai verificato

b) Metodo della parabola (geometrico)

Posso considerare l'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

come l'intersezione in un piano cartesiano fra la parabola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

e l'asse delle x:

$$y = 0$$

Il trinomio $ax^2 + bx + c$ sara' positivo per i valori sull'asse delle x per cui la parabola e' sopra l'asse, negativo quando la parabola e' sotto l'asse x:

Dobbiamo distinguere tre casi :

- **Parabola che interseca in due punti l'asse delle x**
(Delta maggiore di zero)
- **Parabola tangente all'asse delle x**
(Delta uguale a zero)
- **Parabola che non interseca l'asse delle x**
(Delta minore di zero)

(1) Parabola che interseca l'asse x in due punti

E' equivalente al caso ove il delta del polinomio e' maggiore di zero (2 soluzioni reali = 2 punti sull'asse x).

Distinguiamo i due casi:

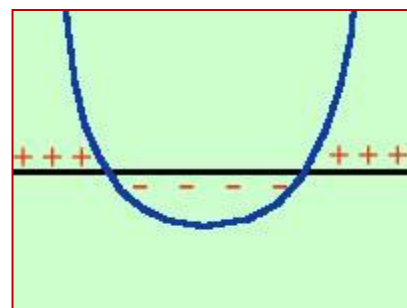
- $a > 0$
- $a < 0$

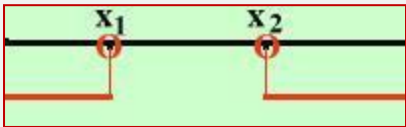
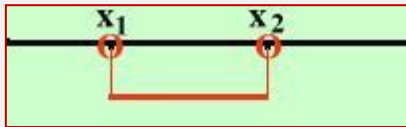
Quando a è minore di zero potremmo cambiare di segno tutti i termini del trinomio (cambiando anche di verso la disequazione), ma il metodo della parabola è talmente semplice che di solito si preferisce applicarlo senza cambiare di segno

$a > 0$

Se a è maggiore di zero la parabola ha la concavità verso l'alto.

Quindi avremo che il trinomio è positivo per valori esterni all'intervallo delle intersezioni ed è negativo per valori interni:

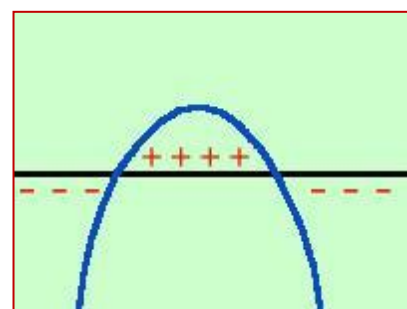


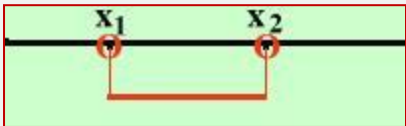
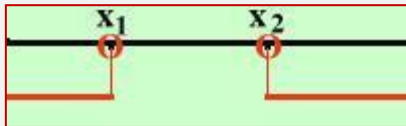
$\Delta > 0$ $a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
	 valori esterni all'intervallo delle radici	 valori interni all'intervallo delle radici

$a < 0$

Se a è minore di zero la parabola ha la concavità verso il basso

quindi avremo che il trinomio è positivo per valori interni all'intervallo delle intersezioni ed è negativo per valori esterni



$\Delta > 0$ $a < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
	 valori interni all'intervallo delle radici	 valori esterni all'intervallo delle radici

(2) Parabola tangente all'asse delle x

È equivalente al caso ove il delta del polinomio è uguale a zero (2 soluzioni reali coincidenti = 2 punti coincidenti, cioè un solo punto sull'asse x).

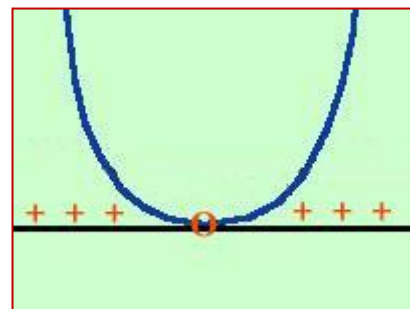
Distinguiamo i due casi:

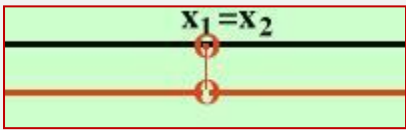
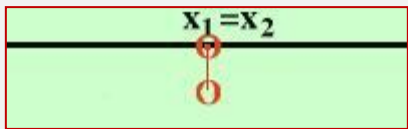
- $a > 0$
- $a < 0$

$a > 0$

Se a è maggiore di zero la parabola ha la concavità verso l'alto.

Quindi avremo che il trinomio è positivo per tutti i valori eccetto il valore del vertice $-b/2a$ per cui si annulla:

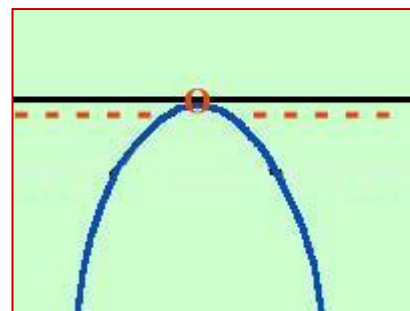


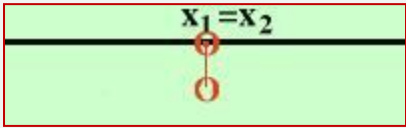
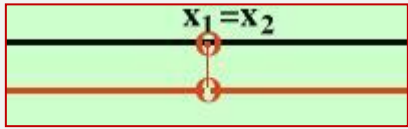
	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta = 0$ $a > 0$	 tutti i valori eccetto $-b/2a$ per cui si annulla	 nessun valore

$a < 0$

Se a è minore di zero la parabola ha la concavità verso il basso.

Quindi avremo che il trinomio è negativo per tutti i valori eccetto il valore del vertice $-b/2a$ per cui si annulla:



	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta = 0$ $a < 0$	 nessun valore	 tutti i valori eccetto $-b/2a$ per cui si annulla

(3) Parabola senza punti comuni con l'asse x

È equivalente al caso ove il delta del polinomio è minore di zero (nessuna soluzione = nessun punto di intersezione).

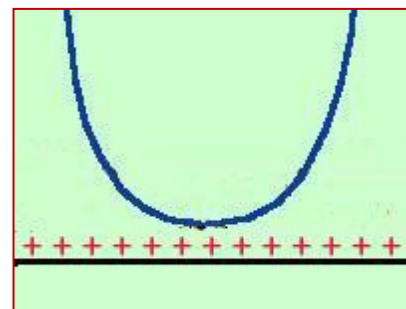
Distinguiamo i due casi:

- $a > 0$
- $a < 0$

$$a > 0$$

Se a è maggiore di zero la parabola ha la concavità verso l'alto

Siccome non tocca l'asse x allora tutti i suoi punti saranno sopra, quindi avremo che il trinomio è positivo per tutti i valori

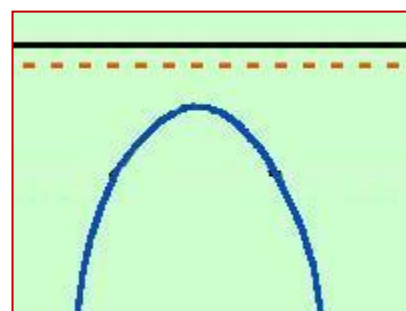


$\Delta < 0$ $a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
	sempre verificato per ogni valore di x	mai verificato

$$a < 0$$

Se a è minore di zero la parabola ha la concavità verso il basso.

Siccome non tocca l'asse x allora tutti i suoi punti saranno sotto, quindi avremo che il trinomio è negativo per tutti i valori :



$\Delta < 0$ $a < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
	mai verificato	sempre verificato per ogni valore di x

c) Tabella di riepilogo

Puoi vedere la tabella di riepilogo per le disequazioni di secondo grado. distinguiamo i due casi:

- $a > 0$
- $a < 0$

Il mio consiglio di solito è, per non fare confusione, di studiare solamente la tabella con $a > 0$, e, in caso di a negativo, cambiare di segno tutti i termini e di verso la disequazione. Decidi tu cosa fare seguendo anche le spiegazioni del tuo insegnante

(1) Tabella di riepilogo con $a > 0$

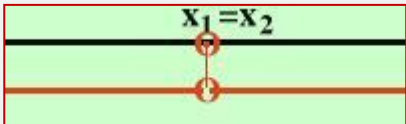
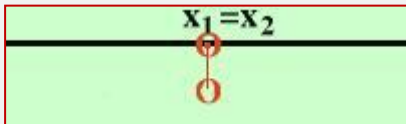
Per risolvere una disequazione di secondo grado devi considerare l'equazione associata ed applicare la formula risolutiva: devi poi controllare il termine entro radice se è

- positivo (ed allora risolvendo trovi due valori)

- nullo (ed allora trovi due valori coincidenti)
- negativo (ed allora non puoi risolvere)

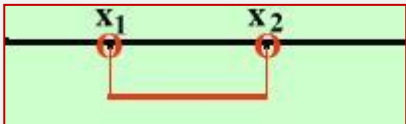
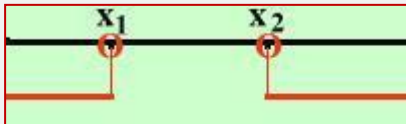
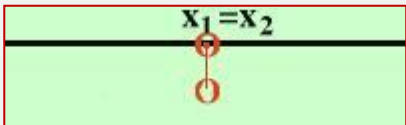
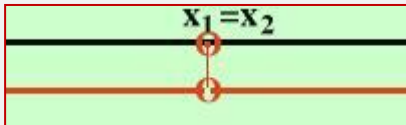
Poi segui lo schema.

Un esempio di esercizio per ogni tipo a fine paragrafo

$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	 Valori esterni all'intervallo delle radici (Esercizio 1)	 Valori interni all'intervallo delle radici (Esercizio 2)
$\Delta = 0$	 Tutti i valori eccetto $-b/2a$ per cui si annulla (Esercizio 3)	 Nessun valore Esercizio 4)
$\Delta < 0$	Sempre verificato per ogni valore di x (Esercizio 5)	Mai verificato (Esercizio 6)

(2) Tabella di riepilogo con $a < 0$

Un esempio di esercizio per ogni tipo a fine paragrafo

$a < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	 valori interni all'intervallo delle radici (Esercizio 7)	 valori esterni all'intervallo delle radici (Esercizio 8)
$\Delta = 0$	 nessun valore (Esercizio 9)	 tutti i valori eccetto $-b/2a$ per cui si annulla (Esercizio 10)

$\Delta < 0$	mai verificato (Esercizio 11)	sempre verificato per ogni valore di x (Esercizio 12)
--------------	-------------------------------	---

5. Sistemi con disequazioni di secondo grado

Per fare questo argomento devi già conoscere i sistemi di equazioni di primo e secondo grado

Fai attenzione a non confondere il sistema di disequazioni di secondo grado con la soluzione di un prodotto o quoziente di equazioni di secondo grado:

- Nel primo caso devi trovare le soluzioni valide contemporaneamente per tutte le disequazioni presenti
- Nel secondo devi risolvere tutti i sistemi possibili perché l'espressione totale risulti positiva o negativa

vediamo alcuni casi possibili sia nel primo che nel secondo caso

- Sistema di disequazioni di secondo grado
- Sistema con disequazioni di primo e di secondo grado
- Applicazioni a prodotti con espressioni
- Applicazioni a frazioni con espressioni
- Applicazioni ad espressioni più complesse
- Sistemi di equazioni e disequazioni
- Esercizi

a) Soluzione di un sistema di disequazioni di secondo grado

Se hai un sistema di disequazioni devi semplicemente risolvere ogni disequazione e porre i risultati su un grafico: le soluzioni del sistema sono i valori validi contemporaneamente per tutte le disequazioni. Vediamo come procedere su un semplice esempio.

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

La prima $x^2 - 5x + 6 > 0$ è verificata per $x < 2 \cup x > 3$ - Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 6$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu' :

$$\frac{5-1}{2} = 2 \quad \frac{5+1}{2} = 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

Essendo $x^2 - 5x + 6 > 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici, quindi

$$x < 2 \cup x > 3$$

La seconda $x^2 - 16 < 0$ è verificata per $-4 < x < 4$ - Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 16 < 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 16 = 0$$

È un'equazione pura

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -4 \quad x_2 = 4$$

Essendo $x^2 - 16 < 0$ dovrò prendere i valori interni all'intervallo delle radici, quindi

$$-4 < x < 4$$

Quindi il mio sistema è equivalente al sistema:

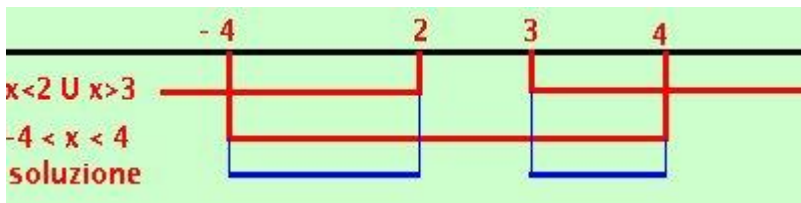
$$\begin{cases} x < 2 \cup x > 3 \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$

Riporto su un grafico,

evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni.

Devo prendere i valori che risolvono contemporaneamente entrambe le disequazioni ed ottengo come risultato:

$$-4 < x < 2 \cup 3 < x < 4$$



b) Sistema con disequazioni di primo e di secondo grado

È abbastanza elementare: devi riportare su un grafico le soluzioni delle varie disequazioni di primo e secondo grado e considerare i valori validi contemporaneamente per tutte le disequazioni.

Vediamo anche qui un semplice esempio.

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x - 4 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

- La prima $x + 3 > 0$ è verificata per $x > -3$
- La seconda $x - 4 < 0$ è verificata per $x < 4$
- La terza $x^2 - 2x - 3 > 0$ è verificata per $x < -1 \cup x > 3$ - Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -2$$

$$c = -3$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu' :

$$\frac{2-4}{2} = -1 \quad \frac{2+4}{2} = 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

Essendo $x^2 - 2x + 3 > 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici, quindi

$$x < -1 \cup x > 3$$

- La quarta $x^2 - 4 < 0$ e' verificata per $-2 < x < 2$ - Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 4 < 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 4 = 0$$

E' un'equazione pura

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$$

Essendo $x^2 - 4 < 0$ dovrò prendere i valori interni all'intervallo delle radici, quindi

$$-2 < x < 2$$

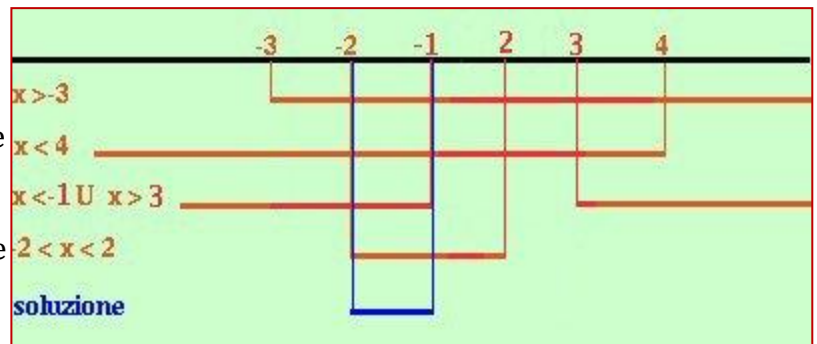
Quindi il mio sistema e' equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x > -3 \\ x < 4 \\ x < -1 \cup x > 3 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni.

Devo prendere i valori che risolvono contemporaneamente tutte e quattro le disequazioni ed ottengo come risultato:

$$-2 < x < -1$$



c) Applicazioni a disequazioni prodotto di espressioni di primo e secondo grado

Quando invece di un sistema hai un prodotto devi pensare che ogni prodotto e' equivalente a piu' sistemi.

Ad esempio se hai:

$$(x-2)(x^2 - 6x + 5) > 0$$

Siccome devi trovare dove il prodotto e' maggiore di zero potrai considerare le soluzioni che vanno bene per i due sistemi:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Infatti se i due fattori dell'espressione sono entrambe positivi oppure entrambe negativi allora l'espressione prodotto e' positiva:

Se invece hai:

$$(x-2)(x^2 - 6x + 5) < 0$$

siccome devi trovare dove il prodotto e' minore di zero potrai considerare le soluzioni che vanno bene per i due sistemi:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$$

Infatti se i due fattori dell'espressione hanno segno contrario allora il loro prodotto e' negativo:

Se hai bisogno di vedere un altro esempio, eccolo:

Disequazione prodotto di tre disequazioni di primo e secondo grado

Prendiamo ad esempio

$$(x-3)(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 4) > 0$$

Devi trovare dove il prodotto e' maggiore di zero ed hai tre termini

Il prodotto sara' positivo se i termini sono

$x-3$	$x^2 - 5x + 2$	$x^2 - 4$	
positivo	positivo	positivo	1° sistema
negativo	negativo	positivo	2° sistema
negativo	positivo	negativo	3° sistema
positivo	negativo	negativo	4° sistema

Otengo quindi i quattro sistemi

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

Se invece abbiamo:

$$(x-3)(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 4) < 0$$

Devi trovare dove il prodotto e' minore di zero ed hai tre termini

Il prodotto sara' negativo se i termini sono

$x-3$	$x^2 - 5x + 2$	$x^2 - 4$	
negativo	negativo	negativo	1° sistema
negativo	positivo	positivo	2° sistema

positivo	negativo	positivo	3° sistema
positivo	positivo	negativo	4° sistema

quindi ottengo i quattro sistemi

$\begin{cases} x-3 < 0 \\ x^2-5x+4 < 0 \\ x^2-4 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-3 < 0 \\ x^2-5x+4 > 0 \\ x^2-4 > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-3 > 0 \\ x^2-5x+4 < 0 \\ x^2-4 > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-3 > 0 \\ x^2-5x+4 > 0 \\ x^2-4 < 0 \end{cases}$
--	--	--	--

Se poi la disequazione fosse un prodotto di 4 espressioni otterresti qualcosa come 8 sistemi sia per l'espressione positiva che per l'espressione negativa, quindi capisci che conviene porre tutti i fattori maggiori di zero e poi calcolare il segno dell'espressione.

Esercizio: siccome

2 fattori = 2+2 sistemi = 4

3 fattori = 4+4 sistemi = 8

4 fattori = 8+8 sistemi = 16

.....

riesci a trovare la regola che ti permette di sapere quanti sistemi dovresti fare per 5 fattori?

Si tratta di disposizioni con ripetizione di due oggetti presi 5 a 5 cioè'

$2^5 = 32$ sistemi, 16 per il positivo e 16 per il negativo

In generale per un prodotto di n fattori avrai 2^n sistemi, metà' per l'espressione positiva e metà' per l'espressione negativa

Senza dover risolvere più sistemi, però, è più semplice porre tutte le espressioni componenti maggiori di zero (sia che l'espressione sia maggiore che minore di zero) e poi controllare dove il prodotto di queste espressioni risulta positivo oppure negativo. (Cio' equivale a risolvere contemporaneamente tutti i sistemi).

Vediamo come esempio la soluzione delle due disequazioni considerate sopra.

1) Prima disequazione

$$(x-2)(x^2-6x+5) > 0$$

Pongo entrambe i fattori maggiori di zero:

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2-6x+5 > 0 \end{cases}$$

- La prima $x-2 > 0$ è verificata per $x > 2$
- La seconda $x^2-6x+5 > 0$ è verificata per $x < 1 \cup x > 5$ - Ecco i calcoli:

Abbiamo la disequazione

$$x^2-6x+5 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2-6x+5 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -6 \quad \beta = -3$$

$$c = 5$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - (1)(5)}}{2} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu' :

$$3 - 2 = 1 \quad 3 + 2 = 5$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

Siccome le due radici sono reali e distinte (e quindi Delta maggiore di zero) allora la mia disequazione sara' valida per valori esterni all'intervallo delle radici, cioe'

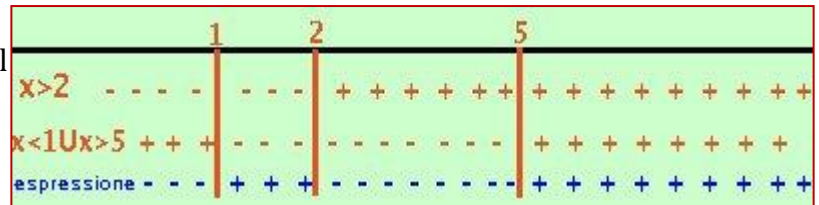
$$x < 1 \cup x > 5$$

Quindi il mio sistema e' equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \cup x > 5 \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con un piu' dove il fattore e' positivo e con un meno dove e' negativo.

Nella riga in blu metto il segno dell'espressione prodotto.



Ora faccio i calcolo dei segni: siccome devo prendere dove l'espressione e' positiva l'espressione prodotto sara' positiva dove entrambe i fattori sono positivi oppure dove sono entrambe negativi.

Per distinguere questo caso dalla soluzione di un sistema io preferisco indicare i valori positivi con un piu' e quelli negativi con un meno, mentre nel sistema ho indicato con una riga continua le soluzioni accettabili e con una linea tratteggiata quelle non accettabili.

Pero' stai attento a non confonderti perche' qualche libro di testo indica nello stesso modo (riga continua e tratteggiata) sia la soluzione di un sistema che la soluzione di una disequazione prodotto di espressioni.

La soluzione e'

$$1 < x < 2 \cup x > 5$$

2) Seconda disequazione

Se dobbiamo fare:

$$(x-2)(x^2 - 6x + 5) < 0$$

ci comportiamo esattamente allo stesso modo fino alla considerazione del risultato finale: Pongo entrambe i fattori maggiori di zero (tanto il segno dell'espressione lo studio alla fine):

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$$

- La prima $x - 2 > 0$ e' verificata per $x > 2$
- La seconda $x^2 - 6x + 5 > 0$ e' verificata per $x < 1 \cup x > 5$ - Ecco i calcoli:

Abbiamo la disequazione

$$x^2 - 6x + 5 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -6 \quad \beta = -3$$

$$c = 5$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - (1)(5)}}{2} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu' :

$$3 - 2 = 1 \quad 3 + 2 = 5$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

Siccome le due radici sono reali e distinte (e quindi Delta maggiore di zero) allora la mia disequazione sara' valida per valori esterni all'intervallo delle radici, cioe'

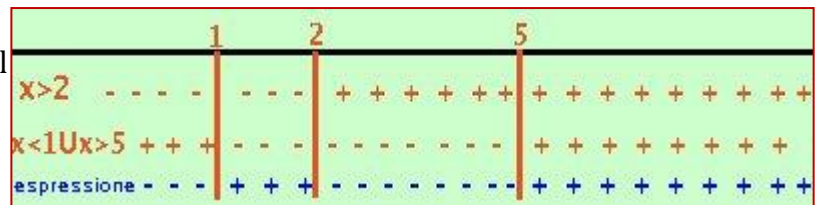
$$x < 1 \cup x > 5$$

Quindi il mio sistema e' equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \cup x > 5 \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con un piu' dove il fattore e' positivo e con un meno dove e' negativo.

Nella riga in blu metto il segno dell'espressione prodotto.



Considerazione del risultato finale

Ora faccio i calcolo dei segni: stavolta devo prendere dove l'espressione e' negativa. L'espressione sara' negativa dove il prodotto dei segni dei fattori mi da' un risultato negativo, cioe' dove i due fattori hanno segni contrari.

La soluzione e':

$$x < 1 \cup 2 < x < 5$$

d) Applicazioni adisequazioni quoziente di espressioni di primo e secondo grado

Siccome il quoziente si comporta, per i segni, come il prodotto quando hai un quoziente devi pensare che ogni quoziente e' equivalente a piu' sistemi di disequazioni.

Ad esempio se hai:

$$\frac{x - 3}{x^2 - 6x + 5} > 0$$

siccome devi trovare dove il quoziente e' maggiore di zero, potrai considerare le soluzioni che vanno bene per i due sistemi:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Infatti se numeratore e denominatore dell'espressione sono entrambe positivi oppure entrambe negativi allora l'espressione prodotto e' positiva.

Se invece hai:

$$\frac{x - 3}{x^2 - 6x + 5} < 0$$

siccome devi trovare dove il quoziente e' minore di zero, potrai considerare le soluzioni che vanno bene per i due sistemi:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$$

Infatti se numeratore e denominatore dell'espressione hanno segno contrario allora l'espressione e' negativa.

La regola dei segni del quoziente e' identica a quella per il prodotto.

Anche qui, senza dover risolvere piu' sistemi, pero', e' piu' semplice porre sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero (sia che l'espressione sia maggiore che minore di

zero) e poi controllare dove il prodotto dei segni di queste espressioni risulta positivo oppure negativo. (Cio' equivale a risolvere contemporaneamente tutti i sistemi).

Vediamo come esempio la soluzione di una disequazione.

Risolvere:

$$(x-3)(x^2 - 6x + 5) < 0$$

Anche se devo trovare i valori minori di zero pongo entrambe i fattori maggiori di zero:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$$

- La prima $x - 3 > 0$ e' verificata per $x > 3$
- La seconda $x^2 - 6x + 5 > 0$ e' verificata per $x < 1 \cup x > 5$ - Ecco i calcoli:

Abbiamo la disequazione

$$x^2 - 6x + 5 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4ac)}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -6 \quad \beta = -3$$

$$c = 5$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - (1)(5)}}{1} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu' :

$$3 - 2 = 1 \quad 3 + 2 = 5$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

Siccome le due radici sono reali e distinte (e quindi Delta maggiore di zero) allora la mia disequazione sara' valida per valori esterni all'intervallo delle radici, cioe'

$$x < 1 \cup x > 5$$

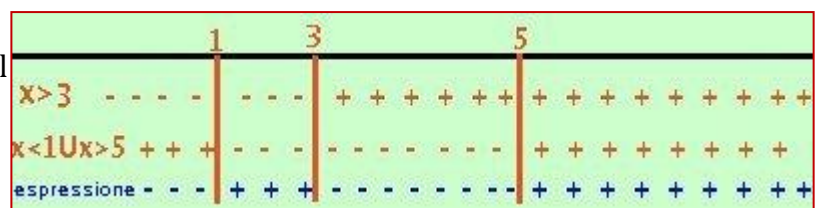
Quindi il mio sistema e' equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \cup x > 5 \end{cases}$$

$$x < 1 \cup x > 5$$

Riporto su un grafico, evidenziando con un piu' dove il fattore e' positivo e con un meno dove e' negativo.

Nella riga in blu metto il segno dell'espressione prodotto.



Ora faccio i calcolo dei segni: siccome devo prendere dove l'espressione e' negativa l'espressione prodotto sara' negativa dove numeratore e denominatore hanno segni diversi.

Per distinguere questo caso dalla soluzione di un sistema io preferisco indicare i valori positivi con un piu' e quelli negativi con un meno, mentre nel sistema ho indicato con una riga continua le soluzioni accettabili e con una linea tratteggiata quelle non accettabili.

Pero' stai attento a non confonderti perche' qualche libro di testo indica nello stesso modo (riga continua e tratteggiata) sia la soluzione di un sistema che la soluzione di una disequazione prodotto di espressioni .

La soluzione e'

$$x < 1 \cup 3 < x < 5$$

Importante!

Un caso da prendere bene in considerazione e' quando abbiamo la frazione ≥ 0 oppure ≤ 0 ; vediamo su alcuni esercizi:

1) $\frac{x^2 - 9}{x - 2} \geq 0$

Svolgimento:

Disequazione fratta maggiore od uguale a zero

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 2} \geq 0$$

Quando abbiamo una frazione dobbiamo sempre tener presente il fatto che il denominatore deve sempre essere diverso da zero, quindi per risolvere la mia disequazione pongo sempre

- il numeratore ≥ 0
- il denominatore solamente > 0
- faccio lo schema dei segni e prendo i valori concordi, cioè dove la frazione risulta maggiore od uguale a zero

Pongo numeratore maggiore od uguale a zero e denominatore solamente maggiore di zero:

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$

- La prima $x^2 - 9 \geq 0$ e' verificata per $x \leq -3$ U $x \geq 3$ - Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 9 \geq 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 9 = 0$$

E' un'equazione pura

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 3$$

Essendo $x^2 - 9 \geq 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici, quindi

$$x \leq -3 \quad \text{U} \quad x \geq 3$$

- La seconda $x - 2 > 0$ e' verificata per $x > 2$

Quindi il mio sistema e' equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x \leq -3 \quad \text{U} \quad x \geq 3 \\ x > 2 \end{cases}$$

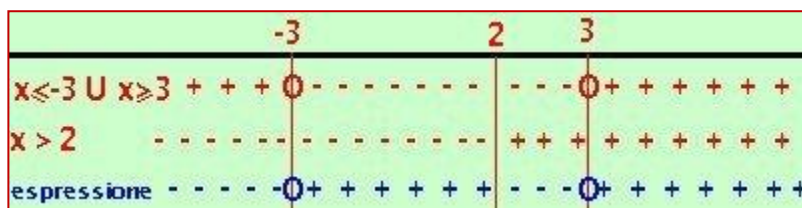
Riporto su un grafico, evidenziando con un piu' dove il fattore e' positivo e con un meno dove e' negativo. Dove il valore che annulla e' accettabile lo segno con un cerchietto.

Nella riga in blu metto il segno dell'espressione quoziente.

Ora faccio il calcolo dei segni: siccome

devo prendere dove l'espressione e' positiva o nulla l'espressione quoziente sara' positiva dove:

- il numeratore e' positivo o nullo ed il denominatore e' positivo (A destra di 3)
- il numeratore e' negativo o nullo ed il denominatore e' negativo (tra -3 e 2)



La soluzione e'

$$-3 \leq x < 2 \quad \text{U} \quad x \geq 3$$

2) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 5} \leq 0$

Svolgimento:

Disequazione fratta minore od uguale a zero

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 5} \leq 0$$

Quando abbiamo una frazione dobbiamo sempre tener presente il fatto che il denominatore deve sempre essere diverso da zero, quindi per risolvere la mia disequazione pongo sempre

- il numeratore ≥ 0

- il denominatore solamente > 0
- faccio lo schema dei segni e prendo i valori concordi, cioè dove la frazione risulta maggiore od uguale a zero

Pongo numeratore maggiore od uguale a zero e denominatore solamente maggiore di zero:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases}$$

- La prima $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ è verificata per $x \leq 1$ U $x \geq 2$ - Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = 2$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il più:

$$\frac{3-1}{2} = 1 \quad \frac{3+1}{2} = 2$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2$$

Essendo $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici più i valori agli estremi dell'intervallo stesso, quindi

$$x \leq 1 \quad \text{U} \quad x \geq 2$$

- La seconda $x - 5 > 0$ è verificata per $x > 5$

quindi il mio sistema è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x \leq 1 \quad \text{U} \quad x \geq 2 \\ x > 5 \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con un più dove il fattore è positivo e con un meno dove è negativo. Dove il valore che annulla è accettabile lo segno con un cerchietto

Nella riga in blu metto il segno dell'espressione quoziente.

Ora faccio i calcoli dei segni: siccome devo

prendere dove l'espressione è negativa o nulla l'espressione quoziente sarà negativa dove:

- il numeratore è positivo o nullo ed il denominatore è negativo (meno di 1 e tra 2 e 5)
- il numeratore è negativo o nullo ed il denominatore è positivo (da nessuna parte)

	1	2	5	
$x \leq 1 \quad \text{U} \quad x \geq 2$	++	++	++	++
$x > 5$	- - - -	- - - -	- - - -	++
espressione	- - - -	++	- - - -	++

La soluzione è:

$$x \leq 1 \quad \text{U} \quad 2 \leq x < 5$$

Importante è anche il seguente caso particolare: quando il numeratore ed il denominatore sono fra loro semplificabili:

$$3) \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} > 0$$

Svolgimento:

Disequazione con numeratore e denominatore semplificabili

Risolvi la disequazione:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} > 0$$

Provo a risolverla nel modo normale

Pongo numeratore maggiore e denominatore maggiori di zero:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

- la prima $x^2 - 5x + 6 > 0$ e' verificata per $x < 2 \cup x > 3$ - Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 6$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu' :

$$\frac{5-1}{2} = 2 \qquad \frac{5+1}{2} = 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

Essendo $x^2 - 5x + 6 > 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici, quindi

$$x < 2 \cup x > 3$$

- la seconda $x - 3 > 0$ e' verificata per $x > 3$

Nota che sia al numeratore che al denominatore abbiamo trovato lo stesso valore $x = 3$ quindi il mio sistema e' equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x \leq 2 \cup x \geq 3 \\ x > 3 \end{cases}$$

Se riporto su un grafico vedo che numeratore e denominatore cambiano di segno (cioe' si annullano) nello stesso valore $x = 3$; questo significa che se scompongo numeratore e denominatore posso semplificare:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} > 0$$

e quindi la mia disequazione diventa

$$x - 2 > 0$$

ed ha quindi soluzione

$$x > 2$$

Quindi:

Quando risolvi una disequazione fratta se vedi che un valore che trovi al numeratore e' uguale ad un valore che trovi al denominatore allora devi scomporre e semplificare fra loro numeratore e denominatore e quindi procedere con la disequazione semplificata

Osserva che se risolvi senza semplificare fai un errore perche' trovi come soluzione

$$x > 2 \text{ con } x \neq 3$$

perche' devi scartare il valore $x=3$ che annulla il denominatore

Il problema sara' ripreso in analisi e vedremo che questo caso fornira' un esempio di funzione con **discontinuita' eliminabile** di tipo a)

e) Applicazioni a disequazioni piu' complesse

Quando abbiamo espressioni piu' complesse possiamo applicare i metodi visti ora: si trattera' di considerare sistemi con piu' disequazioni.

Consideriamo per ora il caso di disequazioni composte da prodotti e frazioni di espressioni

di primo e di secondo grado, piu' avanti considereremo equazioni di grado superiore .
Procederemo nel seguente modo:

- porremo ogni fattore presente al numeratore o al denominatore maggiore di zero
- risolveremo il sistema e porremo i risultati in un grafico
- Nell'ultima riga del grafico andremo a calcolare (con la regola del prodotto dei segni) il segno dell'espressione
- Prenderemo come risultato i valori richiesti dall'espressione di partenza

Vediamo il metodo su alcuni esercizi.

$$1) \frac{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + x + 1)(x + 4)}{(x - 2)(x^2 + 9)} < 0$$

Svolgimento:

Pongo ogni fattore al numeratore e al denominatore maggiore di zero:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 + 9 > 0 \end{cases}$$

- La prima $x^2 - 4x + 3 > 0$ e' verificata per $x < 1$ U $x > 3$ - Ecco i calcoli:

Abbiamo la disequazione

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -4 \quad \beta = -2$$

$$c = 3$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - (1)(3)}}{1} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu' :

$$2 - 2 = 0 \quad 2 + 1 = 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 3$$

Siccome le due radici sono reali e distinte (e quindi Δ maggiore di zero) allora la mia disequazione sara' valida per valori esterni all'intervallo delle radici, cioe'

$$x < 1 \quad \text{U} \quad x > 3$$

- La seconda $x^2 + x + 1 > 0$ e' sempre verificata - Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 + x + 1 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = 1$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

Essendo il termine sotto radice (Δ) minore di zero avro' che la disequazione

$$x^2 + x + 1 > 0 \text{ e' sempre positiva}$$

- La terza $x + 4 > 0$ e' verificata per $x > -4$
- La quarta $x - 2 > 0$ e' verificata per $x > 2$
- La quinta $x^2 + 9 > 0$ e' sempre verificata - Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 + 9 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 + 9 = 0$$

E' un'equazione pura

$$x^2 = -9$$

$$x = \pm\sqrt{-9}$$

Essendo il termine sotto radice (Δ) minore di zero avro' che la disequazione

$$x^2 + 9 > 0 \text{ e' sempre positiva}$$

Potevi arrivare allo stesso risultato considerando che $x^2 + 9$ e' sempre maggiore di zero perche' somma di quadrati

Quindi il mio sistema e' equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x < 1 \text{ U } x > 3 \\ \text{sempre positiva} \\ x > -4 \\ x > 2 \\ \text{sempre positiva} \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con un piu' dove il fattore e' positivo e con un meno dove e' negativo.

Nella riga in blu metto il segno dell'espressione quoziente.

Ora faccio il calcolo dei segni: siccome devo prendere dove l'espressione e' negativa l'espressione quoziente sara' negativa dove il prodotto dei segni di tutti i fattori da' risultato negativo.

La soluzione e'

$$-4 < x < 1 \text{ U } 2 < x < 3$$

	-4	1	2	3
$x^2 - 4x + 3 > 0$	+	+	+	+
$x^2 + x + 1 > 0$	+	+	+	+
$x + 4 > 0$	-	-	-	-
$x - 2 > 0$	-	-	-	+
$x + 9 > 0$	+	+	+	+
Espressione	+	-	+	+

Nota che avrei ottenuto lo stesso risultato trascurando le righe delle disequazioni sempre positive: infatti un fattore sempre positivo non mi cambia il valore finale del segno.

$$2) \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 2x + 1)}{(x - 3)(x^2 - 5x)} \geq 0$$

Svolgimento:

Pongo ogni fattore al numeratore maggiore o uguale a zero ed ogni fattore al denominatore maggiore di zero (perche' una frazione non puo' avere il denominatore uguale a zero):

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \\ x^2 - 5x > 0 \end{cases}$$

- la prima $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ e' verificata per $x \leq 1 \text{ U } x \geq 2$ - Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = 2$$

sostituiamo nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu' :

$$\frac{3-1}{2} = 1 \quad \frac{3+1}{2} = 2$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2$$

Essendo $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici piu' i valori agli estremi dell'intervallo stesso, quindi

$$x \leq 1 \quad \cup \quad x \geq 2$$

- la seconda $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ e' sempre verificata - Ecco i calcoli:

Abbiamo la disequazione:

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

Se osservi bene i tre termini del polinomio associato sono i tre termini di un quadrato

$$(x+1)^2 \geq 0$$

Quindi la disequazione e' sempre vera perche' un quadrato e' sempre maggiore od uguale a zero

- la terza $x - 3 > 0$ e' verificata per $x > 3$
- la quarta $x^2 - 5x > 0$ e' verificata per $x < 0 \cup x > 5$ - Ecco i calcoli:

Abbiamo la disequazione:

$$x^2 - 5x > 0$$

Considero l'equazione associata

$$x^2 - 5x = 0$$

raccolgo la x

$$x(x-5) = 0$$

Otengo le soluzioni:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 5$$

Siccome le due radici sono reali e distinte (e quindi Δ maggiore di zero) allora la mia disequazione sara' valida per valori esterni all'intervallo delle radici, cioe'

$$x < 0 \cup x > 5$$

Quindi il mio sistema e' equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x \leq 1 \cup x \geq 2 \\ \text{sempre positiva eccetto } x = -1 \text{ per cui } s \\ x > 3 \\ x < 0 \cup x > 5 \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con un piu' dove il fattore e' positivo e con un meno dove e' negativo Dove il valore che annulla e' accettabile lo indico con un cerchietto

Nella riga in blu metto il segno dell'espressione quoziente.

Ora faccio il calcolo dei segni: siccome devo prendere dove l'espressione e' positiva o nulla l'espressione sara' positiva dove il prodotto dei segni di tutti i fattori da' risultato positivo e sara' nulla dove si annullano i fattori del numeratore (i cerchietti).

	-1	0	1	2	3	5
$x^2 - 2x + 3 > 0$	+	+	+	+	+	+
$x^2 + 2x + 1 > 0$	+	+	+	+	+	+
$x - 3 > 0$	-	-	-	-	+	+
$x^2 - 5x > 0$	+	+	-	-	-	+
espressione	-	+	+	-	-	+

La soluzione e'.

$$x = -1 \quad \cup \quad 0 < x \leq 1 \quad \cup \quad 2 \leq x < 3 \quad \cup \quad x > 5$$

$$3) \frac{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 1)}{(x - 2)(x^2 - 5x + 6)} \geq 0$$

Svolgimento:

Se vado a risolverla senza riflettere, al momento di fare il grafico vedo che un valori che annullano il numeratore mi corrispondono a valori che annullano il denominatore: questo significa che puoi (anzi devi) semplificare numeratore e denominatore prima di poter risolvere, quindi devi tornare all'inizio e semplificare.

Per semplificare scomponiamo i fattori cercando di ridurli tutti a fattori di primo grado (quelli che non si riducono non ci debbono preoccupare, possiamo lasciarli come sono, tanto non saranno semplificabili):

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$x^2 + 1 = \text{non si scompone}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Quindi la mia disequazione iniziale diventa:

$$\frac{(x-1)(x-3)(x-2)^2(x^2+1)}{(x-2)(x-2)(x-3)} \geq 0$$

e posso semplificare numeratore e denominatore ed ottengo:

$$\frac{(x-1)(x^2+1)}{1} \geq 0$$

o meglio:

$$(x-1)(x^2+1) \geq 0$$

E' un prodotto, pongo ogni fattore maggiore od uguale a zero:

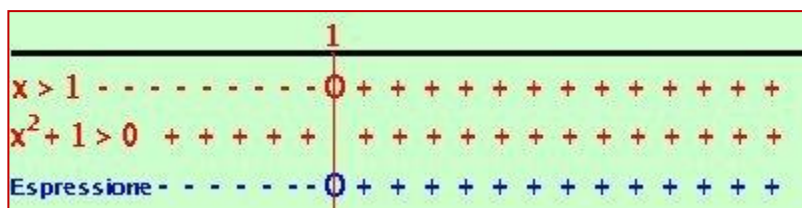
$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2+1 \geq 0 \end{cases}$$

- la prima $x-1 \geq 0$ e' verificata per $x \geq 1$
- la seconda $x^2+1 \geq 0$ e' sempre verificata

Quindi il mio sistema e' equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \text{sempre verificata} \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con un piu' dove la singola disequazione e' verificata e con un meno dove non e' verificata. Dove il valore che annulla e' accettabile lo indico con un cerchietto. Nella riga in blu metto il segno dell'espressione.



Ora faccio il calcolo dei segni: siccome

devo prendere dove l'espressione e' positiva o nulla l'espressione sara' positiva dove il prodotto dei segni dei fattori da' risultato positivo e sara' nulla dove si annullano i fattori (i cerchietti).

La soluzione e'

$$x \geq 1$$

f) Sistemi di equazione e disequazioni

Non e' che siano molto comuni: comunque quando si incontrano possono lasciare un po' perplessi:

In pratica risolveremo l'equazione e considereremo solo quelle soluzioni che cadono all'interno degli intervalli comuni alle disequazioni.

Un esempio sara' piu' che sufficiente:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ x^2 - 16 > 0 \end{cases}$$

Risolvero l'equazione:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Otengo:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

Risolvero la disequazione:

$$x^2 - 16 > 0$$

considero l'equazione associata:

$$x^2 - 16 = 0$$

Otengo le soluzioni:

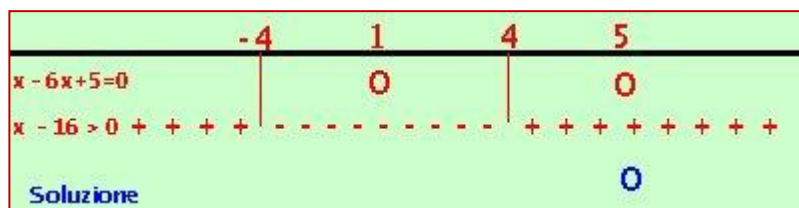
$$x_1 = -4 \quad x_2 = 4$$

E la disequazione e' verificata per valori esterni all'intervallo delle radici e quindi ottengo

$$x < -4 \quad \text{U} \quad x > 4$$

Se ora considero le due soluzioni dell'equazione

l'unica che cade nell'intervallo accettabile e' $x = 5$.



6. Disequazioni di grado superiore

Ora possiamo affrontare lo studio di disequazioni di grado 3,4,5....

Per poter procedere al meglio pero' devi saper fare bene le [scomposizioni](#) in generale e la [scomposizione di Ruffini](#) in particolare.

Devi scomporre le espressioni in fattori di primo e secondo grado e quindi applicare i metodi gia' visti

Alcuni esempi ti chiariranno meglio come procedere

1) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 > 0$ Svolgimento:

Esercizio su disequazione di quarto grado

Risolviamo la disequazione:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 > 0$$

Considero il polinomio associato

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 =$$

devo [scomporre](#) in fattori; sono 5 termini, non riesco a fare dei raggruppamenti, quindi applico la scomposizione di Ruffini

provo a scomporre per:

$$(x-1), \quad P(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 1 - 5 + 5 - 5 + 6 = 0$$

quindi (x-1) e' un fattore: divido per (x-1)

faccio la [divisione di Ruffini](#)

Otengo quindi

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x^3 - 4x^2 + x + 6) =$$

Continuo la scomposizione del secondo fattore: sono 4 termini:

- Non e' il cubo di un binomio
- non e' un raccoglimento parziale
- non mi sembra un raggruppamento
- quindi applico la scomposizione di Ruffini

Provo a scomporre per

$$(x-1), \quad P(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 1 - 4 + 1 - 6 \neq 0$$

$$(x+1), \quad P(1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 = -1 - 4 - 1 - 6 = 0$$

Quindi (x+1) e' un fattore; divido per (x+1)

Quindi ottengo:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x-1)(x+1)(x^2 - 5x + 6)$$

Ora devo decidere se voglio fare la disequazione con fattori di primo e secondo grado oppure solo con fattori di primo grado scomponendo anche l'ultimo fattore tra parentesi.

Un metodo vale l'altro: per scomporre l'ultimo termine posso applicare la scomposizione del **trinomio notevole**, cioè

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3):$$

e quindi avrò:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x-3) > 0$$

Poniamo ogni fattore maggiore di zero:

- $x - 1 > 0 \quad x > 1$
- $x + 1 > 0 \quad x > -1$
- $x - 2 > 0 \quad x > 2$
- $x - 3 > 0 \quad x > 3$

Adesso riporto i risultati su un grafico indicando con un un + dove ogni disequazione e' verificata e con un - dove non e' verificata e faccio il conto dei segni.

Devo prendere gli intervalli dove il prodotto dei segni dei fattori (cioe' il segno dell'espressione) risulta positivo.

Otengo come risultato:

$$x < -1 \cup 1 < x < 2 \cup x > 3$$

	-1	1	2	3
$x-1 > 0$	- - - -	- - - -	+ + + +	+ + + +
$x+1 > 0$	- - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +
$x-2 > 0$	- - - -	- - - -	+ + + +	+ + + +
$x-3 > 0$	- - - -	- - - -	- - - -	+ + + +
espressione	+ + +	- - - -	+ + + +	- - - -

2) $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$

Svolgimento:

Risolvi la disequazione:

$$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$$

Considero il polinomio associato:

$$x^4 - 5x^2 + 4 =$$

devo **scomporlo** in fattori; sono 3 termini, se faccio la sostituzione $x^2 = y$ ottengo:

$$x^2 - 5x + 4 =$$

questo posso scomporlo come **trinomio notevole**:

$$x^2 - 5x + 4 = (y - 1)(y - 4)$$

ora rimetto x^2 al posto di y :

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

Ora devo decidere se voglio fare la disequazione con fattori di secondo grado oppure solo con fattori di primo grado scomponendo anche gli ultimi fattori tra parentesi.

Un metodo vale l'altro: noi utilizzeremo **fin dove possibile** fattori di primo grado.

Dentro parentesi sono due termini e precisamente la **differenza fra due quadrati** cioè:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

e quindi avrò:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) > 0$$

Poniamo ogni fattore maggiore di zero:

- $x - 1 > 0 \quad x > 1$
- $x + 1 > 0 \quad x > -1$
- $x - 2 > 0 \quad x > 2$
- $x + 2 > 0 \quad x > -2$

Adesso riporto i risultati su un grafico indicando con un + dove ogni disequazione e' positiva e con un - dove e' negativa e con un cerchietto i punti dove il fattore vale zero ed e' accettabile e faccio il conto dei segni: devo prendere gli intervalli dove il prodotto dei segni dei fattori (cioe' il segno dell'espressione) risulta negativo o nullo.

Otengo come risultato:

$$-2 \leq x \leq -1 \cup 1 \leq x \leq 2$$

	-2	-1	1	2
$x-1 \geq 0$	- - - -	- - - -	0	+ + + +
$x+1 \geq 0$	- - - -	0	+ + + +	+ + + +
$x-2 \geq 0$	- - - -	- - - -	- - - -	0
$x+2 \geq 0$	0	+ + + +	+ + + +	+ + + +
espressione	+ + + 0	- - - 0	+ + + 0	- - - 0

$$3) \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4}{x^3 + 3x^2 + x + 3} < 0$$

Svolgimento:

Risolviamo la disequazione:

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$$

$$----- < 0$$

$$x^3 + 3x^2 + x + 3$$

Scomponiamo in fattori sia il numeratore che il denominatore:

- Scomposizione del numeratore

Considero il polinomio associato:

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 =$$

Devo scomporlo in fattori; sono 5 termini, non riesco a fare dei raggruppamenti, quindi applico la scomposizione di Ruffini.

Provo a scomporre per:

$$(x-1), \quad P(1) = 1^4 + 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 4 = 1 + 1 - 3 - 4 - 4 \neq 0$$

$$(x+1), \quad P(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 4 = 1 - 1 - 3 + 4 - 4 \neq 0$$

$$(x-2), \quad P(2) = 2^4 + 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 4 = 16 + 8 - 12 - 8 - 4 = 0$$

quindi (x-2) e' un fattore: divido per (x-2)

faccio la divisione di Ruffini

1	1	-3	-4	-4
2	2	6	6	4
1	3	3	2	0

Ottengo quindi:

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) =$$

Continuo la scomposizione del secondo fattore: sono 4 termini:

-
- Non e' il cubo di un binomio
 - non e' un raccoglimento parziale
 - non mi sembra un raggruppamento
 - quindi applico la scomposizione di Ruffini
-

Provo a scomporre per l'ultimo fattore che era valido:

$$(x-2), \quad P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 8 + 12 + 6 + 2 \neq 0$$

$$(x+2), \quad P(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 = -8 + 12 - 6 + 2 = 0$$

Quindi (x+2) e' un fattore; divido per (x+2).

1	3	3	2
-2	-2	-2	-2
1	1	1	0

Quindi ottengo:

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = (x-2)(x+2)(x^2 + x + 1)$$

Ora provo a scomporre l'ultimo fattore:

-
- Non e' il quadrato di un binomio
 - Non e' un trinomio notevole
 - Non si puo' scomporre con Ruffini (i fattori possibili sono +1 e -1 che abbiamo gia' provato)
-

L'ultimo fattore non e' scomponibile.

- Scomposizione del denominatore
Considero il polinomio associato

$$x^3 + 3x^2 + x + 3 =$$

sono 4 termini:

- Non e' il cubo di un binomio
- Puo' essere un raccoglimento parziale

Provo a scomporre come raccoglimento parziale

$$x^3 + 3x^2 + x + 3 = x^2(x+3) + 1(x+3) = (x+3)(x^2 + 1)$$

L'ultimo fattore (2 termini) come somma di quadrati non e' scomponibile.

Quindi ottengo:

$$(x-2)(x+2)(x^2+x+1)$$

$$\text{-----} < 0$$

$$(x+3)(x^2 + 1)$$

Poniamo ogni fattore maggiore di zero:

- $x - 2 > 0 \quad x > 2$
- $x + 2 > 0 \quad x > -2$
- $x^2 + x + 1 > 0$ sempre verificato (delta minore di zero)
- $x + 3 > 0 \quad x > -3$
- $x^2 + 1 > 0$ sempre verificato (delta minore di zero)

Adesso riporto i risultati su un grafico indicando con un + dove ogni disequazione e' verificata e con un - dove non e' verificata e faccio il conto dei segni.

Devo prendere gli intervalli dove il prodotto ed il quoziente dei segni dei fattori (cioe' il segno dell'espressione) risulta negativo.

Ottingo come risultato:

$$x < -3 \cup -2 < x < 2$$

Nota che avrei potuto tralasciare i due fattori con delta minore di zero perche', essendo positivi, non influiscono sul segno del risultato.

	-3	-2	2
$x-2 > 0$	- - - - -	- - - - -	+ + + + +
$x+2 > 0$	- - - - -	+ + + + +	+ + + + +
$x^2+x+1 > 0$	+ + + + +	+ + + + +	+ + + + +
$x+3 > 0$	- - - - -	+ + + + +	+ + + + +
$x^2+1 > 0$	+ + + + +	+ + + + +	+ + + + +
espressione	- - - - -	+ + + + +	+ + + + +

$$4) \frac{x^4 - 16}{x^4 + x^3 - x - 1} \geq 0$$

Svolgimento:

Risolviemo la disequazione:

$$\frac{x^4 - 16}{x^4 + x^3 - x - 1} \geq 0$$

Scomponiamo in fattori sia il numeratore che il denominatore:

- Scomposizione del numeratore.

Considero il polinomio associato:

$$x^4 - 16 =$$

devo scomporlo in fattori; sono 2 termini, e' una differenza di quadrati:

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) =$$

il primo fattore e' ancora una differenza di quadrati mentre il secondo come somma di quadrati non e' piu' scomponibile:

$$= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

- Scomponiamo il denominatore.

Considero il polinomio associato:

$$x^4 + x^3 - x - 1 =$$

sono 4 termini:

- Non e' il cubo di un binomio
- Puo' essere un raccoglimento parziale

Provo a scomporre come raccoglimento parziale:

$$x^4 + x^3 - x - 1 = x^3(x+1) - 1(x+1) = (x+1)(x^3 - 1) =$$

L'ultimo fattore (2 termini) come differenza di cubi e' scomponibile, quindi ottengo

$$= (x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$

L'ultimo fattore non e' piu' scomponibile.

Quindi ottengo:

$$\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} \geq 0$$

Poniamo ogni fattore del numeratore maggiore od uguale a 0 ed ogni fattore del denominatore solamente maggiore di zero (lo zero non puo' mai essere al denominatore)

- $x-2 \geq 0 \quad x \geq 2$
- $x+2 \geq 0 \quad x \geq -2$
- $x^2+4 \geq 0$ sempre vero (delta minore di zero)
- $x+1 > 0 \quad x > -1$
- $x-1 > 0 \quad x > 1$
- $x^2+x+1 > 0$ sempre vero (delta minore di zero)

Adesso riporto i risultati su un grafico indicando con un + dove ogni disequazione e' verificata e con un - dove non e' verificata inoltre indico con un cerchietto i punti dove il fattore vale zero ed e' accettabile e poi faccio il conto dei segni.

Devo prendere gli intervalli dove il prodotto dei segni dei fattori (cioe' il segno dell'espressione) risulta positivo o nullo.

Ottingo come risultato:

$$x \leq -2 \cup -1 < x < 1 \cup x \geq 2$$

	-2	-1	1	2
$x-2 \geq 0$	-	-	-	+
$x+2 \geq 0$	+	+	+	+
$x^2+4 \geq 0$	+	+	+	+
$x+1 > 0$	-	-	+	+
$x-1 > 0$	-	-	+	+
$x^2+x+1 > 0$	+	+	+	+
espressione	+	-	+	-

Nota che anche qui avrei potuto tralasciare i due fattori con delta minore di zero perche',essendo positivi, non influiscono sul segno del risultato.

C. Problemi

1. Generalita' sui problemi

Non c'e' studente che sentendo la parola Problema non si senta preoccupato; in effetti non c'e' niente di cui preoccuparsi perche' un problema e' si qualcosa da risolvere, pero' la soluzione e' gia' insita nel problema stesso e basta trasformarlo in linguaggio matematico per poterlo risolvere in modo automatico mediante i meccanismi dell'algebra.

Per risolvere bene un problema prova a seguire queste semplici regole:

- leggi con calma il testo cercando di capire bene tutti i termini
- se si tratta di un problema di geometria traccia una grande figura scrivendo sulla figura stessa tutte le misure che ti da' il problema
- scrivi quello che conosci e quello che vuoi trovare
- scrivi sempre le formule per **esteso**
- Parti da quello che vuoi trovare e **risali** fino ai dati
- Fai lo stesso procedimento a **rovescio**
- Scrivi in modo chiaro ed ordinato **indicando** sempre quello che fai
- esegui i calcoli con precisione

Risolvere un problema significa trasformarlo in linguaggio matematico, cioe' in equazione, poi dovrai risolvere l'equazione e la sua soluzione ti dara' la risposta al problema. Dobbiamo quindi vedere come si trasforma un problema in linguaggio matematico, cioe' dovremo cercare di costruire un vocabolario che ci permetta di tradurre dal linguaggio normale al linguaggio algebrico.

2. Vocabolario

Proviamo a risolvere un semplice problema:

Il triplo di un numero e' uguale al doppio del numero stesso aumentato di 4. Trovare il numero.

Questo si puo' tradurre termine a termine in un'equazione:

Intanto il numero da trovare lo chiameremo **x**

Il triplo (**3**)

di (**·**)

un numero (**x**)

e' uguale (**=**)

al doppio (**2**)

del (**·**)

numero stesso (**x**)

aumentato (**+**)

di 4 (**4**)

L'equazione

$$3 \cdot x = 2 \cdot x + 4$$

e' la traduzione in equazione del problema precedente.

E' quindi possibile costruire una specie di vocabolario che ci permetta di tradurre un problema in "matematiche". Cominciamo a costruirlo con i dati che abbiamo e man mano che troveremo termini nuovi li aggiungeremo.

Come indicazione di sintassi occorre aggiungere che in matematica si legge prima l'operazione poi i due termini, cosi' se devo leggere:

$$3x - 2$$

leggero':

la differenza fra il triplo di un numero e 2

Vocabolario	
ente da trovare	x
di	·
aumentato, sommato	+
differisce, diminuito	-
vale, e' uguale a	=
supera di 5	= 5 +
differisce di 5 da qualcosa	= qualcosa - 5
antecedente	x - 1
seguente, successivo	x + 1
dividendo a per b ottengo come quoziente c e come resto d	$a = b \cdot c + d$ dividendo=divisore·quoziente+resto

somma tra qualcosa e qualcos'altro	qualcosa + qualcos'altro
differenza tra qualcosa e qualcos'altro	qualcosa - qualcos'altro
dividere un numero in due parti	prima parte x seconda parte numero - x
il rapporto di due numeri e' a/b	primo numero ax secondo numero bx
somma di due numeri e' a	primo numero x secondo numero a - x

Iniziamo nelle pagine successive, tenendo presente il vocabolario, a risolvere alcuni problemi.

3. Problemi di primo grado

a) Problemi risolubili mediante un'equazione

(1) Problemi numerici

Sono i problemi che ti chiedono di trovare un numero che soddisfi certe condizioni

Qui purtroppo non c'e' scampo per imparare a fare i problemi bisogna fare tanti problemi perche' sono troppe le variazioni possibili. Risolviamone alcuni insieme.

1) Trovare un numero che sommato ai suoi $\frac{3}{2}$ dia 50. Soluzione:

Trovare un numero e' la prima frase e significa che il numero lo devo chiamare x:

numero = x

Poi comincia un'altra frase:

che sommato ai suoi $\frac{3}{2}$ dia 50

che (il quale numero) [x]

sommato [+]

ai suoi $\frac{3}{2}$ (ai $\frac{3}{2}$ del numero) [$\frac{3}{2} \cdot x$]

dia [=]

50 [50]

cioe'

$$x + \frac{3}{2}x = 50$$

(il $\cdot$ si legge ma non si scrive quindi scriviamo $\frac{3}{2}x$ e non $\frac{3}{2} \cdot x$)

Risolve: minimo comune multiplo 2:

$$2x + 3x = 100$$

$$\frac{2x}{2} + \frac{3x}{2} = \frac{100}{2}$$

per il secondo principio tolgo i denominatori:

$$2x + 3x = 100$$

$$5x = 100$$

Per il secondo principio divido per 5:

$$5x = 100$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{100}{5}$$

$$x = 20$$

Il numero cercato e' 20

2) Trovare un numero sapendo che la somma dei suoi $\frac{2}{3}$ con il numero 15 e' uguale ai $\frac{3}{2}$ del numero stesso. Soluzione:

Trovare un numero e' la prima frase e significa che il numero lo devo chiamare x:

numero = x

poi comincia un'altra frase:

sapendo che la somma dei suoi $\frac{2}{3}$ con il numero 15 e' uguale ai $\frac{3}{2}$ del numero stesso

sapendo che la somma devo mettere [+] e poi scrivere qualcosa prima e qualcosa dopo

dei suoi $\frac{2}{3}$ (dei $\frac{2}{3}$ del numero) [$\frac{2}{3} \cdot x$] va prima del +

con il numero 15 [15] va dopo il +

e' uguale [=]

ai $\frac{3}{2}$ [$\frac{3}{2}$]

del [·]

numero stesso [x]

cioe'

$$\frac{2}{3}x + 15 = \frac{3}{2}x$$

Risolve: minimo comune multiplo 6:

$$\frac{4x + 90}{6} = \frac{9x}{6}$$

per il secondo principio tolgo i denominatori:

$$4x + 90 = 9x$$

primo principio: termini con x prima dell'uguale, quelli senza x dopo l'uguale, chi salta l'uguale cambia di segno:

$$4x - 9x = -90$$

$$-5x = -90$$

Per il secondo principio cambio di segno:

$$5x = 90$$

Per il secondo principio divido per 5:

$$\frac{5x}{5} = \frac{90}{5}$$

$$x = 18$$

Il numero cercato e' 18.

3) Trovare il numero tale che aggiungendo 40 ai suoi $\frac{3}{5}$ da' per somma il doppio del suo antecedente. Soluzione:

Trovare il numero tale che e' la prima frase e significa che il numero lo devo chiamare x:

numero = x

poi comincia un'altra frase:

aggiungendo 40 ai suoi $\frac{3}{5}$ da' per somma il doppio del suo antecedente

aggiungendo devo mettere [+] e poi scrivere qualcosa prima e qualcosa dopo

40 [40] va dopo il +

ai suoi $\frac{3}{5}$ (ai $\frac{3}{5}$ del numero) [$\frac{3}{5} \cdot x$] va prima del +

da' per somma (e' uguale a) [=]

il doppio [2]

del [·]

suo antecedente [x - 1]

cioe':

$$\frac{3}{5}x + 40 = 2 \cdot (x - 1)$$

risolve le operazioni:

$$\frac{3}{5}x + 40 = 2x - 2$$

Risolve: minimo comune multiplo 5:

$$\frac{3x + 200}{5} = \frac{10x - 10}{5}$$

per il secondo principio tolgo i denominatori:

$$3x + 200 = 10x - 10$$

primo principio: termini con x prima dell'uguale, quelli senza x dopo l'uguale, chi salta l'uguale cambia di segno:

$$3x - 10x = -200 - 10$$

$$-7x = -210$$

Per il secondo principio cambio di segno:

$$7x = 210$$

Per il secondo principio divido per 7 (per lasciare la x da sola) :

$$7x = 210$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{210}{7}$$

$$x = 30$$

Il numero cercato e' 30.

4) Si toglie 20 da un numero ed alla meta' della differenza si aggiunge la quarta parte del numero, si ottiene cosi' lo stesso numero diminuito di 25. Qual'e' il numero? Soluzione:

Si toglie 20 da un numero e' la prima frase e significa che devo considerare il numero x e la differenza x - 20

numero = x

differenza = x - 20

poi comincia un'altra frase:

alla meta' della differenza si aggiunge la quarta parte del numero, si ottiene cosi' lo stesso numero diminuito di 25.

alla meta' [1/2]

della [·]

differenza [x - 20]

si aggiunge [+]

la quarta parte [1/4]

del [·]

numero[x]

si ottiene cosi' [=]

lo stesso numero [x]

diminuito di [-]

25[25]

cioe':

$$\frac{1}{2} (x - 20) + \frac{1}{4} x = x - 25$$

risolvo le operazioni:

$$\frac{x}{2} - 10 + \frac{x}{4} = x - 25$$

Risolvo: minimo comune multiplo 4:

$$\frac{2x - 40 + x}{4} = \frac{4x - 100}{4}$$

per il secondo principio tolgo i denominatori:

$$2x - 40 + x = 4x - 100$$

$$3x - 40 = 4x - 100$$

primo principio: termini con x prima dell'uguale, quelli senza x dopo l'uguale, chi salta l'uguale cambia di segno:

$$3x - 4x = 40 - 100$$

$$-x = -60$$

Per il secondo principio cambio di segno:

$$x = 60$$

Il numero cercato e' 60.

5) Dividere il numero 36 in due parti tali che la prima superi di 6 il doppio della seconda. Soluzione:

Dividere il numero 36 in due parti e' la prima frase e significa che devo considerare due numeri: x e 36 - x.

Attenzione: qui dividere significa solo spezzare e non in parti uguali:

prima parte = x

seconda parte = 36 - x

poi comincia un'altra frase:

tali che la prima superi di 6 il doppio della seconda:

tali che la prima[x]

superi di 6 [= 6 +]

il doppio [2]

della [·]

seconda [36 - x]

cioe'

avrei anche potuto fare primo numero x e secondo numero $x-5$

poi comincia un'altra frase:

dividendo la loro somma per 6 si ottiene come quoziente 4 e come resto 1

Quando si ha un quoziente ed un resto si fa riferimento sempre alla formula:

dividendo = divisore · quoziente + resto

Il dividendo e' la **somma dei due numeri** $[x + 5 + x]$

il divisore e' 6

il quoziente e' 4

il resto e' 1

quindi:

$$x + 5 + x = 6 \cdot 4 + 1$$

$$2x + 5 = 24 + 1$$

$$2x + 5 = 25$$

primo principio: termini con x prima dell'uguale, quelli senza x dopo l'uguale, chi salta l'uguale cambia di segno:

$$2x = 25 - 5$$

$$2x = 20$$

Per il secondo principio divido per 2 (per lasciare la x da sola) :

$$2x \quad 20$$

$$----- = -----$$

$$2 \quad 2$$

$$x = 10$$

Il primo numero cercato e' $10 + 5 = 15$

Il secondo e' 10.

8) Il rapporto di due numeri e' $2/3$; dividendo la loro somma per 10 si ottiene lo stesso risultato che sottraendo 15 dal minore. Trovare i due numeri. Soluzione:

Il rapporto di due numeri e' $2/3$ e' la prima frase e conviene considerare due numeri chiamando il primo $2x$ ed il secondo $3x$

avrei anche potuto chiamare il primo numero $2/3 x$ ed il secondo x ma e' piu' difficile

primo numero = $2x$

secondo numero = $3x$

poi comincia un'altra frase:

dividendo la loro somma per 10 si ottiene lo stesso risultato che sottraendo 15 dal minore

dividendo $[:]$ poi dovrò scrivere qualcosa prima e qualcosa dopo

la loro somma $[2x + 3x]$ va prima del diviso

per 10 $[10]$ va dopo il diviso

si ottiene lo stesso risultato che $[=]$

sottraendo 15 dal minore $[2x - 15]$

cioe':

$$(2x + 3x) : 10 = 2x - 15$$

$$2x + 3x$$

$$----- = 2x - 15$$

$$10$$

$$5x$$

$$----- = 2x - 15$$

$$10$$

minimo comune multiplo 7:

$$5x \quad 20x - 150$$

$$----- = -----$$

$$10 \quad 10$$

Elimino i denominatori (secondo principio) :

$$5x = 20x - 150$$

primo principio: termini con x prima dell'uguale, quelli senza x dopo l'uguale, chi salta l'uguale cambia di segno:

$$5x - 20x = - 150$$

$$-15x = - 150$$

cambio di segno:

$$15x = 150$$

divido per 15 (per lasciare la x da sola) :

$$15x \quad 150$$

$$----- = -----$$

$$15 \quad 15$$

$$x = 10$$

Il primo numero cercato e' $2 \cdot 10 = 20$

Il secondo e' $3 \cdot 10 = 30$

9) La somma del numeratore e del denominatore di una frazione e' 8, aggiungendo 15 ad entrambi si ottiene una frazione equivalente a $10/9$. Qual'e' la frazione di partenza?

Soluzione:

La somma del numeratore e del denominatore di una frazione e' 8, e' la prima frase e conviene significa che devo chiamare il numeratore x ed il denominatore $8 - x$

avrei anche potuto chiamare il numeratore $8 - x$ e il denominatore x

numeratore = x

denominatore = $8 - x$

poi comincia un'altra frase:

aggiungendo 15 ad entrambi si ottiene una frazione equivalente a $10/9$.

aggiungendo 15 al numeratore[$x + 15$]

aggiungendo 15 al denominatore[$8 - x + 15$]

si ottiene una frazione: devo fare la frazione con i nuovi termini

$x + 15$
[-----]

$8 - x + 15$

equivalente a $10/9$ [= $10/9$]

cioe'

$x + 15$ 10

----- = ----

$8 - x + 15$ 9

$x + 15$ 10

----- = ----

$23 - x$ 9

E' un'equazione fratta la risolvo sotto la condizione x diverso da 23

C.R. $x \neq 23$

minimo comune multiplo $9(23 - x)$ in pratica moltiplico in croce:

$9(x + 15)$ $10(23 - x)$

----- = -----

$9(23 - x)$ $9(23 - x)$

Elimino i denominatori (secondo principio) :

$9(x + 15) = 10(23 - x)$

$9x + 135 = 230 - 10x$

primo principio: termini con x prima dell'uguale, quelli senza x dopo l'uguale, chi salta l'uguale cambia di segno:

$9x + 10x = 230 - 135$

$19x = 95$

divido per 19 (per lasciare la x da sola) :

$19x$ 95

----- = -----

19 19

$x = 5$ accettabile

Il numeratore e' 5

Il denominatore e' 3

la frazione di partenza e' $5/3$.

10) In un numero di due cifre la cifra delle decine supera di 2 il doppio della cifra delle unita'. Scambiando le cifre fra loro si ottiene un numero inferiore di 36 al numero dato.

Trovare il numero. Soluzione:

In un numero di due cifre la cifra delle decine supera di 2 il doppio della cifra delle unita' e' la prima frase e significa che se chiamo x la cifra delle unita' allora la cifra delle decine sara' $2 +$ il doppio dell'altra cifra cioe' $2 + 2x$.

Ricordiamo che nel sistema decimale un numero di due cifre, ad esempio 45 si puo' scrivere $4(10) + 5$ cioe' la cifra delle decine per 10 piu' la cifra delle unita':

cifra delle unita' = x

cifra delle decine = $2 + 2x$

numero = $(2 + 2x)(10) + x$

poi comincia un'altra frase:

Scambiando le cifre fra loro si ottiene un numero inferiore di 36 al numero dato.

Scambiando le cifre fra loro[$x(10) + 2 + 2x$] ho cambiato nel numero la cifra delle unita' con quella delle decine

si ottiene un numero [=]

inferiore di 36 [- 36] ma davanti al meno ci devo mettere qualcosa
al numero dato [$(2 + 2x)(10) + x$] va prima del meno

cioe':

$$x(10) + 2 + 2x = (2 + 2x)(10) + x - 36$$

$$10x + 2 + 2x = 20 + 20x + x - 36$$

$$12x + 2 = 21x - 16$$

primo principio: termini con x prima dell'uguale, quelli senza x dopo l'uguale, chi salta l'uguale cambia di segno:

$$12x - 21x = -2 - 16$$

$$-9x = -18$$

cambio di segno:

$$9x = 18$$

divido per 9 (per lasciare la x da sola) :

$$\frac{9x}{9} = \frac{18}{9}$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

La cifra delle unita' e' 2

La cifra delle decine e' $2 \cdot 2 + 2 = 6$

Il numero di partenza e' 62.

(2) Problemi tipo "Settimana enigmistica"

Sono problemi anche divertenti che e' possibile risolvere anche mentalmente ma con una certa difficolta', mentre utilizzando le equazioni la soluzione diventa piu' semplice

1) In una famiglia di 4 persone il padre e la madre hanno la stessa eta', che e' tripla di quella del figlio; la sorellina e' nata 5 anni dopo il figlio, determinare le eta' attuali dei componenti della famiglia sapendo che fra due anni la somma delle loro eta' sara' 83 anni.

Soluzione:

Devo decidere chi chiamare x se l'eta' del padre (uguale a quella della madre) o quella del figlio oppure della figlia

Di solito quando si hanno tanti dati in relazione fra loro tipo **A in relazione con B, B in relazione con C** si cerca di scegliere non quelli estremi, ma quelli centrali, nel nostro caso B: la soluzione risulta piu' facile; in questo caso il valore centrale e' dato dall'eta' del figlio.

Chiamo x l'eta' del figlio

l'eta' della figlia sara' $x-5$

allora l'eta' del padre (ed anche della madre) sara' $3x$

fra due anni tutti avranno l'eta' aumentata di due cioe'

il figlio $x + 2$

la figlia $x - 5 + 2 = x - 3$

il padre $3x + 2$

la madre $3x + 2$

sommando tutte queste eta' dovro' ottenere 83 quindi:

$$x + 2 + x - 3 + 3x + 2 + 3x + 2 = 83$$

$$8x + 3 = 83$$

$$8x = 83 - 3$$

$$8x = 80$$

Per il secondo principio divido per 8:

$$x = 10$$

L'eta' del figlio (x) e' 10 anni

L'eta' della figlia (x-5) e' 5 anni

L'eta' del padre (3x) e' 30 anni

L'eta' della madre (3x) e' 30 anni

2) In un cortile ci sono polli e conigli: in totale ci sono 40 teste e 130 zampe. Quanti sono i polli e quanti i conigli?

Soluzione:

Poiche' ogni animale ha una testa sola avremo in tutto 40 animali quindi chiamo x il numero dei polli

il numero dei conigli sara' $40 - x$

poiche' i polli hanno due zampe tutte le zampe dei polli saranno $2x$

i conigli hanno quattro zampe quindi tutte le zampe dei conigli saranno:

$$4(40 - x)$$

sommando le zampe dei polli e dei conigli dovro' ottenere 130 quindi:

$$2x + 4(40 - x) = 130$$

$$2x + 160 - 4x = 130$$

$$2x - 4x = 130 - 160$$

$$-2x = -30$$

Per il secondo principio divido per - 2:

$$x = 15$$

Il numero di polli (x) e' 15

Il numero di conigli (40 - x) e' 25.

3) In un salvadanaio ci sono 20 monete, alcune da un euro ed alcune da due euro; se ci fossero quattro monete da un euro in piu', il valore delle monete da un euro sarebbe lo stesso di quello delle monete da due euro. Quante sono le monete da un euro e da due euro?

Soluzione:

Poiche' ci sono in tutto 20 monete chiamo x il numero di monete da un euro

il numero di monete da due euro sara' 20 - x

ora imposto l'equazione:

se ci fossero 4 monete da un euro in piu' $x + 4$

il valore delle monete da un euro sarebbe lo stesso =

di quello delle monete da due euro $2(20 - x)$ (moltiplico per 2 perche' quelle da due euro valgono il doppio)

quindi ho l'equazione:

$$x + 4 = 2(20 - x)$$

$$x + 4 = 40 - 2x$$

$$x + 2x = 40 - 4$$

$$3x = 36$$

$$x = 12$$

Il numero di monete da un euro (x) e' 12

Il numero di monete da due euro (20 - x) e' 8.

4) Dobbiamo ripartire la somma di 2000 euro fra tre persone, in modo che la prima abbia 100 euro piu' della seconda e la seconda 200 euro piu' della terza. Trova le tre somme

Soluzione:

Devo decidere cosa chiamare x: se la somma data alla prima persona, quella data alla seconda oppure quella data alla terza.

Di solito quando si hanno tanti dati in relazione fra loro come A in relazione con B, B in relazione con C si cerca di scegliere non quelli estremi, ma quelli centrali, nel nostro caso B: la soluzione risulta piu' facile; in questo caso e' facile comunque metti la x

Chiamo x la somma data alla seconda persona

la somma spettante alla prima sara' $x + 100$

e la somma per la terza sara' $x - 200$

le tre somme di denaro in totale mi dovranno dare il valore 2000 quindi:

$$x + 100 + x + x - 200 = 2000$$

$$3x = 2000 - 100 + 200$$

$$3x = 2100$$

$$x = 700$$

La somma spettante alla prima persona ($x + 100$) e' 800 euro

La somma spettante alla seconda persona (x) e' 700 euro

La somma spettante alla terza persona ($x - 200$) e' 500 euro

5) Con una certa quantita' di vino si possono riempire 4 recipienti uguali, oppure 6 recipienti uguali, della capacita' di 12 litri inferiore ai precedenti. Trovare la quantita' di vino

Soluzione:

Chiamo x la quantita' di vino contenuta in uno dei quattro recipienti uguali

Se chiamassi x la quantita' totale di vino dovrei usare le frazioni $x/4$ e $x/6$, troppo complicato

Allora la capacita' di uno dei sei recipienti uguali sara' $x - 12$
 ora imposto l'equazione:
 la quantita' di vino che c'e' nei quattro recipienti uguali $4x$
 e' uguale =
 a quella che c'e' nei sei recipienti uguali piu' piccoli $6(x - 12)$
 quindi ho l'equazione:
 $4x = 6(x - 12)$
 $4x = 6x - 72$
 $4x - 6x = -72$
 $-2x = -72$
 $x = 36$
 Il contenuto di uno dei quattro recipienti uguali (x) e' 36 litri
 La quantita' totale di vino ($4x$) e' 144 litri

6) Policrate, tiranno di Samo, avendo chiesto a Pitagora quanti alunni avesse, ebbe questa risposta: "Meta' studia la matematica, la quarta parte studia i fenomeni della natura e la settima parte medita in silenzio, inoltre vi sono tre donne".

Quanti erano gli allievi?

Soluzione:

Chiamo x il numero degli allievi
 ora imposto l'equazione:
 il numero totale degli allievi x
 sara' dato =
 dalle meta' che studia matematica $1/2 x$
 piu' +
 la quarta parte che studia la natura $1/4 x$
 piu' +
 la settima parte che medita in silenzio $1/7 x$
 piu' +
 tre donne 3
 quindi ho l'equazione
 $x = 1/2 x + 1/4 x + 1/7 x + 3$
 minimo comune multiplo 28
 $28x = 14x + 7x + 4x + 84$
 $28x - 14x - 7x - 4x = 84$
 $3x = 84$
 $x = 28$
 Il numero (x) degli allievi di Pitagora era 28

7) Ho delle caramelle che voglio distribuire in parti uguali fra un certo numero di bambini: pero' mi accorgo che se do 4 caramelle ciascuno mi avanzano 3 caramelle, mentre se do 5 caramelle ciascuno mi mancano 6 caramelle. Quante sono le caramelle e quanti i bambini?

Soluzione:

Chiamo x il numero dei bambini
 ora imposto l'equazione ricordando che il numero totale delle caramelle e' fisso sia che ne distribuisca quattro a testa che cinque a testa
 nel primo caso le caramelle sono 4 per bambino piu' tre di avanzo $4x + 3$
 nel secondo caso le caramelle sono cinque per bambino meno 6 $5x - 6$
 quindi ho l'equazione
 $4x + 3 = 5x - 6$
 $4x - 5x = -6 - 3$
 $-x = -9$
 $x = 9$
 Il numero (x) dei bambini e' 9
 le caramelle ($4x + 3$) sono $4 \cdot 9 + 3 = 39$

(3) Problemi di primo grado di tipo geometrico

Sono problemi che servono a trovare dati in geometria; questi non sono troppo divertenti pero' sono utili.

Di diverso dai problemi normali c'e' il fatto che la relazione da scrivere non e' sempre esplicita ma, talvolta, va ricavata utilizzando le regole della geometria; vediamo alcuni esempi.

In tutti i seguenti problemi quando assegno un numero ad un segmento dovrei indicare il segmento stesso con un trattino sopra come ad esempio:

$\overline{AB} = 10 \text{ cm}$

E si legge: la misura di AB vale 10 centimetri.

Poiche' pero' mi sarebbe difficile indicare la misura correttamente su queste pagine invece di mettere una linea sopra metterò una linea sotto nel seguente modo:

$\underline{AB} = 10 \text{ cm}$

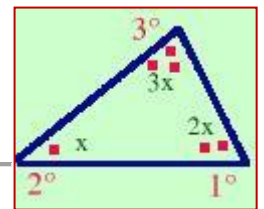
Dovrai essere tu a riscrivere la misura correttamente quando eseguirai un esercizio.

1) In un triangolo un angolo e' doppio del secondo ed il terzo e' il triplo del secondo.

Determinare i tre angoli,

Soluzione:

In tutti i problemi di tipo geometrico sarebbe bene fare la figura su cui si sviluppa il problema stesso: sulla figura scriverai i dati che hai, così ti sarà più facile capire dove mettere la x. Ricordati poi che la figura deve essere più grande possibile per potervi pasticciare sopra e scrivervi i dati man mano che si trovano; i problemi geometrici si risolvono sulla figura. Devo decidere chi chiamare x se il primo, il secondo o il terzo angolo,



Di solito quando si hanno tanti dati in relazione fra loro tipo **A in relazione con B, C in relazione con B** si cerca di scegliere non quelli singoli, ma quelli ripetuti, nel nostro caso B: la soluzione risulta più facile; in questo caso il valore centrale e' dato dal secondo angolo.

Chiamo **x** l'ampiezza del secondo angolo

l'ampiezza del primo angolo sarà **2x**

quella del terzo sarà **3x**

Devo ora decidere come collegare fra loro questi dati; il problema non me lo dice, quindi devo ricavare il collegamento da una relazione geometrica.

So che gli angoli di un triangolo sono legati dalla relazione:

Primo angolo + secondo angolo + terzo angolo = 180 gradi

quindi scriverò

$$2x + x + 3x = 180$$

$$\text{ora risolvo } 6x = 180$$

Per il secondo principio divido per 6

$$x = 180/6 = 30$$

Il secondo angolo (x) e' 30 gradi

Il primo angolo (2x) e' 60 gradi

Il terzo angolo (3x) e' 90 gradi

Si tratta quindi del triangolo rettangolo meta' del triangolo equilatero.

2) Il perimetro di un triangolo isoscele e' metri 26; determinare le lunghezze della base e dei lati sapendo che la base e' 3/5 del lato

Soluzione:

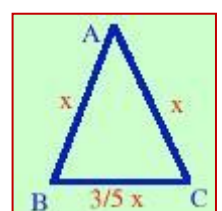
Come prima cosa costruiamo la figura e mettiamo i dati che abbiamo; ricordo che un triangolo e' isoscele quando ha due lati uguali

Questa volta la relazione me la dà il problema, pero' devo scriverla per esteso, quindi invece di

$$\text{perimetro} = 26 \text{ m}$$

scriverò

$$\underline{AB} + \underline{BC} + \underline{CA} = 26$$



So che la base e' $3/5$ del lato, quindi se chiamo il lato x :

$$\underline{AB} = \underline{AC} = x$$

allora la base sara'

$$\underline{BC} = 3/5 x$$

Sostituisco nella relazione:

$$x + \frac{3}{5}x + x = 26$$

$$\text{m.c.m.} = 5$$

$$5x + 3x + 5x = 130$$

$$\frac{13x}{5} = \frac{130}{5}$$

$$13x = 130$$

Per il secondo principio divido per 13

$$x = 130/13 = 10$$

quindi

$$\underline{AB} = \underline{AC} = 10 \text{ m}$$

$$\underline{BC} = 3/5 x = 3/5 \cdot 10 \text{ m} = 6 \text{ m}$$

3) In un rettangolo il perimetro e' centimetri 120 e la base e' meta' dell'altezza; determinare l'area.

Soluzione:

Come prima cosa costruiamo la figura e mettiamo i dati che abbiamo;

La relazione mi e' data dal problema, pero' devo scriverla per esteso, quindi invece di

$$\text{perimetro} = 120 \text{ cm}$$

scrivero'

$$\underline{AB} + \underline{BC} + \underline{CD} + \underline{DA} = 120$$

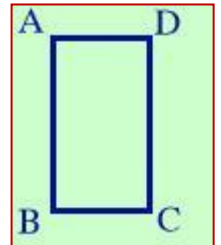
So che la base e' meta' dell'altezza, quindi se chiamo la base x :

$$\underline{BC} = \underline{DA} = x$$

allora l' altezza sara'

$$\underline{AB} + \underline{CD} = 2x$$

Avrei potuto chiamare x l'altezza e $1/2 x$ la base, ma chi vuole lavorare con le frazioni se e' possibile evitarlo?



Sostituisco nella relazione:

$$2x + x + 2x + x = 120$$

$$6x = 120$$

$$x = 120/6 = 20$$

quindi

$$\underline{BC} = \underline{DA} = 20 \text{ cm}$$

$$\underline{AB} = \underline{CD} = 2x = 40 \text{ cm}$$

Ora possiamo trovare l'area

$$A_s = \underline{AB} \cdot \underline{CD} = 20 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} = 800 \text{ cm}^2$$

4) In un triangolo isoscele la base e' $6/5$ del lato e la somma dei $2/3$ della base e dei $4/5$ del lato e' cm 32.

Calcolare il perimetro e l'area

Soluzione:

Come problema e' abbastanza semplice, basta ricordare che il triangolo isoscele ha 2 lati uguali

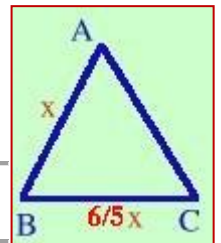
Scrivo i dati

$$\underline{BC} = 6/5 \underline{AB}$$

$$2/3 \underline{BC} + 4/5 \underline{AB} = 32 \text{ cm}$$

Ho due relazioni, una mi serve per mettere la x e l'altra per risolvere il problema.

Potrei anche risolvere il problema con un sistema, in questo caso basta sostituire x e y ai segmenti coinvolti nelle relazioni



So che la base e' $6/5$ del lato, allora se chiamo il lato x la base sara' $6/5 x$

$$\underline{AB} = x$$

$$\underline{BC} = 6/5 x$$

Sostituisco nella seconda relazione

$$2/3 \cdot (6/5 x) + 4/5 x = 32$$

Di solito, per semplicità, nei problemi grandezze quali metri o centimetri si mettono solo nelle condizioni iniziali e nei risultati, mentre nello sviluppo delle equazioni si trascurano. Invece non è possibile trascurare un parametro come ad esempio perimetro = 4a, in questo caso la a deve essere presente in tutto lo sviluppo del problema

Ora sviluppo l'equazione

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} x + \frac{4}{5} x = 32$$

$$\frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} x + \frac{4}{5} x = 32$$

semplifico il 6 con il 3 mi resta 2 al numeratore

$$\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 5} x + \frac{4}{5} x = 32$$

$$\frac{4}{5} x + \frac{4}{5} x = 32$$

m.c.m. = 5

$$4x + 4x = 160$$

$$8x = 160$$

$$x = 160/8 = 20$$

Quindi

$$\underline{AB} = 20 \text{ cm}$$

$$\underline{BC} = \frac{6}{5} \cdot 20 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$

Il problema non è finito: devo trovare il perimetro e l'area

Il perimetro è semplice da trovare perché essendo il triangolo isoscele conosco la misura dei tre lati:

$$\underline{AB} = \underline{AC} = 20 \text{ cm}$$

$$\underline{BC} = 24 \text{ cm}$$

$$\text{Perimetro} = \underline{AB} + \underline{BC} + \underline{AC} = (20 + 24 + 20) \text{ cm} = 64 \text{ cm}$$

Per quanto riguarda l'area so che l'area di un triangolo è

base per altezza diviso due

quindi devo trovare l'altezza AH

Posso utilizzare il teorema di Pitagora sul triangolo ABH per trovare AH

Teorema di Pitagora

$$\underline{AB}^2 = \underline{AH}^2 + \underline{BH}^2$$

Ricavo AH

$$\underline{AH}^2 = \underline{AB}^2 - \underline{BH}^2$$

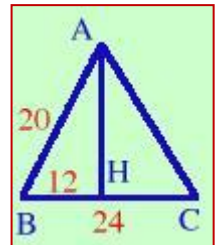
$$\underline{AH} = \sqrt{(\underline{AB}^2 - \underline{BH}^2)} = \sqrt{(20^2 - 12^2)} =$$

$$= \sqrt{(400 - 144)} = \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$$

Quindi

$$\text{Area} = (\underline{AB} \cdot \underline{AH}) / 2 = (24 \cdot 16) / 2 = 192 \text{ cm}^2$$

Senza scomodare il teorema di Pitagora si poteva usare in questo caso la terna pitagorica 3 - 4 - 5



5) In un triangolo rettangolo un cateto è uguale ai 3/4 dell'altro, Sapendo che la somma dei cateti è m 21 determinare l'area del triangolo

Soluzione:

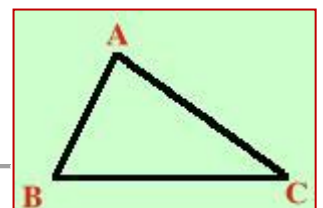
Il problema ci fornisce tutti i dati che servono.

Scrivo i dati:

$$\underline{AB} = \frac{3}{4} \underline{AC}$$

$$\underline{AB} + \underline{AC} = 21 \text{ m}$$

Ho due relazioni, una mi serve per mettere la x e l'altra per risolvere il problema.



Potrei anche risolvere il problema con un sistema, in questo caso basta sostituire x e y ai segmenti coinvolti nelle relazioni

So che un cateto è 3/4 dell'altro cateto, allora se chiamo il secondo cateto x il primo cateto sarà 3/4 x

$$\underline{AC} = x$$

$$\underline{AB} = \frac{3}{4}x$$

Sostituisco nella seconda relazione

$$\frac{3}{4}x + x = 21$$

Ora sviluppo l'equazione

$$3$$

$$--- x + x = 21$$

$$4$$

$$\text{m.c.m.} = 4$$

$$3x + 4x = 84$$

$$----- = -----$$

$$4$$

$$4$$

$$7x = 84$$

$$x = 84/7 = 12$$

Quindi

$$\underline{AC} = 12 \text{ m}$$

$$\underline{AB} = \frac{3}{4} \cdot 12 \text{ m} = 9 \text{ m}$$

Il problema non e' finito: devo trovare l'area

So che l'area di un triangolo rettangolo e'

cateto per cateto fratto due

quindi

$$\text{Area} = (\underline{AB} \cdot \underline{AC}) / 2 = (9 \cdot 12) / 2 = 54 \text{ m}^2$$

6) L'ipotenusa di un triangolo rettangolo supera di metri 4 un cateto e l'altro cateto vale m 8. Determinare il perimetro del rettangolo

Soluzione:

Scriviamo i dati

$$\underline{BC} = \underline{AB} + 4$$

$$\underline{AC} = 8 \text{ m}$$

Pongo:

$\underline{AB} = x$ al solito mi conviene chiamare x il termine che si trova dopo l'uguale

$$\underline{BC} = x + 4$$

$$\underline{AC} = 8$$

Stavolta ho tre segmenti diversi e il problema non mi fornisce nessuna relazione che li coinvolga. Significa che devo trovare io una relazione che sia valida e leghi i dati; essendo il triangolo rettangolo la relazione cercata sara' il teorema di Pitagora

Teorema di Pitagora

$$\underline{BC}^2 = \underline{AB}^2 + \underline{AC}^2$$

Sostituisco i dati ai segmenti

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8^2$$

eseguo i calcoli

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 64$$

$$x^2 + 8x + 16 - x^2 - 64 = 0$$

$$8x - 48 = 0$$

$$8x = 48$$

$$x = 48/8 = 6$$

Quindi

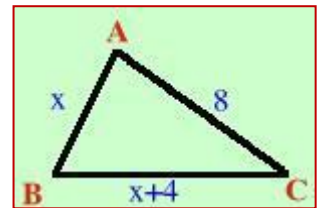
$$\underline{AB} = x = 6 \text{ m}$$

$$\underline{BC} = x + 4 = 6 + 4 = 10 \text{ m}$$

$$\underline{AC} = 8 \text{ m}$$

devo trovare il perimetro

$$\text{Perimetro} = \underline{AB} + \underline{BC} + \underline{AC} = 6 + 10 + 8 = 24 \text{ m}$$



Anche in questo problema e' presente la terna pitagorica 3, 4 e 5, infatti i lati sono:

$$\underline{AB} = 6 = 2 \cdot 3$$

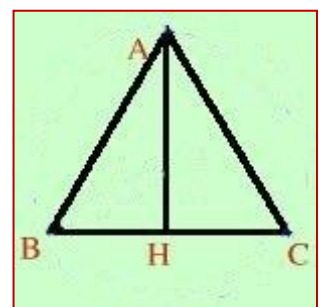
$$\underline{BC} = 10 = 2 \cdot 5$$

$$\underline{AC} = 8 = 2 \cdot 4.$$

Se stai bene attento la meta' dei problemi sui triangoli rettangoli si basa sulla terna 3,4 e 5

7) In un triangolo isoscele la base e' uguale all'altezza ad essa relativa; si sa che sottraendo m 10 alla base ed aggiungendo m 20 all'altezza l'area del triangolo aumenta di 100 m². Determinare il perimetro del triangolo

Soluzione:



Sappiamo che

$$\underline{AH = BC}$$

Pongo:

$$\underline{AH = BC = x}$$

Ora interpreto

Togliendo 10 alla base ed aggiungendo 20 all'altezza la nuova area e' uguale a quella vecchia aumentata di 100

Trasformo in linguaggio matematico:

Sottraendo 10 alla base ($\underline{BC - 10}$)

ed aggiungendo 20 all'altezza ($\underline{AH + 20}$)

La nuova area ($\underline{(BC - 10) \cdot (AH + 20) / 2}$)

e' uguale (=)

a quella vecchia ($\underline{(BC \cdot AH) / 2}$)

aumentata di 100 ($+ 100$)

Quindi scrivo la relazione

$$\frac{(BC - 10) \cdot (AH + 20)}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2} + 100$$

sostituisco l'incognita

$$\frac{(x - 10) \cdot (x + 20)}{2} = \frac{x \cdot x}{2} + 100$$

Calcolo

$$\frac{x^2 - 10x + 20x - 200}{2} = \frac{x^2 + 200}{2}$$

tolgo i denominatori

$$x^2 - 10x + 20x - 200 = x^2 + 200$$

$$x^2 - 10x + 20x - 200 - x^2 - 200 = 0$$

$$- 10x + 20x - 200 - 200 = 0$$

$$10x - 400 = 0$$

$$10x = 400 \quad \underline{AH = BC = x}$$

$$x = 40$$

quindi:

$$\underline{AH = BC = 40}$$

per trovare il perimetro devo trovare il valore di AC

Nel triangolo AHC conosco AH = 40m ed HC=20m, per trovare AC applico il teorema di Pitagora al triangolo AHC.

Teorema di Pitagora

$$\underline{AC^2 = AH^2 + HC^2}$$

$$\text{calcolo } \underline{AC^2 = 40^2 + 20^2 = 1600 + 400 = 2000^2}$$

$\underline{AC = \sqrt{2000} = 20\sqrt{5}}$, se vuoi vedere i calcoli per estrarre di radice, eccoli:

$\sqrt{2000}$ = devo scomporre 2000 oppure, per fare prima, lo divido in quadrati, cioe' in termini di cui conosco la radice

$$= \sqrt{(100 \cdot 4 \cdot 5)} = 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 20\sqrt{5}$$

Quindi:

$$P(ABC) = BC + 2 AC = 40 + 2(20\sqrt{5}) = 40 + 40\sqrt{5} = 40(1 + \sqrt{5})m$$

Naturalmente questi problemi sono solo di esempio generico; problemi specifici saranno trattati alla fine dei relativi argomenti di geometria

b) Problemi risolvibili mediante un sistema

(1) Problemi numerici risolvibili mediante sistema

Di solito sono piu' semplici da impostare di quelli con una sola incognita: basta assegnare ad ognuno dei due valori che devi trovare una lettera x e y e poi scrivere le due relazioni che ti da' il problema.

Ti consiglio, prima di procedere, di ripassare il [vocabolario](#)

Parecchi problemi che si risolvono con una sola incognita possono essere risolti anche con due incognite in modo equivalente e spesso più semplicemente

Gli ultimi due problemi sono già stati risolti con una sola incognita: qui li risolviamo con due incognite

1) Determinare due numeri sapendo che il minore supera di 6 la metà del maggiore e che la somma dei $\frac{2}{5}$ del maggiore e di $\frac{1}{4}$ del minore è 12

Soluzione:

La prima frase mi dice che devo determinare due numeri quindi uno lo chiamo x e l'altro y

1° Numero = x (maggiore)

2° Numero = y (minore)

e dopo il "sapendo che" c'è la prima relazione da scrivere:

il minore y
 supera di 6 $= 6 +$
 la metà del maggiore $\frac{1}{2} x$

e dopo "e che" c'è la seconda relazione da scrivere:

la somma dei $\frac{2}{5}$ del maggiore e $\frac{2}{5} x +$
 di $\frac{1}{4}$ del minore $\frac{1}{4} y$
 è 12 $= 12$

Raccogliendo le due relazioni ottengo il sistema:

$$\begin{cases} y = 6 + \frac{1}{2}x \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y = 12 \end{cases}$$

Lo riduco a [forma normale](#): faccio il minimo comune multiplo:

$$\begin{cases} \frac{2y}{2} = \frac{12 + x}{2} \\ \frac{8x + 5y}{20} = \frac{240}{20} \end{cases}$$

Elimino i denominatori:

$$\begin{cases} 2y = 12 + x \\ 8x + 5y = 240 \end{cases}$$

porto le x e le y prima dell'uguale ed i numeri dopo l'uguale

$$\begin{cases} -x + 2y = 12 \\ 8x + 5y = 240 \end{cases}$$

cambio di segno la prima equazione (di solito si vuole la x positiva)

$$\begin{cases} x - 2y = -12 \\ 8x + 5y = 240 \end{cases}$$

Risolvero per sostituzione: ricavo x dalla prima equazione e sostituisco il valore nella seconda

$$\begin{cases} x = 2y - 12 \\ 8(2y - 12) + 5y = 240 \end{cases}$$

eseguo i calcoli (al posto della prima equazione metto una linea)

$$\begin{cases} \hline 16y - 96 + 5y = 240 \end{cases}$$

separo le y ed i numeri

$$\begin{cases} 16y + 5y = 240 + 96 \end{cases}$$

sommo

$$\begin{cases} \hline 21y = 336 \end{cases}$$

$$x = 2y - 12$$

$$y = 336/21 = 16$$

sostituisco 16 al posto di y nella prima equazione:

$$x = 2(16) - 12$$

$$y = 16$$

$$x = 32 - 12 = 20$$

$$y = 16$$

$$x = 20$$

$$y = 16$$

Risposta: i due numeri cercati sono $x=20$ ed $y=16$

2) Determinare due numeri sapendo che la somma di $\frac{1}{4}$ del maggiore e della metà del minore è 12 e che dividendoli fra loro si ottiene come quoziente 2 e come resto 8

Soluzione:

La prima frase mi dice che devo determinare due numeri quindi uno lo chiamo x e l'altro y

1° Numero = x (maggiore)

2° Numero = y (minore)

e dopo il "sapendo che" c'è la prima relazione da scrivere:

$$\begin{aligned} \text{la somma di } 1/4 \text{ del maggiore} & \quad 1/4 x + \\ \text{e della meta' del minore} & \quad 1/2 y \\ \text{e' } 12 & \quad = 12 \end{aligned}$$

e dopo "e che" c'è la seconda relazione da scrivere: però stavolta si parla di resto quindi devo scrivere sempre la relazione ([vedi vocabolario](#))

Dividendo = divisore per quoziente più resto; cioè

maggiore = minore · quoziente + resto

$$x = y \cdot 2 + 8$$

Raccogliendo le due relazioni ottengo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 12 \\ x = 2y + 8 \end{cases}$$

Lo riduco a [forma normale](#): sopra faccio il minimo comune multiplo e sotto porto la y prima dell'uguale:

$$\begin{cases} \frac{x + 2y}{4} = \frac{48}{4} \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

Elimino i denominatori

$$\begin{cases} x + 2y = 48 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

Risolvero per [addizione](#): sommo in verticale per ricavare la x

[Se preferisci risolverlo per sostituzione](#):

$$\begin{cases} x + 2y = 48 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x \quad \quad = 56 \end{array}$$

$$x = 56/2 = 28$$

Cambio di segno la seconda e sommo in verticale per ricavare la y:

$$\begin{cases} x + 2y = 48 \\ -x + 2y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4y = 40 \end{array}$$

$$y = 40/4 = 10$$

Otengo il risultato finale

$$\begin{cases} x = 28 \\ y = 10 \end{cases}$$

Risposta: i due numeri cercati sono x=28 ed y=10

3) In un numero di tre cifre la cifra delle unità e' uguale a quella delle centinaia; scambiando tra loro la cifra delle unità e quella delle decine si ottiene un numero che supera di 27 quello di partenza. Trovare il numero sapendo che la somma delle sue cifre e' 12

Soluzione:

Chiamo la cifra delle unità (e quindi anche quella delle centinaia) x e quella delle decine y;

Cifra unità = x

Cifra decine = y

allora il mio numero sarà

$$100x + 10y + x$$

Scambiando la cifra delle unità con quella delle decine ottengo invece il numero

$$100x + 10x + y$$

e questo numero supera di 27 quello di partenza cioè

$$100x + 10x + y = 27 + 100x + 10y + x$$

e questa e' la prima relazione

La seconda relazione mi dice che la somma delle cifre del numero e' 12 cioè

$$x + x + y = 12$$

Metto a sistema:

$$\begin{cases} 100x + 10x + y = 27 + 100x + 10y + x \\ x + x + y = 12 \end{cases}$$

sommo:

$$\begin{cases} 9x - 9y = 27 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

Posso rendere la prima equazione del sistema più semplice dividendo tutti i termini per 9:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

Risolvere per [addizione](#): sommo in verticale per ricavare la y

[Se preferisci risolverlo per sostituzione](#):

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x - y = 3 \\ 2x + y = 12 \\ \hline 3x = 15 \end{array}$$

$$x = 15/3 = 5$$

Moltiplico per -2 la prima e sommo in verticale per ricavare la y:

$$\begin{cases} -2x + 2y = -6 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2x + 2y = -6 \\ 2x + y = 12 \\ \hline 3y = 6 \end{array}$$

$$y = 6/3 = 2$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Risposta: il numero cercato è 525

$$5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 525$$

4) In una frazione il numeratore supera di 15 il denominatore. Sottraendo 2 ad entrambi i termini si ottiene una frazione equivalente a $7/2$. Trovare la frazione

Soluzione:

Poniamo

Numeratore = x

Denominatore = y

Quindi la frazione è: $\frac{x}{y}$

Scriviamo la prima relazione;

il numeratore x
supera di 15 $= 15 +$
il denominatore y

e dopo il punto c'è la seconda relazione da scrivere:

sottraendo 2 ad entrambi i termini, si ottiene una frazione $\frac{x-2}{y-2}$
equivalente $=$
a $7/2$

Raccogliendo ho le due relazioni:

$$\begin{cases} x = 15 + y \\ \frac{x-2}{y-2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Riduco a forma normale. Nella seconda, facendo il minimo comune multiplo devo porre come condizione di realtà $y-2 \neq 0$ cioè $y \neq 2$

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ \frac{2(x-2)}{2(y-2)} = \frac{7(y-2)}{2(y-2)} \end{cases}$$

Per la condizione di realtà posso eliminare i denominatori:

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ 2(x-2) = 7(y-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ 2x - 4 = 7y - 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ 2x - 7y = 4 - 14 \end{cases}$$

ottengo la forma normale:

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ 2x - 7y = -10 \end{cases}$$

Risolviamo per sostituzione: ricavo x dalla prima e sostituisco nella seconda:

$$\begin{cases} x = 15 + y \\ 2(15 + y) - 7y = -10 \end{cases}$$

moltiplico (al posto della prima equazione metto una linea):

$$\begin{cases} 30 + 2y - 7y = -10 \end{cases}$$

separo le y ed i numeri:

$$\begin{cases} 2y - 7y = -10 - 30 \end{cases}$$

sommo:

$$\begin{cases} -5y = -40 \end{cases}$$

Cambio di segno entrambe i termini:

$$\begin{cases} 5y = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 15 + y \\ y = 40/5 = 8 \end{cases}$$

sostituisco 2 al posto di y nella prima equazione

$$\begin{cases} x = 15 + 8 = 23 \\ y = 8 \\ x = 23 \\ y = 8 \end{cases}$$

Risposta: la frazione cercata e' $\frac{23}{8}$

5) La somma del numeratore e del denominatore di una frazione e' 8 , aggiungendo 15 ad entrambi si ottiene una frazione equivalente a $10/9$. Qual'e' la frazione di partenza?

Soluzione:

Poniamo

Numeratore = x (maggiore)

Denominatore = y (minore)

Quindi la frazione e' $\frac{x}{y}$

Scriviamo la prima relazione:

la somma del numeratore
e del denominatore di una frazione
e' 8

$$\begin{aligned} x + y \\ = 8 \end{aligned}$$

La seconda relazione:

Aggiungendo 15 ad entrambi

$$\frac{x+15}{y+15}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} = \\ \frac{10}{9} \end{aligned}$$

una frazione equivalente a $10/9$

Metto a sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ \frac{x+15}{y+15} = \frac{10}{9} \end{cases}$$

Lo riduco a **forma normale**: Sotto moltiplico in croce (equivale a fare il m.c.m.):

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 9(x + 15) = 10(y + 15) \end{cases}$$

Calcolo:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 9x + 135 = 10y + 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 9x - 10y = 15 \end{cases}$$

Risolve per sostituzione: ricavo x dalla prima equazione e sostituisco il valore nella seconda:

$$\begin{cases} x = 8 - y \\ 9(8 - y) - 10y = 15 \end{cases}$$

calcolo (al posto della prima equazione metto una linea)

$$\begin{cases} 72 - 9y - 10y = 15 \end{cases}$$

separo le y ed i numeri

$$\begin{cases} -9y - 10y = 15 - 72 \end{cases}$$

sommo

$$\begin{cases} -19y = -57 \end{cases}$$

Cambio di segno:

$$\begin{cases} 19y = 57 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 57/19 = 3 \end{cases}$$

sostituisco 3 al posto di y nella prima equazione

$$\begin{cases} x = 8 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \end{cases}$$

Risposta:

La frazione cercata e' $\frac{5}{3}$

6) In un numero di due cifre la cifra delle decine supera di 2 il doppio della cifra delle unita'. Scambiando le cifre fra loro si ottiene un numero inferiore di 36 al numero dato. Trovare il numero

Soluzione:

Chiamo la cifra delle unita' x e quella delle decine y;

Cifra unita' = x

Cifra decine = y

quindi il nostro numero e' $10y + x$

Scriviamo la prima relazione:

la cifra delle decine y
 supera di 2 $= 2 +$
 il doppio della cifra delle unita' $2x$

La seconda relazione:

Scambiando le cifre fra di loro si ottiene un numero inferiore di 36
 al numero dato

$$\begin{aligned} 10x + y + 36 \\ = 10y + x \end{aligned}$$

Se e' inferiore di 36 per ottenere l'uguale dovrò aggiungere 36

Metto a sistema:

$$\begin{cases} y = 2 + 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + y + 36 = 10y + x \end{cases}$$

riduco a forma normale:

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x - 9y = -36 \end{cases}$$

Posso rendere la seconda equazione del sistema piu' semplice dividendo tutti i termini per 9:

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -4 \end{cases}$$

Risolvo per sostituzione: ricavo x dalla seconda equazione e sostituisco il valore nella prima:

$$\begin{cases} 2(y - 4) - y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 4 \end{cases}$$

calcolo (al posto della seconda equazione metto una linea):

$$\begin{cases} 2y - 8 - y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 \end{cases}$$

Sommo:

$$\begin{cases} y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 4 \end{cases}$$

sostituisco 6 al posto di y nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - 4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 \end{cases}$$

Risposta: il numero cercato e' 62

(2) Problemi tipo "Settimana enigmistica"

Problemi che si risolvono con una sola incognita possono essere risolti anche con due incognite in modo equivalente e spesso più semplicemente

I tre problemi seguenti sono già stati risolti con una sola incognita: qui li risolviamo con due incognite

1) In una famiglia di 4 persone il padre e la madre hanno la stessa età, che è tripla di quella del figlio; la sorellina è nata 5 anni dopo il figlio, determinare le età attuali dei componenti della famiglia sapendo che fra due anni la somma delle loro età sarà 83 anni.

Soluzione:

Qui è più facile impostare il problema: di solito si mettono le incognite man mano che si incontrano i dati.

Chiamo x l'età del padre (uguale a quella della madre)

chiamo y quella del figlio

quella della figlia sarà $y-5$

Avendo usato due incognite ho bisogno di due relazioni

Potevo farlo con 3 [incognite](#)

Siccome il padre (e la madre) hanno età tripla di quella del figlio allora una relazione sarà

$$x = 3y$$

fra due anni tutti avranno l'età aumentata di due cioè

il figlio $y + 2$

la figlia $y - 5 + 2 = y - 3$

il padre $x + 2$

la madre $x + 2$

sommando tutte queste età dovrò ottenere 83 quindi

seconda relazione

$$y + 2 + y - 3 + x + 2 + x + 2 = 83$$

$$2y + 2x + 3 = 83$$

$$2x + 2y - 80 = 0$$

$$x + y - 40 = 0$$

ora metto a sistema le due relazioni:

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y - 40 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y - 40 = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:

$$\begin{cases} x = 3y \\ 3y + y - 40 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ 3y + y - 40 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ 4y = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ 4y = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \cdot 10 = 30 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 \\ y = 10 \end{cases}$$

L'età del padre (x) è 30 anni

L'età della madre (x) è 30 anni

L'età del figlio (y) è 10 anni

L'età della figlia ($y-5$) è 5 anni

2) In un cortile ci sono polli e conigli: in totale ci sono 40 teste e 130 zampe. Quanti sono i polli e quanti i conigli?

Soluzione:

Chiamo x il numero dei polli

il numero dei conigli lo chiamo y

Avendo due incognite avrò bisogno di due relazioni:

Prima relazione: ci sono 40 teste cioè

polli + conigli = 40

$$x + y = 40$$

Seconda relazione: ci sono 130 zampe

poiché i polli hanno due zampe tutte le zampe dei polli saranno $2x$

i conigli hanno quattro zampe quindi tutte le zampe dei conigli saranno $4y$

sommando le zampe dei polli e dei conigli dovrò ottenere 130 quindi

$$2x + 4y = 130$$

Per il secondo principio divido per 2

$$x + 2y = 65$$

Ora metto a sistema le due relazioni:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x + 2y = 65 \end{cases}$$

ricavo la x, ad esempio dalla prima equazione e la sostituisco nella seconda:

$$\begin{cases} x = 40 - y \\ 40 - y + 2y = 65 \end{cases}$$

sommo e trasporto 40 oltre l'uguale:

$$\begin{cases} x = 40 - y \\ y = 65 - 40 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 40 - y \\ y = 25 \end{cases}$$

sostituisco ora nella prima equazione:

$$\begin{cases} x = 40 - 25 \\ y = 25 \end{cases}$$

ottengo il risultato finale:

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 25 \end{cases}$$

Il numero di polli (x) e' 15

Il numero di conigli (y) e' 25

3) In un salvadanaio ci sono 20 monete, alcune da un euro ed alcune da due euro; se ci fossero quattro monete da un euro in piu', il valore delle monete da un euro sarebbe lo stesso di quello delle monete da due euro. Quante sono le monete da un euro e da due euro?

Soluzione:

Chiamo x il numero di monete da un euro

il numero di monete da due euro lo chiamo y

avendo due incognite avro' bisogno di due equazioni

prima condizione: le monete sono 20

$$x + y = 20$$

ora imposto la seconda condizione:

se ci fossero 4 monete da un euro in piu' $x + 4$

il valore delle monete da un euro sarebbe lo stesso =

di quello delle monete da due euro $2y$ (moltiplico per 2 perche' quelle da due euro valgono il doppio e si parla di uguaglianza fra valori)

quindi ho l'equazione

$$x + 4 = 2y$$

$$x - 2y + 4 = 0$$

Ora imposto il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

ricavo x, ad esempio dalla prima equazione, e sostituisco il suo valore al posto della x nella seconda:

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ 20 - y - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

nella seconda equazione sommo :

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ -3y + 24 = 0 \end{cases}$$

cambio segno

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ 3y - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ 3y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ y = 8 \end{cases}$$

sostituisco il valore trovato di y nella prima equazione:

$$\begin{cases} x = 20 - 8 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \end{cases}$$

Il numero di monete da un euro (x) e' 12

Il numero di monete da due euro (y) e' 8

(3) Problemi geometrici

Per i problemi di geometria devi leggere molto bene il testo; poi devi trovare tante relazioni (equazioni) quante sono le incognite che usi:

ad esempio **3 incognite --> 3 relazioni**

se ad esempio hai due incognite ed una sola relazione allora devi trovare un teorema che coinvolga sia i dati che hai che le incognite che hai posto e devi utilizzarlo come seconda relazione, ma questo lo vedremo sui problemi di secondo grado

Qui ci limitiamo a pochi semplici esempi, perche' la maggior parte dei problemi geometrici sara' risolta mediante l'uso dei teoremi di Pitagora, Euclide, Talete.... sia quando parleremo di problemi di secondo grado che nelle sezioni specifiche degli argomenti trattati

1) In un rettangolo di perimetro cm. 56 la base supera di 4 il doppio dell'altezza: determinarne l'area

Soluzione:

Come prima cosa costruiamo la figura

La prima relazione e' il perimetro = 56 cm, pero' devo scriverla per esteso, scrivero'

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 56 \text{ cm}$$

Da notare che i lati opposti del rettangolo sono uguali

La seconda relazione mi dice che la base supera di 4 il doppio dell'altezza:

sviluppo

$$\overline{BC} = 4 + 2\overline{AB}$$

Da notare che nelle due relazioni gli elementi che non conosco si riducono a due perche' $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$

Per calcolare l'area devo trovare la base e l'altezza, quindi pongo

$$\text{base} = \overline{BC} = x \quad \text{altezza} = \overline{AB} = y$$

sostituisco nella prima relazione

$$y + x + y + x = 56$$

$$2x + 2y = 56$$

divido per 2 ed ottengo la prima relazione:

$$x + y = 28$$

sostituisco nella seconda relazione

$$x = 4 + 2y$$

$$x - 2y = 4$$

Metto a sistema le due relazioni:

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

ricavo la x dalla prima equazione:

$$\begin{cases} x = 28 - y \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 28 - y \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

sostituisco nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x = 28 - y \\ 28 - y - 2y = 4 \end{cases}$$

sommo e porto il 28 dopo l'uguale:

$$\begin{cases} x = 28 - y \\ -3y = 4 - 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 28 - y \\ -3y = -24 \end{cases}$$

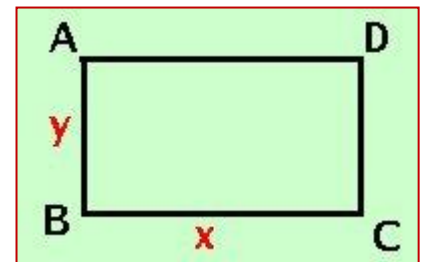
$$\begin{cases} x = 28 - y \\ -3y = -24 \end{cases}$$

nella seconda equazione divido entrambe i termini per -3:

$$\begin{cases} x = 28 - y \\ y = 8 \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y che ho trovato, nella prima equazione:

$$\begin{cases} x = 28 - 8 \\ y = 8 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 8 \end{cases}$$

Quindi:

$$\overline{BC} = x = 20 \text{ cm} \quad \overline{AB} = y = 8 \text{ cm}$$

Devo trovare l'area (base per altezza)

$$A_s = \overline{BC} \cdot \overline{AB} = 20 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 160 \text{ cm}^2$$

2) Calcolare il perimetro di un rettangolo sapendo che la base e' tripla dell'altezza e che, se si diminuiscono entrambe di 1 metro la superficie del rettangolo diminuisce di 15 m^2

Soluzione:

Come prima cosa costruiamo la figura

La prima relazione dice che la base e' tripla dell'altezza

$$\overline{BC} = 3 \overline{AB}$$

La seconda relazione dice che diminuendo di 1 sia la base che l'altezza l'area diminuisce di 15 m^2 Sviluppo:

Diminuendo di 1 sia la base che l'altezza l'area diminuisce di 15 m^2

Diminuendo di 1 la base $\overline{BC} - 1$
e diminuendo di 1 l'altezza $\overline{AB} - 1$

la nuova area (cioe' il loro prodotto) $(\overline{BC} - 1) \cdot (\overline{AB} - 1)$

e' uguale all'area precedente $= \overline{BC} \cdot \overline{AB}$

diminuita di $15 \text{ m}^2 - 15$

$$(\overline{BC} - 1) \cdot (\overline{AB} - 1) = \overline{BC} \cdot \overline{AB} - 15 \text{ m}^2$$

$$(\overline{BC} - 1) \cdot (\overline{AB} - 1) = \overline{BC} \cdot \overline{AB} - 15 \text{ m}^2$$

Per calcolare il perimetro devo trovare la misura dei lati, quindi pongo

$$\overline{BC} = x \quad \overline{AB} = y$$

sostituisco nella prima relazione

$$x = 3y$$

sostituisco nella seconda relazione

$$(x-1)(y-1) = xy - 15$$

$$xy - x - y + 1 = xy - 15$$

gli xy si eliminano tra loro e porto 1 dopo l'uguale

$$-x - y = -1 - 15$$

$$-x - y = -16$$

cambio di segno ed ottengo

$$x + y = 16$$

Metto a sistema le due relazioni:

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 16 \end{cases}$$

$$x + y = 16$$

sostituisco il valore della x della prima equazione nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x = 3y \\ 3y + y = 16 \end{cases}$$

$$3y + y = 16$$

Sommo:

$$\begin{cases} x = 3y \\ 4y = 16 \end{cases}$$

$$4y = 16$$

nella seconda equazione divido entrambe i termini per 4:

$$\begin{cases} x = 3y \\ y = 4 \end{cases}$$

$$y = 4$$

Sostituisco il valore della y che ho trovato, nella prima equazione:

$$\begin{cases} x = 3 \cdot 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$y = 4$$

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$$

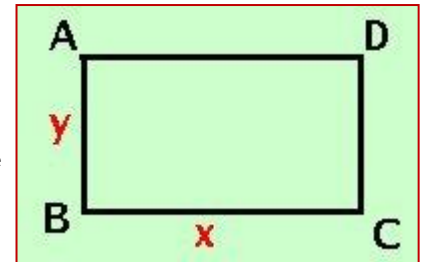
$$y = 4$$

Quindi:

$$\overline{BC} = x = 12 \text{ m} \quad \overline{AB} = y = 4 \text{ m}$$

Devo trovare il perimetro ($\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$)

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 4 \text{ m} + 12 \text{ m} + 4 \text{ m} + 12 \text{ m} = 32 \text{ m}$$



3) In un trapezio di area 150 m^2 l'altezza vale 5 metri e la base maggiore e' doppia della minore. Calcolare la misura delle due basi

Soluzione:

Come prima cosa costruiamo la figura

Dai Dati ho che l'altezza vale 5 m

$\overline{AH} = 5 \text{ m}$

La prima relazione dice che l'area e' 150 m^2 :

$$\frac{(\overline{BC} + \overline{AD}) \cdot \overline{AH}}{2} = 150 \text{ m}^2$$

La seconda relazione dice che la base maggiore e' doppia della minore

$$\overline{BC} = 2\overline{AD}$$

Devo trovare la misura delle basi, quindi

$$\overline{BC} = x \quad \overline{AD} = y$$

sostituisco nella prima relazione:

$$\frac{(x + y) \cdot 5}{2} = 150$$

Avendo sostituito le incognite tralascio di riportare la m di metro per semplicita'

moltiplico per 2 a destra e sinistra dell'uguale ed ottengo

$$(x + y) \cdot 5 = 300$$

$$5x + 5y = 300$$

Divido tutti i termini per 5 ed ottengo

$$x + y = 60$$

sostituisco nella seconda relazione

$$x = 2y$$

Metto a sistema le due relazioni:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \end{cases}$$

sostituisco il valore della x della seconda equazione nella prima equazione:

$$\begin{cases} 2y + y = 60 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \end{cases}$$

sommo:

$$\begin{cases} 3y = 60 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \end{cases}$$

nella prima equazione divido entrambe i termini per 3:

$$\begin{cases} y = 20 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y che ho trovato, nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = 20 \\ x = 2 \cdot 20 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \cdot 20 = 40 \end{cases}$$

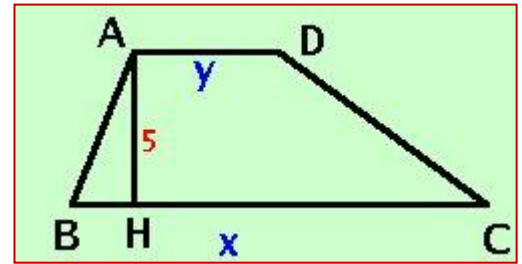
Ordino:

$$\begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 20 \end{cases}$$

Quindi:

$$\overline{BC} = x = 40 \text{ m} \quad \overline{AD} = y = 20 \text{ m}$$



Da notare che la figura non corrisponde alle proporzioni: se fai il compito prima in brutta copia quando lo copi in bella cerca di rispettare le proporzioni della figura

4) Il perimetro di un triangolo isoscele e' m. 58 e il lato supera di 4 il doppio della base. Determinare la misura dei lati e della base

Soluzione:

Come prima cosa costruiamo la figura

La prima relazione dice che il perimetro e' 58m

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 58$$

La seconda relazione dice il lato supera di 4 il doppio della base [sviluppo](#)

$$\overline{AB} = 4 + 2\overline{BC}$$

Devo trovare la misura dei lati e della base, quindi

$$\overline{AB} = \overline{AC} = x \quad \overline{BC} = y$$

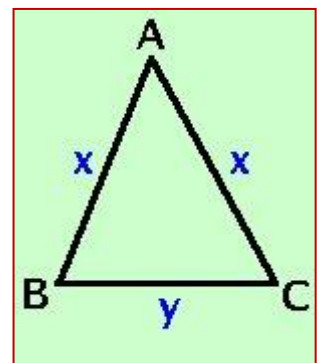
sostituisco nella prima relazione

$$x + y + x = 58$$

Avendo sostituito le incognite tralascio di riportare la m di metro per semplicita'

sommo ed ottengo

$$2x + y = 58$$



sostituisco nella seconda relazione

$$x = 4 + 2y$$

Metto a sistema le due relazioni:

$$\begin{cases} 2x + y = 58 \\ x = 4 + 2y \end{cases}$$

sostituisco il valore della x della seconda equazione nella prima equazione:

$$\begin{cases} 2(4 + 2y) + y = 58 \\ x = 4 + 2y \end{cases}$$

moltiplico:

$$\begin{cases} 8 + 4y + y = 58 \\ x = 4 + 2y \end{cases}$$

sommo le y e porto 8 dopo l'uguale:

$$\begin{cases} 5y = 58 - 8 \\ x = 4 + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = 50 \\ x = 4 + 2y \end{cases}$$

nella prima equazione divido entrambe i termini per 5:

$$\begin{cases} y = 10 \\ x = 4 + 2y \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y che ho trovato, nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = 10 \\ x = 4 + 2 \cdot 10 = 4 + 20 = 24 \end{cases}$$

Ordino:

$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 10 \end{cases}$$

Quindi:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = x = 24 \text{ m} \quad \overline{BC} = y = 10 \text{ m}$$

5) In un rombo la diagonale minore e' un terzo della maggiore e la somma delle diagonali vale m. 32. Calcolarne l'area

Soluzione:

Come prima cosa costruiamo la figura

La prima relazione dice che la diagonale minore e' un terzo della maggiore:

$$\overline{AC} = \frac{1}{3} \overline{BD}$$

La seconda relazione dice che la somma delle diagonali vale 32m

$$\overline{AC} + \overline{BD} = 32$$

Devo trovare l'area e quindi ho bisogno della misura delle diagonali

$$\overline{AC} = x \quad \overline{BD} = y$$

sostituisco nella prima relazione:

$$x = \frac{1}{3}y$$

moltiplico per 3 entrambe i termini

$$3x = y$$

ora sostituisco nella seconda relazione

$$x + y = 32$$

Metto a sistema le due relazioni:

$$\begin{cases} 3x = y \\ x + y = 32 \end{cases}$$

Ricavo la y dalla prima equazione (basta leggere l'uguaglianza a rovescio):

$$\begin{cases} y = 3x \\ x + y = 32 \end{cases}$$

sostituisco il valore della y della prima equazione nella seconda equazione:

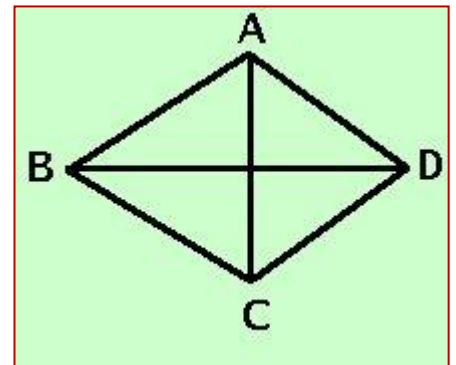
$$\begin{cases} y = 3x \\ x + 3x = 32 \end{cases}$$

sommo :

$$\begin{cases} y = 3x \\ 4x = 32 \end{cases}$$

nella seconda equazione divido entrambe i termini per 4:

$$\begin{cases} y = 3x \\ x = 8 \end{cases}$$



Sostituisco il valore della x che ho trovato, nella prima equazione:

$$\begin{cases} y = 3 \cdot 8 = 24 \\ x = 8 \end{cases}$$

Ordino:

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 24 \end{cases}$$

Quindi:

$$\overline{AC} = x = 8\text{m} \quad \overline{BD} = y = 24\text{m}$$

Devo trovare l'area (Diagonale per diagonale diviso 2):

$$A_s = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{24\text{m} \cdot 8\text{m}}{2} = 96\text{ m}^2$$

4. Problemi di secondo grado

Sono problemi la cui soluzione dipenderà da un'equazione di secondo grado; le soluzioni potranno essere entrambe accettabili, oppure ne sarà accettabile solo una od anche nessuna.

Caso per caso tenendo conto del testo dovrai decidere se una soluzione è accettabile oppure no; per farti un esempio una soluzione negativa legata ad una grandezza geometrica non ha senso

Anche qui possiamo distinguere fra problemi di tipo numerico e problemi di tipo geometrico, vediamo le caratteristiche nei particolari

- [problemi di tipo numerico](#)
- [problemi di tipo geometrico](#)

Faremo pochi esercizi perché in questi ultimi anni i problemi di secondo grado e di grado superiore sono stati piuttosto trascurati nei programmi ministeriali; d'altra parte è giusto tralasciare degli argomenti tecnici a favore di argomenti più teorici e generali.

a) Problemi di tipo numerico

Vediamo direttamente su alcuni esercizi come risolvere un problema di secondo grado di tipo numerico: di solito l'equazione risolvente di secondo grado viene suggerita direttamente dal problema stesso;

Per trovare l'equazione risolvente potrai usare indifferentemente una o due incognite, come ti sembrerà più semplice: se userai due incognite troverai un sistema: risolvendolo con il metodo di sostituzione troverai l'equazione risolvente che, nei problemi di secondo grado, sarà un'equazione di secondo grado

1) Trovare quel numero che, sommato al suo quadrato, dia come risultato 20

Soluzione:

Posso tranquillamente applicare il [vocabolario](#):

trovare un numero	numero = x
che, (il quale numero)	x
sommato al suo quadrato	$+ x^2$
dia come risultato 20	$= 20$

Otengo quindi l'equazione:

$$x + x^2 = 20$$

ordino come equazione di secondo grado

$x^2 + x - 20 = 0$ per risolvere, ecco i calcoli:

RisolviAMO l'equazione

$$x^2 + x - 20 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = -20$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1^2 - 4(1)(-20))}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il piu':

$$x_1 = \frac{-1 - 9}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-1 + 9}{2} = 4$$

Ho quindi le soluzioni

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 4$$

Ora devo verificare se le soluzioni sono accettabili

- Controllo la prima:
Sostituisco **-5** nella relazione di partenza
 $(-5)^2 + (-5) - 20 = 0$
 $25 - 5 - 20 = 0$
 $0 = 0$
x = -5 e' accettabile
- Controllo la seconda:
Sostituisco **4** nella relazione di partenza
 $(4)^2 + 4 - 20 = 0$
 $16 + 4 - 20 = 0$
 $0 = 0$
x = 4 e' accettabile

Abbiamo due soluzioni: $x = -5$ ed $x = 4$

Se invece il problema ti chiedeva "trovare quel numero **naturale** che..." allora dovevi scartare la soluzione $x = -5$

2) Determinare due numeri sapendo che la loro differenza vale 1 e che la somma dei loro quadrati vale 41

Soluzione:

Se la differenza fra i due numeri vale 1 potro' chiamarne uno x e l'altro $x+1$

Pongo la somma dei loro quadrati uguale a 41

$$x^2 + (x+1)^2 = 41$$

eseguo il quadrato

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 41 = 0$$

sommo ed ordino

$$2x^2 + 2x - 40 = 0$$

conviene dividere tutto per 2 ed ottengo

$$x^2 + x - 20 = 0$$

risolvo; ecco i calcoli:

RisolviAMO l'equazione

$$x^2 + x - 20 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = -20$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1^2 - 4(1)(-20))}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il più:

$$x_1 = \frac{-1 - 9}{2} = -5 \quad x_2 = \frac{-1 + 9}{2} = 4$$

Ho quindi le soluzioni

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 4$$

Ora devo verificare se le soluzioni sono accettabili

- Controllo la prima:
Sostituisco **-5** nella relazione di partenza
 $(-5)^2 + (-5 + 1)^2 = 41$
 $25 + 16 - 41 = 0$
 $0 = 0$
x = -5 e' accettabile
- Controllo la seconda:
Sostituisco **4** nella relazione di partenza
 $(4)^2 + (4 + 1)^2 - 20 = 0$
 $16 + 25 - 41 = 0$
 $0 = 0$
x = 4 e' accettabile

Abbiamo due soluzioni: $x = -5$ ed $x = 4$

3) Trovare due numeri sapendo che la loro somma vale 7 ed il loro prodotto vale 12. (e' il classico problema di applicazione delle equazioni di secondo grado; altri esercizi vedere anche i sistemi simmetrici)

Soluzione:

Trovare i due numeri x_1 e x_2 tali che

$$x_1 + x_2 = 7 \quad x_1 \cdot x_2 = 12$$

Facciamo riferimento alla forma dell'equazione di secondo grado

$$x^2 - sx + p = 0$$

con s e p somma e prodotto delle radici

$$s = x_1 + x_2 = 7$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = 12$$

Otteniamo l'equazione

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

per trovare i due numeri risolviamo l'equazione

applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -7$$

$$c = 12$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{7 \pm 1}{2} =$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il più:

$$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4$$

quindi i due numeri cercati sono (cerco sempre di ordinarli chiamando x_1 il minore)

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 4$$

Puoi verificare che hai fatto giusto facendone semplicemente la somma ed il prodotto

4) Considerate un numero di due cifre: il prodotto delle due cifre vale 40; se si invertono le cifre il numero diminuisce di 27. Trovare il numero

Soluzione:

Devo trovare due cifre, la cifra delle decine e quella delle unità ne chiamerò una x e l'altra y , cioè il numero da trovare sarà

$$\text{numero} = 10x + y$$

Ho due relazioni

1. Il prodotto delle cifre vale 40
 $xy = 40$
2. se si invertono le cifre il numero diminuisce di 27
cioè se scrivo $10y+x$ questo vale 27 meno di $10x+y$
 $10y+x = 10x+y-27$

faccio il sistema:

$$\begin{cases} xy = 40 \\ 10y + x = 10x + y - 27 \end{cases}$$

Riduco a forma normale:

$$\begin{cases} xy = 40 \\ 9y - 9x = -27 \end{cases}$$

divido la seconda per -3:

$$\begin{cases} xy = 40 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

è un sistema di secondo grado: risolvo con il metodo di sostituzione: ricavo la x dalla seconda equazione e ne sostituisco il valore nella prima:

$$\begin{cases} (3+y)y = 40 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

calcolo:

$$\begin{cases} 3y + y^2 = 40 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 3y - 40 = 0 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

risolvo la prima equazione; ecco i calcoli:

Risolvi l'equazione

$$x^2 + 3y - 40 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$c = -40$$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il più:

$$y_1 = \frac{-3 - 13}{2} = -8 \quad y_2 = \frac{-3 + 13}{2} = 5$$

Ho quindi le soluzioni

$$y_1 = -8$$

$$y_2 = +5$$

essendo il numero cercato un numero naturale potro' considerare valida solamente la soluzione $y = 5$; la sostituisco nel sistema ed ottengo:

$$\begin{cases} y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 5 = 8 \end{cases}$$

quindi il mio numero e':

$$10x + y = 10 \cdot 8 + 5 = 85$$

b) Problemi di secondo grado di tipo geometrico

Nei problemi di tipo geometrico vedremo che abbiamo due possibilita':

- L'equazione risolvente di secondo grado viene data esplicitamente dal testo del problema; in tal caso puoi procedere normalmente
- L'equazione risolvente di secondo grado non viene data esplicitamente dal testo del problema; in tal caso devi trovare un teorema che colleghi i dati che hai ed usarlo come equazione risolvente

1) L'area di un rettangolo vale 80 cm^2 Determinare le dimensioni del rettangolo sapendo che la differenza fra la base e l'altezza e' 11 cm

Soluzione:

Costruiamo prima la figura e scriviamo per esteso tutte le relazioni che abbiamo

L'area vale 80 cm^2

lo traduco come

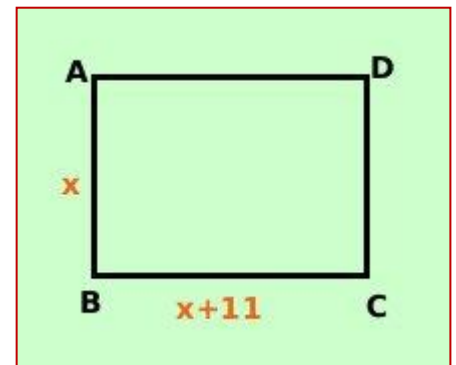
$$\overline{BC} \cdot \overline{AB} = 80 \text{ cm}^2$$

La differenza fra la base e l'altezza e' 11 cm

la traduco come

$$\overline{BC} - \overline{AB} = 11 \text{ cm}$$

Potremmo farlo con un sistema sostituendo x ed y alle grandezze incognite; facciamo con una sola incognita: se la differenza fra la base e l'altezza vale 11 allora la base e' 11 cm piu' dell'altezza



Nella seconda relazione porto AB dall'altra parte dell'uguale

$$\overline{BC} = \overline{AB} + 11 \text{ cm}$$

Pongo

$$\overline{AB} = x \quad \overline{BC} = x + 11$$

sostituisco nella relazione dell'area ed ottengo l'equazione risolvente

$$(x + 11) \cdot x = 80$$

$$x^2 + 11x = 80$$

$$x^2 + 11x - 80 = 0$$

Risolvero l'equazione di secondo grado; ecco i calcoli:

Risolvi l'equazione

$$x^2 + 11x - 80 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 11$$

$$c = -80$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4(1)(-80)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 320}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{441}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm 21}{2}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il più:

$$x_1 = \frac{-11 - 21}{2} = -16 \quad x_2 = \frac{-11 + 21}{2} = 5$$

Ho quindi le soluzioni

$$x_1 = -16 \quad x_2 = +5$$

Siccome devo trovare la misura x dell'altezza accetto solo la radice positiva (non esistono segmenti negativi)

$$x = +5$$

$$\overline{AB} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = x + 11 = 16 \text{ cm}$$

2) In un rettangolo la differenza fra il doppio dell'altezza e la misura della base vale 18 cm. La misura della diagonale vale 45 cm. Determinare l'area del rettangolo

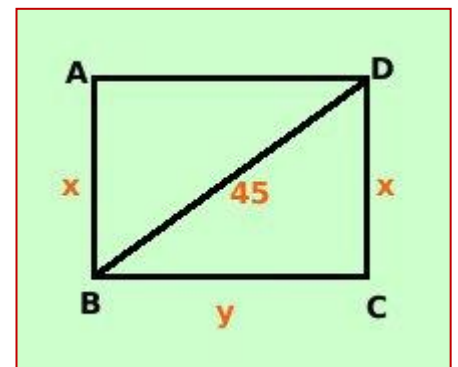
Soluzione:

Costruiamo prima la figura e scriviamo per esteso tutte le relazioni che abbiamo

La differenza fra il doppio dell'altezza e la misura della base vale 18 cm

Posso tranquillamente applicare il [vocabolario](#):

la differenza fra il doppio dell'altezza	$2AB -$
e la misura della base	BC
vale 18 cm	$= 18 \text{ cm}$



Otengo quindi la relazione:

$$2\overline{AB} - \overline{BC} = 18 \text{ cm}$$

La misura della diagonale vale 45 cm

la traduco come

$$\overline{BD} = 45 \text{ cm}$$

Stavolta lo facciamo con un sistema sostituendo x ed y alle grandezze incognite $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$

Con due incognite abbiamo bisogno di due relazioni: la prima va bene, per la seconda dobbiamo trovare un teorema che includa tutti i dati (comprese le incognite messe)

Viene immediato applicare il teorema di Pitagora al triangolo BCD

$$\overline{AB} = x$$

$$\overline{BC} = y$$

Come prima relazione ottengo:

$$2x - y = 18$$

Per la seconda relazione applico il teorema di Pitagora al triangolo BCD ricordando che anche $\overline{BD} = x$

$$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2$$

Sostituisco i dati e le incognite alle lettere

$$x^2 + y^2 = 45^2$$

ottengo quindi il sistema di [secondo grado](#):

$$\begin{cases} 2x - y = 18 \\ x^2 + y^2 = 2025 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2025 \end{cases}$$

ricavo la y dalla prima relazione e ne sostituisco il valore nella seconda:

$$\begin{cases} -y = -2x + 18 \\ x^2 + y^2 = 2025 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2025 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 18 \\ x^2 + y^2 = 2025 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 18 \\ x^2 + (2x - 18)^2 = 2025 \end{cases}$$

Calcolo il quadrato:

$$\begin{cases} y = 2x - 18 \\ x^2 + 4x^2 - 72x + 324 = 2025 \end{cases}$$

sommo ed ottengo:

$$\begin{cases} y = 2x - 45 \\ 5x^2 - 72x - 1701 = 0 \end{cases}$$

La seconda e' un'equazione di secondo grado, la risolvo; ecco i calcoli:

Risolvi l'equazione

$$5x^2 - 72x - 1701 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$$

Abbiamo:

$$a = 5$$

$$b = -72 \quad b/2 = -36$$

$$c = -1701$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{(11^2 - 4(1)(-80))}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 + (5)(-1701)}}{5}$$

$$= \frac{36 \pm \sqrt{1296 + 8505}}{5} =$$

$$= \frac{36 \pm \sqrt{9801}}{5} =$$

$$= \frac{36 \pm 99}{5}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il piu':

$$x_1 = \frac{36 + 99}{5} = 27 \quad x_2 = \frac{36 - 99}{5} = -63/5$$

Ho quindi le soluzioni

$$x_1 = 27 \quad x_2 = -63/5$$

Siccome devo trovare la misura x dell'altezza accetto solo la radice positiva. Sostituisco il valore 27 nel sistema:

$$\begin{cases} y = 2(27) - 18 = 54 - 18 = 36 \\ x = 27 \end{cases}$$

$$x = 27$$

Quindi ottengo:

$$\overline{AB} = 27 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = 36 \text{ cm}$$

e l'area sara' data da

$$\text{Area Rettangolo} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 27 \text{ cm} \cdot 36 \text{ cm} = 972 \text{ cm}^2$$

5. Problemi di grado superiore

Sono problemi la cui soluzione dipendera' da un'equazione di grado superiore al secondo; naturalmente, nei licei e nelle scuole superiori l'equazione trovata dovra' essere dei tipi che si sappiano risolvere con i metodi che trovate su questo sito.

Per la validita' o meno delle soluzioni dovremo sempre seguire i criteri gia' visti nei problemi di secondo grado

Vediamone un semplice esempio:

Problema:

La somma di due numeri naturali aumentata del loro prodotto vale 11. Trovare i due numeri sapendo che la somma dei loro quadrati diminuita del prodotto fra i numeri vale 7

Soluzione:

Siccome devo trovare due numeri ne chiamero' uno x e l'altro y, cioe' impostero' un sistema

$$\text{primo numero} = x$$

$$\text{secondo numero} = y$$

Ho due relazioni

- la somma dei due numeri aumentata del loro prodotto vale 11

$$x + y + xy = 11$$

- la somma dei quadrati diminuita del loro prodotto vale 7

$$x^2 + y^2 - xy = 7$$

faccio il sistema:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 - xy = 7 \end{cases}$$

E' di [quarto grado](#), ma come sistema e' un sistema [simmetrico](#) quindi di un tipo che sappiamo risolvere

Nella seconda equazione applico la prima [formula di Waring](#):

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ (x + y)^2 - 2xy - xy = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ (x + y)^2 - 3xy = 7 \end{cases}$$

Pongo

$$(x+y) = s \quad xy = p$$

Otengo:

$$\begin{cases} s + p = 11 \\ s^2 - 3p = 7 \end{cases}$$

Ricavo p dalla prima equazione e sostituisco nella seconda:

$$\begin{cases} p = 11 - s \\ s^2 - 3(11 - s) = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 11 - s \\ s^2 + 3s - 33 - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 11 - s \\ s^2 + 3s - 40 = 0 \end{cases}$$

La seconda e' un'equazione di secondo grado, la risolvo; ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$s^2 + 3s - 40 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$c = -40$$

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$$

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il piu':

$$s_1 = \frac{-3 - 13}{2} = -8 \quad x_2 = \frac{-3 + 13}{2} = 5$$

Ho quindi le soluzioni

$$s_1 = -8$$

$$s_2 = +5$$

ora devo sostituire i valori trovati nel sistema e trovo i due sistemi

I)

$$\begin{cases} p_1 = 11 - (-8) = 19 \\ s_1 = -8 \end{cases}$$

II)

$$\begin{cases} p_2 = 11 - 5 = 6 \\ s_2 = 5 \end{cases}$$

I. Risolviamo il primo: devo sostituire ad s (x+y) ed a p xy

$$\begin{cases} p = 19 \\ s = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 19 \\ x + y = -8 \end{cases}$$

Devo trovare due numeri di cui conosco [la somma ed il prodotto](#); applico la formula: $t^2 - st + p = 0$

$$t^2 + 8t + 19 = 0$$

Risolvere l'equazione di secondo grado in t ma essendo il discriminante minore di zero non ho radici reali; ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$t^2 + 8t - 19 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 8$$

$$c = -19$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(-19)}}{2(1)}$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 76}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Essendo il termine sotto radice (discriminante) minore di zero l'equazione non ha radici reali

II. Risolviamo il secondo: devo sostituire ad s ($x+y$) ed a p xy

$$\begin{cases} p = 6 \\ s = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Devo trovare due numeri di cui conosco la somma ed il prodotto; applico la formula: $t^2 - st + p = 0$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

Risolvere l'equazione di secondo grado in t ; ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 6$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il più:

$$t_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2 \quad t_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Ho quindi le soluzioni

$$t_1 = 2 \quad t_2 = 3$$

Otengo quindi le due soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

quindi il nostro problema ha solamente due soluzioni reali

D. Sistemi di equazioni

1. Definizione

Un sistema è un insieme di equazioni che valgono contemporaneamente

Sarebbe a dire che tutte le equazioni devono avere contemporaneamente le stesse soluzioni

Definiamo grado di un sistema il prodotto dei gradi delle equazioni che lo costituiscono:
esempio:

$$\begin{cases} x^3 + xy = 4 \\ x^2 + xy + 4y^2 = 5 \end{cases}$$

e' un sistema di sesto grado (il polinomio che e' associato alla prima equazione ha [grado](#) tre e quello associato alla seconda ha grado 2)

Cominciamo dai piu' semplici:
i sistemi di primo grado.

2. [Sistemi di primo grado](#)

Le equazioni che li compongono sono tutte di primo grado

Possiamo distinguere i sistemi di primo grado in

- [Sistema di due equazioni in due incognite](#)
- [Sistema di tre equazioni in tre incognite](#)
- [Sistema di n equazioni in n incognite](#)
- [Sistema di k equazioni in n incognite](#)

a) [Sistema di primo grado di due equazioni in due incognite](#)

Risolvere un sistema significa trovare la coppia di valori x e y che, sostituita alle incognite, rende le equazioni delle identita'

Come prima cosa bisogna ridurre il sistema in [forma normale](#), cioe' mettere i termini con la x e con la y prima dell'uguale ed i termini noti dopo l'uguale

- [Soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite](#)
- [Sistema possibile, impossibile, indeterminato](#)
- [Significato geometrico di un sistema](#)

(1) [Soluzione di un sistema di primo grado di due equazioni a due incognite](#)

Nelle prossime pagine vedremo la soluzione di un sistema (sempre lo stesso) con i vari metodi noti; i piu' usati per due equazioni con due incognite sono il metodo di sostituzione ed il metodo di addizione, il metodo di Cramer offre invece un metodo che sara' la base per risolvere anche sistemi di piu' equazioni a piu' incognite.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

- [Metodo di sostituzione](#)
- [Metodo di addizione](#)
- [Metodo di confronto](#)
- [Metodo di Cramer](#)

(a) [Metodo di sostituzione](#)

Se hai bisogno di una spiegazione [piu' approfondita](#), leggi a fine paragrafo.

Dobbiamo risolvere:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

In entrambe le equazioni la x e la y devono avere lo stesso valore, allora posso ricavare da una delle due equazioni il valore della x (o della y) e sostituirla alla x (alla y) nell'altra equazione.

In questo modo ottengo un'equazione in una sola incognita che so risolvere.

Sostituire x od y e' indifferente e dipende dal sistema: nel nostro caso conviene ricavare la y dalla seconda equazione e sostituirla nella prima.

Io faro' tutti i passaggi; tu puoi abbreviare

Isolo la y nella seconda equazione:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -y = 7 - 3x \end{cases}$$

cambio di segno:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ y = -7 + 3x \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y nella prima equazione. Senza scrivere la seconda equazione si mette una linea per indicare che c'e':

$$\begin{cases} 2x + 3(-7 + 3x) = 12 \\ \text{-----} \end{cases}$$

Eseguo i calcoli:

$$\begin{cases} 2x - 21 + 9x = 12 \\ \text{-----} \end{cases}$$

porto il numero dopo l'uguale:

$$\begin{cases} 2x + 9x = 12 + 21 \\ \text{-----} \end{cases}$$

Sommo:

$$\begin{cases} 11x = 33 \\ \text{-----} \end{cases}$$

Ricavo x dividendo per 11 prima e dopo l'uguale

$$\begin{cases} 11x/11 = 33/11 \\ \text{-----} \end{cases}$$

Trovo la soluzione ed ora riscrivo la seconda equazione:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -7 + 3x \end{cases}$$

Nell'equazione di sotto al posto di x sostituisco il valore trovato:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -7 + 3 \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -7 + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Verifica

Ora controllo se ho fatto giusto sostituendo nel sistema di partenza ad x ed y i valori trovati:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \\ 3 \cdot 3 - 2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 + 6 = 12 \\ 9 - 2 = 7 \end{cases}$$

Ho ottenuto delle uguaglianze vere quindi ho fatto tutto giusto.

Per risolvere un sistema col metodo di sostituzione:

- ricavo la variabile da una delle due equazioni (la piu' facile) e la sostituisco nell'altra equazione
- questa diventa ad una sola incognita e la risolvo.
- Una volta trovata l'incognita la sostituisco nella prima equazione e trovo il valore dell'altra incognita

Questo metodo viene usato preferibilmente quando abbiamo equazioni letterali, ma bisogna decidere caso per caso fra questo ed il metodo di Cramer.

Metodo di sostituzione - Approfondimento

Risolviamo il sistema generico:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

ove a, b, c, d, e, f sono numeri dati

isolo il termine con x nella prima equazione:

$$\begin{cases} ax = -by + c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

ricavo la x:

$$\begin{cases} x = (-by + c)/a \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Sostituisco nella seconda equazione alla x il valore trovato:

$$\begin{cases} x = (-by + c)/a \\ d(-by + c)/a + ey = f \end{cases}$$

Al posto della prima equazione metto una linea. Nella seconda multiplico:

$$\begin{cases} \text{---} \\ (-bdy + cd)/a + ey = f \end{cases}$$

ora faccio il minimo comune multiplo:

$$\begin{cases} \text{---} \\ \frac{-bdy + cd + aey}{a} = \frac{af}{a} \end{cases}$$

Tolgo i denominatori:

$$\begin{cases} \text{---} \\ -bdy + cd + aey = af \end{cases}$$

termini con y prima dell'uguale (metto prima i positivi), termini senza y dopo l'uguale:

$$\begin{cases} \text{---} \\ aey - bdy = af - cd \end{cases}$$

metto in evidenza y:

$$\begin{cases} \text{---} \\ y(ae - bd) = af - cd \end{cases}$$

Ricavo y dividendo il termine dopo l'uguale per il coefficiente della y:

$$\begin{cases} \text{---} \\ y = \frac{af - cd}{ae - bd} \end{cases}$$

Devo sostituire questo valore nell'equazione sopra (rappresentata dalla linea). Da questo punto anche se e' un errore, per semplicita', ometto la parentesi graffa:

$$x = \frac{-by + c}{a}$$

Sostituisco:

$$x = \frac{-b \frac{af - cd}{ae - bd} + c}{a}$$

Moltiplico sopra:

$$x = \frac{\frac{-abf + bcd}{ae - bd} + c}{a}$$

minimo comune multiplo sopra:

$$x = \frac{-abf + bc + ace - bcd}{ae - bd}$$

Sommo e scrivo prima i positivi:

$$x = \frac{ace - abf}{ae - bd}$$

Moltiplico il numeratore per l'inverso del denominatore:

$$x = \frac{ace - abf}{ae - bd} \cdot \frac{1}{a}$$

Raccolgo a al numeratore per semplificarlo con la a al denominatore:

$$x = \frac{a(ce - bf)}{ae - bd} \cdot \frac{1}{a}$$

Semplifico:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Quindi la soluzione del sistema sarà:

$$\begin{cases} x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \\ y = \frac{af - cd}{ae - bd} \end{cases}$$

Se vuoi risolvere un sistema puoi anche usare questa come formula risolutiva

(b) Metodo di addizione

Se hai bisogno di una spiegazione [piu' approfondita](#), leggi a fine paragrafo

Dobbiamo risolvere:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

Nel metodo di addizione e sottrazione cerco di rendere uguale e di segno contrario nelle due equazioni il termine che contiene la y (successivamente farò la stessa cosa per la x). Per farlo moltiplico le equazioni (è possibile farlo per il [secondo principio di equivalenza](#) delle equazioni).

Moltiplico la seconda equazione per 3 in modo da avere lo stesso termine in y ma col segno cambiato:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$$

Ora sommo in verticale e mi sparisce il termine in y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 12 \\ 9x - 3y = 21 \\ \hline 11x = 33 \end{array}$$

Divido per 11 da entrambe le parti:

$$\frac{11}{11}x = \frac{33}{11}$$

e trovo la x

$$x = 3$$

Per trovare la y devo mandare via la x quindi moltiplico la prima equazione per +3 e la seconda per -2. In questo modo le x diventano uguali e di segno contrario:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 & (+3) \\ 3x - y = 7 & (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 9y = 36 \\ -6x + 2y = -14 \end{cases}$$

Ora sommo in verticale e mi sparisce il termine in x:

$$\begin{cases} 6x + 9y = 36 \\ -6x + 2y = -14 \end{cases}$$

$$\text{-----}$$

$$11y = 22$$

Divido per 11 da entrambe le parti:

$$\frac{11}{11}y = \frac{22}{11}$$

e trovo la y

$$y = 2$$

Quindi il risultato e':

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ora dovremmo verificare il sistema ma l'abbiamo già fatto dopo la soluzione col metodo di sostituzione.

Per risolvere un sistema col metodo di addizione:

- moltiplico una od entrambe le equazioni in modo da avere i termini con la x uguali e di segno contrario
- sommo le equazioni: ottengo un'equazione con la sola y e la risolvo; trovo la y
- moltiplico una od entrambe le equazioni in modo da avere i termini con la y uguali e di segno contrario
- sommo le equazioni: ottengo un'equazione con la sola x e la risolvo; trovo la x
- Scrivo la parentesi graffa con la x al primo posto e la y al secondo posto

Per la sua immediatezza questo metodo e' il più usato quando le equazioni sono numeriche

Qualche insegnante preferisce spiegare il metodo detto di addizione e sottrazione: l'unica differenza con questo spiegato e' che moltiplichi sempre per un numero positivo dopodiché se i termini sono uguali ma di segno contrario fai la somma mentre se sono uguali e con lo stesso segno devi fare la differenza termine a termine.

Se non stai molto attento, e' facile sbagliare un segno.

Se vuoi vedere un [esempio](#) con lo stesso sistema che abbiamo appena risolto, eccolo:

Esempio: Metodo di addizione e sottrazione

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

Nel metodo di addizione e sottrazione cerco di rendere uguale nelle due equazioni il termine che contiene la y (successivamente farò la stessa cosa per la x).

Per farlo moltiplico le equazioni (e' possibile farlo per il [secondo principio di equivalenza](#) delle equazioni)

Moltiplico la seconda equazione per 3 in modo da avere lo stesso termine in y ma col segno cambiato (questa parte e' identica al metodo di addizione):

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$$

Ora sommo in verticale e mi sparisce il termine in y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$$

$$\text{-----}$$

$$11x = 33$$

Divido per 11 da entrambe le parti:

$$\frac{11}{11}x = \frac{33}{11}$$

e trovo la x

$$x = 3$$

Per trovare la y devo mandare via la x quindi moltiplico la prima equazione per 3 e la seconda per 2. In questo modo le x diventano uguali (questa parte e' diversa rispetto al metodo di addizione):

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 & (3) \\ 3x - y = 7 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 9y = 36 \\ 6x - 2y = 14 \end{cases}$$

Ora sottraggo in verticale e mi sparisce il termine in x:

$$\begin{cases} 6x + 9y = 36 \\ - \quad - \quad - \\ 6x - 2y = 14 \end{cases}$$

$$// \quad 11y = 22$$

Divido per 11 da entrambe le parti:

$$\frac{11}{11}y = \frac{22}{11}$$

e trovo la y

$$y = 2$$

Quindi il risultato e':

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Come hai visto non c'e' una gran differenza dal sistema precedente

Metodo di addizione - Approfondimento:

Risolviamo il sistema generico:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

ove a, b, c, d, e, f sono numeri dati

Devo rendere uguali i termini con la x (anche qui si puo' parlare di minimo comune multiplo)

Moltiplico la prima equazione per d e la seconda per -a:

$$\begin{cases} adx + bdy = cd & (d) \\ -adx - aey = -af & (-a) \end{cases}$$

Sommo termine a termine:

$$\begin{cases} adx + bdy = cd \\ -adx - aey = -af \end{cases}$$

$$// \quad bdy - aey = cd - af$$

Metto in evidenza y

$$y(bd - ae) = cd - af$$

Ricavo y:

$$y = \frac{cd - af}{bd - ae}$$

Cambiando di segno sopra e sotto e' equivalente a scrivere:

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Di solito, nelle lettere, si cerca di mettere prima le prime lettere dell'alfabeto, inoltre il primo termine si cerca sempre di farlo diventare positivo (in questo modo posso non scrivere un segno)

Ora devo rendere uguali i termini con la y; moltiplico sopra per e e sotto per b:

$$\begin{cases} aex + bey = ce & (e) \\ -bdx - bey = -bf & (-b) \end{cases}$$

Sommo termine a termine:

$$\begin{cases} aex + bey = ce \\ -bdx - bey = -bf \end{cases}$$

$$aex - bdx // = ce - bf$$

Metto in evidenza x

$$x(ae - bd) = ce - bf$$

Ricavo x:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Quindi il risultato finale e':

$$\begin{cases} x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \\ y = \frac{af - cd}{ae - bd} \end{cases}$$

(c) Metodo di confronto

Se hai bisogno di una spiegazione [piu' approfondita](#), leggi a fine paragrafo.

E' il metodo meno utilizzato, ma talvolta viene usato

Dobbiamo risolvere:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

Nel metodo di confronto ricavo da entrambe le equazioni la x poi metto a confronto i risultati

Esplicito i termini con la x:

$$\begin{cases} 2x = 12 - 3y \\ 3x = 7 + y \end{cases}$$

Ricavo le x

$$\begin{cases} x = \frac{12-3y}{2} \\ x = \frac{7+y}{3} \end{cases}$$

Come prima equazione uguaglio i risultati, come seconda scelgo una qualsiasi delle due equazioni (la seconda mi sembra piu' facile):

$$\begin{cases} \frac{7+y}{3} = \frac{12-3y}{2} \\ x = \frac{7+y}{3} \end{cases}$$

Sopra m.c.m. = 6 Sotto metto una linea:

$$\begin{cases} \frac{14 + 2y}{6} = \frac{36 - 9y}{6} \\ \text{-----} \end{cases}$$

Tolgo il denominatore:

$$\begin{cases} 14 + 2y = 36 - 9y \\ \text{-----} \end{cases}$$

Porto i termini con y prima dell'uguale e quelli noti dopo l'uguale

$$\begin{cases} 9y + 2y = 36 - 14 \\ \text{-----} \end{cases}$$

Sommo:

$$\begin{cases} 11y = 22 \\ \text{-----} \end{cases}$$

Ricavo la y dividendo entrambe i membri per 11

Riscrivo la seconda equazione:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{7+y}{3} \end{cases}$$

Sostituisco il valore 2 alla y nella seconda equazione

Potresti anche riprendere le equazioni di partenza, eguagliare le y e rifare tutto da capo, ma chi te lo fa fare?

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{7+2}{3} \end{cases}$$

Risolve:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Metto x al primo posto ed y al secondo:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ora dovremmo verificare il sistema ma l'abbiamo già fatto dopo la soluzione col metodo di sostituzione

Per risolvere un sistema col metodo di confronto

- Ricavo da entrambe le equazioni la x (oppure la y)
- Come prima equazione eguaglio le espressioni trovate. Come seconda scelgo una delle due (la più facile)
- Risolvo la prima equazione
- Sostituisco il risultato nella seconda equazione e trovo il valore dell'altra variabile
- Scrivo la parentesi graffa con la x al primo posto e la y al secondo posto

Metodo di confronto - Approfondimento

Risolviamo il sistema generico:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

ove a, b, c, d, e, f sono numeri dati.

Isolo il termine con x nelle due equazioni:

$$\begin{cases} ax = c - by \\ dx = f - ey \end{cases}$$

ricavo la x da entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} x = (c - by)/a \\ x = (f - ey)/d \end{cases}$$

Eguaglio i valori delle x trovati e come seconda equazione scelgo una delle due:

$$\begin{cases} \frac{c - by}{a} = \frac{f - ey}{d} \\ x = \frac{c - by}{a} \end{cases}$$

Sopra faccio il minimo comune multiplo, sotto metto una linea al posto dell'equazione:

$$\begin{cases} \frac{cd - bdy}{ad} = \frac{af - aey}{ad} \\ \hline \end{cases}$$

Elimino i denominatori e porto i termini con l'incognita prima dell'uguale e quelli noti dopo l'uguale:

$$\begin{cases} aey - bdy = af - cd \\ \hline \end{cases}$$

Ricavo la y e riscrivo l'equazione al posto della linea:

$$\begin{cases} y = \frac{af - cd}{ae - bd} \\ x = \frac{c - by}{a} \end{cases}$$

Sostituisco il valore trovato nella seconda equazione e da questo punto, anche se c'è un errore, per semplicità, ometto la parentesi graffa:

$$x = \frac{c - by}{a}$$

Sostituisco:

$$x = \frac{c - b \frac{af - cd}{ae - bd}}{a}$$

Moltiplico sopra per -b (così resta il segno +):

$$x = \frac{c + \frac{-abf + bcd}{ae - bd}}{a}$$

minimo comune multiplo sopra:

$$x = \frac{\frac{ace - bcd - abf + bcd}{ae - bd}}{a}$$

Sommo e scrivo prima i positivi:

$$x = \frac{\frac{ace - abf}{ae - bd}}{a}$$

Moltiplico il numeratore per l'inverso del denominatore:

$$x = \frac{ace - abf}{ae - bd} \cdot \frac{1}{a}$$

Raccolgo a al numeratore per semplificarlo con la a al denominatore:

$$x = \frac{a(ce - bf)}{ae - bd} \cdot \frac{1}{a}$$

Semplifico:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Quindi, riscrivendo la graffa, la soluzione del sistema sarà:

$$\begin{cases} x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \\ y = \frac{af - cd}{ae - bd} \end{cases}$$

(d) Metodo di Cramer

Se hai bisogno anche della [dimostrazione](#) del metodo, leggi a fine paragrafo ##

Dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

Nel metodo di Cramer scrivo i coefficienti del sistema in una tabella (matrice):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

La prima colonna contiene i coefficienti della x, la seconda i coefficienti della y e la terza i termini noti

In entrambe le soluzioni considererò al denominatore il seguente numero detto determinante (ho preso le prime due colonne)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

È un numero e per [calcolarlo](#) (vedi fine paragrafo**) devo fare il prodotto fra il primo e l'ultimo termine meno il prodotto fra il secondo ed il terzo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 = -2 - 9 = -11$$

Per trovare la x devo prendere il determinante considerato, cancellare la colonna delle x e al suo posto mettere i termini noti

$$\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) - 3 \cdot 7 = -12 - 21 = -33$$

Per calcolare il valore della x devo scrivere al denominatore il determinante ottenuto dalle prime due colonne ed al numeratore cancello la colonna delle x ed al suo posto metto i termini noti

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{12 \cdot (-1) - 3 \cdot 7}{2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3} = \frac{-12 - 21}{-2 - 9} = \frac{-33}{-11} = 3$$

Per calcolare la y metto al denominatore le prime due colonne mentre al numeratore cancello la colonna delle y e ci metto i termini noti

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot (7) - 12 \cdot 3}{2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3} = \frac{14 - 36}{-2 - 9} = \frac{-22}{-11} = 2$$

Quindi ottengo:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Per risolvere un sistema col metodo di Cramer

- Scrivo la matrice del sistema
- Calcolo il determinante delle prime due colonne
- per la x scrivo al denominatore il determinante trovato ed al numeratore riscrivo il determinante mettendo al posto della colonna delle x i termini noti
- per la y scrivo al denominatore il determinante trovato ed al numeratore riscrivo il determinante mettendo al posto della colonna delle y i termini noti
- Scrivo la parentesi graffa con la x al primo posto e la y al secondo posto

E' uno dei metodi piu' utilizzati soprattutto per i sistemi letterali

Metodo di Cramer - Dimostrazione

Cerchiamo di capire come si arriva al metodo di Cramer

Dobbiamo partendo dal sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

arrivare alla soluzione:

$$\begin{cases} x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \\ y = \frac{af - cd}{ae - bd} \end{cases}$$

Notiamo che nelle soluzioni compaiono solo i coefficienti numerici del sistema; li scrivo in ordine come sono

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Ora al denominatore sia della x che della y compare il valore $ae - bd$ formato dai valori delle prime due colonne: allora estraggo le prime due colonne

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

perche' questo diventi uguale ad $ae - bd$ dovro' definirlo come prodotto fra il primo e il quarto termine meno il secondo per il terzo

$$\begin{matrix} a & \text{primo termine} & b & \text{secondo termine} \\ d & \text{terzo termine} & e & \text{quarto termine} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a \cdot e - b \cdot d = ae - bd$$

Ora passiamo a controllare la x: al numeratore il risultato vale $ce - bf$ quindi coinvolge la seconda e la terza colonna

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Pero' se calcoliamo come prima ci viene il segno sbagliato:

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = b \cdot f - c \cdot e = bf - ce \text{ (invece di } ce - bf)$$

Ma per avere il segno giusto basta scambiare le colonne

$$\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = c \cdot e - b \cdot f = ce - bf$$

Allora per avere il segno giusto diciamo che prendiamo il determinante delle prime due colonne e eliminiamo la colonna delle x ed al suo posto mettiamo la colonna dei termini noti

Nel nostro caso basterebbe dire che cambio segno, pero' siccome questo metodo sara' usato anche con tre, quattro,... n equazioni quello che ho scritto andra' bene in generale

E il valore della x sara' dato da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{c \cdot e - b \cdot f}{a \cdot e - b \cdot d} = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Lo stesso ragionamento varra' per la y: al denominatore mettero' le prime due colonne ed al numeratore eliminerò la colonna delle y ed al suo posto mettero' la colonna dei termini noti

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{a \cdot f - c \cdot d}{a \cdot e - b \cdot d} = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

**** Calcolo del determinante**

Dato il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

a e' al primo posto

b e' al secondo posto

c e' al terzo posto

d e' al quarto posto

Per calcolarlo devo moltiplicare il primo termine per il quarto meno il secondo per il terzo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c = ad - bc$$

(2) Sistema possibile, impossibile, indeterminato

E' lo stesso discorso che ho fatto nelle equazioni: Come in tutti i linguaggi anche nel linguaggio della matematica posso dire frasi vere, posso dire bugie e posso dire cose inutili: questo si riflette sui sistemi relativi a quelle frasi che potranno essere possibili, impossibili od indeterminati. Vediamo di spiegarci meglio con qualche esempio:

- sistema possibile
- sistema impossibile
- sistema indeterminato

Riassumendo: posso schematizzare nel modo seguente

$x = \text{numero}$	$y = \text{numero}$	Sistema possibile
$x = \text{numero}/0$	$y = \text{numero}/0$	Sistema impossibile
$x = 0/0$	$y = 0/0$	Sistema indeterminato

Quando ho un sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

si puo' dire anche senza risolverlo se e' possibile, impossibile od indeterminato osservandone i coefficienti:

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	sistema possibile
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	sistema impossibile
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	sistema indeterminato

Sistema possibile

Il sistema e' possibile se le sue equazioni sono compatibili nel senso che non si contraddicono ne' si ripetono

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

La somma di due numeri e' 3 e la loro differenza e' 1

Con un po' di logica dico che i numeri sono 2 e 1:

infatti $2 + 1 = 3$ e $2 - 1 = 1$ e le due equazioni sono compatibili

Il risultato e':

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Osserviamo che se consideriamo i coefficienti

$$1 \quad 1 \quad 3$$

$$1 \quad -1 \quad 1$$

e faccio i rapporti i rapporti fra i primi due sono diversi (su vari esempi posso vedere che il terzo rapporto in questo caso può tranquillamente essere uguale o diverso, il fatto è ininfluente)

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \quad \text{sistema possibile}$$

In generale un sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x - b'y = c' \end{cases}$$

è possibile se

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Sistema impossibile

Il sistema è impossibile se le sue equazioni si contraddicono fra di loro

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

La somma di due numeri è 3 e la loro somma è 1

Non è possibile che due numeri sommati valgano una volta 3 ed una volta 1 quindi tutto il sistema è impossibile

Se lo risolvo col metodo di sostituzione, col metodo di addizione oppure di confronto ottengo un' [equazione impossibile](#) mentre col metodo di Cramer otterro':

$$\begin{cases} x = \text{numero}/0 \\ y = \text{numero}/0 \end{cases}$$

Che poi è la stessa cosa perché se fai il minimo comune multiplo ottieni:

$$\begin{cases} 0 = \text{numero} \\ 0 = \text{numero} \end{cases}$$

Osserviamo che se consideriamo i coefficienti

$$1 \quad 1 \quad 3$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

e faccio i rapporti i primi due rapporti sono uguali tra loro ma diversi dal terzo

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{3}{1} \quad \text{sistema impossibile}$$

In generale un sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x - b'y = c' \end{cases}$$

è impossibile se

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

Sistema indeterminato

Il sistema e' indeterminato se le sue equazioni dicono entrambe la stessa cosa

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

La somma di due numeri e' 3 e la somma degli stessi due numeri e' ancora 3

Le due equazioni dicono la stessa cosa.

Se lo risolvo col metodo di sostituzione, col metodo di addizione oppure di confronto ottengo $0 = 0$ come in un' [equazione indeterminata](#) mentre col metodo di Cramer otterro':

$$\begin{cases} x = 0/0 \\ y = 0/0 \end{cases}$$

Che poi e' la stessa cosa perche' se fai il minimo comune multiplo ottieni:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che se consideriamo i coefficienti:

$$1 \quad 1 \quad 3$$

$$1 \quad 1 \quad 3$$

e faccio i rapporti, tutti i rapporti sono uguali tra loro

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{3}{3} \quad \text{sistema indeterminato}$$

In generale un sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

e' indeterminato se

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

(3) Significato geometrico di un sistema

E' possibile dare una visualizzazione geometrica di un sistema possibile, impossibile o indeterminato

E' pero' necessario conoscere almeno i rudimenti della geometria cartesiana del piano:

Nel piano l'equazione $ax + by + c = 0$ con a , b e c numeri dati rappresenta una [retta](#)

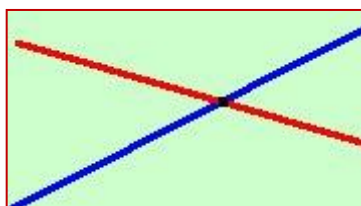
quindi il sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

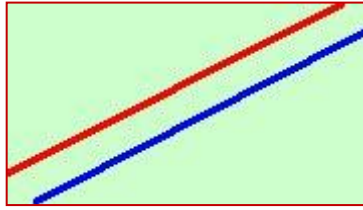
essendo a, b, c, a', b' e c' numeri dati

rappresenta l'insieme di due rette nel piano cartesiano; essendo il sistema la ricerca delle soluzioni comuni alle due equazioni allora geometricamente la soluzione corrispondera' al punto comune alle due rette e avremo che:

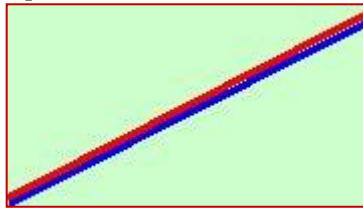
- Se il sistema e' possibile allora ammette una sola soluzione e le due rette avranno solo un punto in comune



- Se il sistema e' impossibile non esistono soluzioni: le due rette non avranno nessun punto in comune, cioe' saranno parallele



- Se il sistema e' indeterminato allora il sistema ha infinite soluzioni, cioe' le due rette hanno infiniti punti comuni e quindi sono coincidenti



b) Sistema di tre equazioni in tre incognite

Vediamo ora come risolvere un sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

essendo $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c''$ e d'' , numeri dati

Utilizzeremo due metodi che potranno anche essere applicati a sistemi di 4,5,... equazioni in 4, 5,... incognite

- metodo di sostituzione
- metodo di Cramer
- sistema possibile impossibile e indeterminato
- sistema omogeneo

(1) Metodo di sostituzione

Si tratta di adattare il metodo di sostituzione gia' visto per il sistema di due equazioni a due incognite.

Sceglieremo un'equazione per ricavare una incognita e sostituiremo il suo valore nelle altre due equazioni; in questo modo avremo due equazioni in due incognite e procederemo come gia' visto.

Vediamo ora su un esempio come risolvere un sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$$

Ricavo la z dalla prima equazione e sostituisco nella seconda e nella terza (posso ricavare chi mi pare):

$$\begin{cases} z = 6 - x - y \\ 2x + y - (6 - x - y) = 1 \\ 2x - 3y + 6 - x - y = -1 \end{cases}$$

al posto della prima equazione metto una linea (così non la uso più sino alla fine):

$$\begin{cases} 2x + y - 6 + x + y = 1 \\ 2x - 3y + 6 - x - y = -1 \end{cases}$$

Porto i numeri dopo l'uguale e poi sommo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 4y = -7 \end{cases}$$

Da notare che ho un sistema di due equazioni in due incognite ora ricavo la x dalla terza equazione:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x = 4y - 7 \end{cases}$$

sostituisco il valore della x trovato nella seconda equazione:

$$\begin{cases} 3(4y - 7) + 2y = 7 \\ x = 4y - 7 \end{cases}$$

eseguo la moltiplicazione (nella terza equazione metto una linea):

$$\begin{cases} 12y - 21 + 2y = 7 \\ \hline \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14y = 21 + 7 \\ \hline \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14y = 28 \\ \hline \end{cases}$$

Divido per 14 prima e dopo l'uguale:

$$\begin{cases} y = 2 \\ \hline \end{cases}$$

Ora riscrivo le equazioni al posto delle linee:

$$\begin{cases} z = 6 - x - y \\ y = 2 \\ x = 4y - 7 \end{cases}$$

sostituisco ad y il valore trovato:

$$\begin{cases} z = 6 - x - 2 \\ y = 2 \\ x = 4(2) - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 4 - x \\ y = 2 \\ x = 8 - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 4 - x \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

ora sostituisco anche la x nella prima equazione:

$$\begin{cases} z = 4 - 1 \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ordino ed ottengo il risultato finale:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Avrai notato che questo metodo e' piuttosto lungo e noioso e, se non stai attento a sostituire bene, puo' portare facilmente ad errori e quindi sara' usato piuttosto raramente: solitamente si preferisce usare il metodo di Cramer.

(2) Metodo di Cramer

Anche qui si tratta di adattare il metodo di Cramer gia' visto per il sistema di due equazioni a due incognite

Prima pero' di passare ad un esercizio apriamo una parentesi per parlare delle matrici del sistema e dei determinanti che dovremo calcolare

- [Matrici del sistema](#)
- [Il determinante 3x3](#)
- [Calcolo del determinante col metodo normale](#)
- [Calcolo del determinante con la regola di Sarrus](#)
- [Soluzione del sistema](#)

(a) Matrici del sistema

Il concetto di matrice e' prezioso, perche' ci permette di trattare "oggetti matematici" le cui componenti non siano tra loro sommabili come ad esempio

Le coordinate di un punto nello spazio ad n dimensioni

le componenti di un vettore

i termini di un polinomio ordinato

Esse nascono con i sistemi ma diventano presto uno dei punti di forza della matematica, ne ripareremo in seguito

Consideriamo il sistema generico di tre equazioni nelle tre incognite x, y e z :

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3 \end{cases}$$

Chiameremo **matrice incompleta** (o matrice dei coefficienti) la matrice 3x3 (tre righe e tre colonne) i cui termini sono i coefficienti delle incognite:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Chiameremo invece **matrice completa** la matrice 3x4 (tre righe quattro colonne) ottenuta dalla matrice precedente aggiungendovi la colonna dei termini noti:

Da notare che tale matrice rappresenta completamente il sistema:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{vmatrix}$$

La matrice e' solamente una tabella: per eseguire i calcoli dovremo considerare il determinante associato alla matrice e questo sara' possibile solamente per le matrici quadrate (tante righe quante colonne).

(b) Il determinante 3x3

Presa la matrice

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

il determinante associato sara' indicato come:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Per vedere come calcolarlo introduciamo la nozione di **complemento algebrico** prima definiamo il complemento e poi il complemento algebrico

Definiamo complemento $C_{i,j}$ di un elemento qualunque $a_{i,j}$ il determinante che si ottiene togliendo la riga e la colonna su cui si trova l'elemento in questione

$a_{i,j}$ indica semplicemente uno degli elementi della matrice, siccome ne posso prendere uno qualunque metto $a_{i,j}$ per indicare un elemento generico

Ad esempio calcoliamo il complemento di $a_{2,2}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} = C_{2,2}$$

elimino la riga e la colonna dove c'e' $a_{2,2}$ (elimino gli elementi in blu) ed ottengo il complemento $C_{2,2}$ di $a_{2,2}$

Passiamo ora alla nozione di **complemento algebrico**

Definiamo complemento algebrico $(-1)^{i+j} \cdot C_{i,j}$ di un elemento qualunque $a_{i,j}$ il determinante che si ottiene togliendo la riga e la colonna su cui si trova l'elemento in questione con il segno + se $i+j$ =numero pari ed il segno - se $i+j$ =numero dispari

Per questo si mette $(-1)^{i+j}$ perche' se $(i+j)$ e' pari ottengo +1 mentre se $(i+j)$ e' dispari ottengo -1

Ad esempio calcoliamo il complemento algebrico di $a_{2,2}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} = + C_{2,2}$$

elimino la riga e la colonna dove c'è $a_{2,2}$ (elimino gli elementi in blu) ed ottengo il complemento $C_{2,2}$ di $a_{2,2}$; ci metto il segno + (essendo $2+2=4$ numero pari) ed ottengo il complemento algebrico.

Calcoliamo il complemento algebrico di $a_{2,1}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = - C_{2,1}$$

elimino la riga e la colonna dove c'è $a_{2,1}$ (elimino gli elementi in blu) ed ottengo il complemento $C_{2,1}$ di $a_{2,1}$; ci metto il segno - (essendo $2+1=3$ numero dispari) ed ottengo il complemento algebrico.

(c) Calcolo del determinante 3x3 col metodo normale

Il determinante di ordine 1 corrisponde al numero stesso

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \end{vmatrix} = a_{1,1}$$

Se ora vado a rivedere come [calcolavo](#) il determinante nel caso di un sistema di due equazioni in due incognite posso dire:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} = a_{1,1} \cdot C_{1,1} - a_{1,2} \cdot C_{1,2}$$

Cioè moltiplico il primo elemento della prima riga per il suo [complemento](#) e moltiplico il secondo elemento della prima riga per il suo [complemento](#), e faccio la differenza

Dobbiamo estendere questo metodo ad un determinante 3x3

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga (vedremo successivamente che è indifferente sviluppare secondo una qualsiasi riga o colonna) mettendo il segno positivo se la somma degli indici dell'elemento è pari ed il segno negativo se la somma degli indici dell'elemento è dispari. Posso anche dire che moltiplico ogni termine della riga per il suo complemento algebrico

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \pm a_{1,1} \cdot C_{1,1} - a_{1,2} \cdot C_{1,2} \pm a_{1,3} \cdot C_{1,3}$$

e quindi abbiamo

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Facciamo un esempio di calcolo di un determinante calcolare il valore di

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [(-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1] - 1 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + 1 \cdot [2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1] = 1 \cdot (-3) - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = -3 - 3 + 3 = -3$$

Questo metodo sara' applicabile per ricorrenza anche a sistemi di 4,5,... equazioni in 4,5,... incognite.

Inoltre posso scegliere una qualunque riga o colonna per sviluppare; quindi, per rendere i calcoli piu' semplici, se possibile, sceglierò una riga o una colonna dove vi sono termini uguali a zero.

(d) Calcolo del determinante 3x3 con la regola di Sarrus

Quando ci limitiamo a sistemi di 3 equazioni in 3 incognite, e se il determinante non ha elementi nulli, conviene utilizzare la regola di Sarrus per calcolarne il valore; la useremo nella forma piu' semplice.

Consideriamo un determinante del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

riporto accanto al determinante le prime due colonne

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

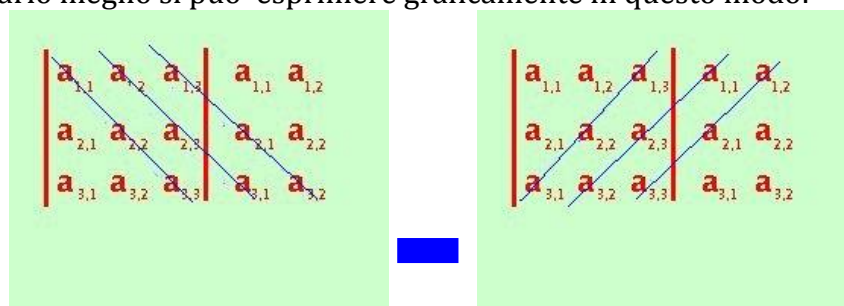
La regola di Sarrus dice che il valore del determinante e' dato da

$$D = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3} +$$

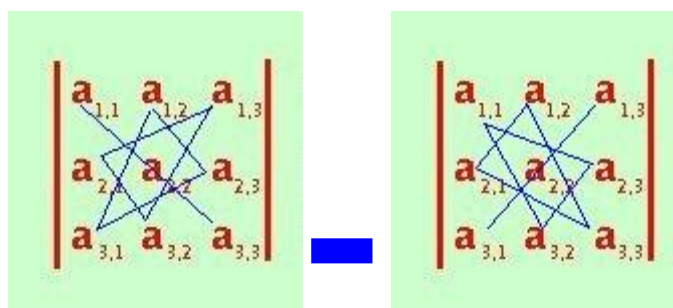
cioe' moltiplico tra loro gli elementi della **diagonale principale** e tra loro gli elementi delle

due diagonali parallele che si sono formate e poi sottraggo il prodotto degli elementi della **diagonale secondaria** ed anche i prodotti degli elementi per le due diagonali parallele alla secondaria.

Per memorizzarlo meglio si puo' esprimere graficamente in questo modo:



E ti va anche bene! A me, ai tempi in cui studiavo, l'hanno fatta ricordare in modo equivalente così ½!



E' equivalente, ottengo gli stessi valori senza dover riportare le prime due colonne

Vediamo come utilizzarla direttamente da un esempio: riprendiamo il determinante già calcolato col metodo normale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

riporto accanto al determinante le prime due colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ora applico la regola di Sarrus:

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = -2 + 1 + 2 + 1 - 1 - 4 = -3$$

(e) Soluzione del sistema col metodo di Cramer

Ora possiamo procedere a risolvere il sistema:

Prendiamo lo stesso sistema già risolto con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$$

considero la matrice incompleta e completa del sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Matrice completa

La quarta colonna della matrice completa è la colonna dei termini noti.

Applichiamo la stessa regola già applicata per risolvere i [sistemi di due equazioni in due incognite](#).

Per calcolare il valore della x devo scrivere al denominatore il determinante ottenuto dalla matrice incompleta ed al numeratore cancello la colonna delle x ed al suo posto metto la colonna dei termini noti.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}} =$$

Calcoliamo i determinanti; ecco i calcoli:

$$\frac{-14}{-14} = 1$$

Calcoliamo il valore del determinante al numeratore (io faccio tutti i passaggi, tu puoi abbreviare)

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-3) = 6 + 1 - 3 = 4$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1 + 18 + 1 = 18$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 18 = -14$$

Calcoliamo ora il valore del secondo determinante (determinante dei coefficienti)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 - 2 - 6 = -7$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 + 3 + 2 = 7$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -7 - 7 = -14$$

Per calcolare il valore della y devo scrivere al denominatore il determinante ottenuto dalla matrice incompleta ed al numeratore cancello la colonna delle y ed al suo posto metto la colonna dei termini noti:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}} =$$

Calcoliamo

$$\frac{-28}{-14} = 2$$

Ecco i calcoli:

Basta calcolare il determinante al numeratore perche' quello sotto l'abbiamo già calcolato e vale -14. Calcoliamo il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 - 12 - 2 = -13$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 6 \cdot 2 \cdot 1 = 2 + 1 + 12 = 15$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -13 - 15 = -28$$

Per calcolare il valore della z devo scrivere al denominatore il determinante ottenuto dalla matrice incompleta ed al numeratore cancello la colonna delle z ed al suo posto metto la colonna dei termini noti:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}} =$$

Calcoliamo

$$\frac{-42}{-14} = 3$$

Ecco i calcoli:

Basta calcolare il determinante sopra perche' quello al denominatore l'abbiamo gia' calcolato e vale -14

Calcoliamo il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \cdot (-3) = -1 + 2 - 36 = -35$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot (-1) = 12 - 3 - 2 = 7$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -35 - 7 = -42$$

Otengo quindi come soluzione:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

(3) Sistema possibile, impossibile e indeterminato

Al solito le equazioni che compongono un sistema contengono informazioni che possono essere

- informazioni valide
- informazioni errate
- informazioni ripetute

Avendo a sistema tre equazioni vediamo nei particolari i casi possibili di sistema possibile, impossibile ed indeterminato costruendoci gli strumenti necessari per trattare tali argomenti in modo generale

- Sistema possibile
- Sistema indeterminato
- Dipendenza ed indipendenza lineare fra equazioni
- Sistema impossibile
- Rango di una matrice
- Teorema di Rouché-Capelli

Informazioni valide

Facciamo un esempio: consideriamo i valori

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$$

e costruiamoci delle equazioni:

Questo e' il metodo migliore per costruire degli esercizi sui sistemi: parti dalle soluzioni e costruisciti le equazioni .

Queste saranno valide se ci daranno informazioni **diverse** e **compatibili** sullo stesso fatto:

$$\begin{array}{ll} 1 + 2 + 3 = 6 & x + y + z = 6 \\ 1 - 2 + 3 = 2 & x - y + z = 2 \\ 2 + 2 - 3 = 1 & 2x + y - z = 1 \\ 2 - 6 + 3 = -1 & 2x - 3y + z = -1 \end{array}$$

diverse significa che non posso trasformarle una nell'altra moltiplicando o dividendo tutti i termini per gli stessi numeri
compatibili significa che non posso avere equazioni in forma canonica (cioè con le incognite prima dell'uguale e il termine noto dopo l'uguale) che hanno proporzionali i termini prima dell'uguale e non i termini dopo l'uguale.

Informazioni errate

Prendiamo sempre i valori:

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$$

e costruiamoci delle equazioni.

Queste saranno errate se ci daranno informazioni **non compatibili** sullo stesso fatto:

$$\begin{array}{ll} 1 + 2 + 3 = 6 & x + y + z = 6 \\ 1 + 2 + 3 = 5 & x + y + z = 5 \\ 2 + 4 + 6 = 6 & 2x + 2y + 2z = 6 \\ 1 - 2 + 3 = 0 & x - y + z = 0 \end{array}$$

anche se è riduttivo farlo controlla i numeri e vedi che le equazioni che ho scritto, se è valida la prima, sono tutte errate.

Nella seconda ho scritto che la somma di tre numeri fa 5 in contrasto con la prima dove la somma valeva 6

Nella terza ho scritto che la somma del doppio di tre numeri vale 6, mentre nella prima dico che vale 6 la somma degli stessi tre numeri

Quindi se facessi un sistema non potrei trovare una soluzione valida.

Informazioni ripetute

Prendiamo sempre i valori

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$$

e costruiamoci delle equazioni.

Queste saranno ripetute se ci daranno informazioni uguali sullo stesso fatto:

$$\begin{array}{ll} 1 + 2 + 3 = 6 & x + y + z = 6 \\ 1 + 2 + 3 = 6 & x + y + z = 6 \\ 2 + 4 + 6 = 12 & 2x + 2y + 2z = 12 \\ 3 + 6 + 9 = 18 & 3x + 3y + 3z = 18 \end{array}$$

In pratica ho sempre la stessa equazione.

La seconda è identica alla prima

La terza si ottiene dalla prima moltiplicandone tutti i termini per 2

La quarta si ottiene dalla prima moltiplicandone tutti i termini per 3

(a) Sistema possibile

Diremo che il sistema è possibile se le tre equazioni che lo compongono derivano da **informazioni valide**.

In tal caso, per risolverlo, utilizzeremo la regola di Cramer ed otterremo come soluzione una sola terna di valori:

$$\begin{cases} x = \text{primo valore} \\ y = \text{secondo valore} \\ z = \text{terzo valore} \end{cases}$$

(b) Sistema indeterminato

Diremo che un sistema è indeterminato se due delle equazioni che lo compongono sono tra loro equivalenti oppure anche tutte e tre: i due casi danno luogo a soluzioni diverse: vediamo in particolare

- **due equazioni equivalenti**
- **tre equazioni equivalenti**

Vedremo comunque nelle prossime pagine di introdurre un concetto che ci permetta di trattare meglio i casi di sistemi possibili ed indeterminati: il concetto di dipendenza ed indipendenza lineare.

(i) Due equazioni equivalenti

Prima facciamo un semplice esempio e poi raccogliamo i risultati.

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione

In questo caso ho che la prima e la seconda equazione sono equivalenti (anzi sono addirittura uguali), e se andassi a sostituire normalmente otterrei alla fine $0=0$; quindi, per poter risolvere devo eliminare una delle due equazioni equivalenti ed il mio sistema si riduce a:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Risolvere con il metodo di sostituzione: ricavo la y dall'ultima equazione e vado a sostituire nella prima:

$$\begin{cases} x + z - x + z = 6 \\ y = z - x \end{cases}$$

sommo:

$$\begin{cases} 2z = 6 \\ y = z - x \end{cases}$$

divido per 2:

$$\begin{cases} z = 3 \\ y = z - x \end{cases}$$

sostituisco a z il valore 3 ed ottengo il risultato:

$$z = 3$$

$$y = 3 - x$$

Otengo quindi oo soluzioni perche' per ogni valore che posso dare ad x

(1,2,3,..... 1/2, 1/3,)

ottengo un valore per y e quindi il mio sistema ammette infinite soluzioni che posso anche indicare come:

$$\begin{cases} x = k \\ y = 3 - k \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{con } k \text{ numero reale}$$

Metodo di Cramer

Considero le matrici incompleta e completa

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Matrice completa

Vediamo che ci sono due righe uguali: se procedessi normalmente otterrei che i determinanti 3×3 sarebbero tutti nulli (due righe uguali) ed otterrei come soluzioni $0/0$ (valore indeterminato); quindi per procedere a trovare le soluzioni devo eliminare una equazione delle due uguali ed il mio sistema diventa:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Devo spostare dopo l'uguale una incognita, trattandola come un numero dato, per avere tante incognite quante equazioni.

Sposto dopo l'uguale la x per ottenere gli stessi risultati trovati sopra: ottengo il sistema:

$$\begin{cases} y + z = 6 - x \\ y - z = -x \end{cases}$$

con matrice incompleta e completa

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6-x \\ 1 & -1 & -x \end{vmatrix}$$

Matrice completa

Trovo y con la regola di Cramer

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6-x & 1 \\ -x & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(6-x) \cdot (-1) - 1 \cdot (-x)}{1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1} = \frac{-6 + x + x}{-1 - 1} = \frac{-6 + 2x}{-2} = 3 - x$$

Trovo z con la regola di Cramer

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6-x \\ 1 & -x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot (-x) - (6-x) \cdot 1}{1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1} = \frac{-x - 6 + x}{-1 - 1} = \frac{-6}{-2} = 3$$

e quindi, siccome posso dare ad x un valore qualunque:

$$\begin{cases} x = k \\ y = 3 - k \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{con } k \text{ numero reale}$$

Possiamo quindi dire:

Se due equazioni sono equivalenti allora il sistema ammette ∞ soluzioni

Per poter elaborare una teoria unitaria avremo bisogno di nuovi concetti quali:

dipendenza ed indipendenza lineare

matrici, determinanti e rango di una matrice

Lo vedremo nelle prossime pagine

(ii) Tre equazioni equivalenti

Anche qui facciamo un semplice esempio e poi raccogliamo i risultati

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + 2z = 12 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione

In questo caso le tre equazioni sono equivalenti (le prime due sono addirittura uguali e la terza e' ottenuta dalla prima moltiplicandone i termini per 2), e se andassi a sostituire normalmente otterrei alla fine $0=0$; quindi, per poter risolvere devo eliminare due delle tre equazioni equivalenti ed il mio sistema si riduce all'equazione:

$$x + y + z = 6$$

Risolvo: ricavo la x come se y e z fossero numeri dati:

$$x = 6 - y - z$$

Ora posso attribuire ad y infiniti valori, ma non solo: per ogni valore che do' ad y posso dare infiniti valori a z

Se non ti e' chiaro, leggi:

Considera la soluzione:

$$\begin{cases} x = 6 - h - k \\ y = h \\ z = k \end{cases} \quad \text{con } h \text{ e } k \text{ numeri reali}$$

proviamo a dare ad $y=h$ il valore 2: otteniamo:

$$\begin{cases} x = 6 - 2 - k \\ y = 2 \\ z = k \end{cases} \quad \text{con } h = 2 \text{ e } k \text{ numero reale}$$

e questi sono infiniti valori perche' a $z=k$ posso dare il valore che voglio

Adesso cambio e ad $y=h$ do' il valore 42:

$$\begin{cases} x = 6 - 42 - k = -36 - k \\ y = 42 \\ z = k \end{cases} \quad \text{con } h = 42 \text{ e } k \text{ numero reale}$$

anche questi sono infiniti valori perche' a $z=k$ posso dare il valore che voglio:

allora:

- Ad y posso dare infiniti valori
- Per ogni valore che do' ad y posso dare infiniti valori a z
- Quindi infiniti valori per y moltiplicati per infiniti valori di z mi da' $\infty \cdot \infty = \infty^2$

e quindi il mio sistema ammette infinite al quadrato (∞^2) soluzioni che posso anche indicare come:

$$\begin{cases} x = 6 - h - k \\ y = h \\ z = k \end{cases} \quad \text{con } h \text{ e } k \text{ numeri reali}$$

Metodo di Cramer

Considero le matrici incompleta e completa

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Matrice completa

Vediamo che ci sono due righe uguali ed una proporzionale: se procedessi normalmente otterrei che i determinanti 3×3 sarebbero tutti nulli (ed anche tutti quelli 2×2) ed otterrei come soluzioni $0/0$ (valore indeterminato); quindi per procedere a trovare le soluzioni devo eliminare due equazione delle tre uguali ed il mio sistema diventa

$$x + y + z = 6$$

Devo spostare dopo l'uguale due incognite, trattandola come numeri dati, per avere tante incognite quante equazioni

sposto dopo l'uguale la y e la z per ottenere gli stessi risultati trovati sopra: ottengo

$$x = 6 - y - z$$

con matrice incompleta e completa

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

Matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} 1 & 6-y-z \end{vmatrix}$$

Matrice completa

Trovo x con la regola di Cramer

$$\begin{vmatrix} 6-y-z \end{vmatrix}$$

$$6-y-z$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6-y-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}} = \frac{6-y-z}{1} = 6-y-z$$

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$$

$$1$$

e quindi, siccome posso dare ad y e z un valore qualunque:

$$\begin{cases} x = 6 - h - k \\ y = h \\ z = k \end{cases} \quad \text{con } h \text{ e } k \text{ numeri reali}$$

Possiamo quindi dire:

Se tre equazioni sono equivalenti allora il sistema ammette ∞^2 soluzioni

E' ormai ora di parlare di:

dipendenza ed indipendenza lineare

matrici, determinanti e rango di una matrice

(c) Dipendenza ed indipendenza lineare fra equazioni

Consideriamo alcune equazioni

$$x + y + z = 6$$

$$2x + 2y + 2z = 12$$

$$x - y + z = 2$$

Diremo che due equazioni sono tra loro **linearmente dipendenti** se e' possibile trasformare la prima nella seconda moltiplicando o dividendo tutti i termini per lo stesso numero:

$$\text{prima equazione} = k \cdot (\text{seconda equazione})$$

Nell'esempio la prima e la seconda sono tra loro linearmente dipendenti perche' ottengo la seconda moltiplicando ogni termine della prima per 2.

Anche se non e' molto esatto proviamo a rappresentarlo cosi' :

$$2 \cdot (x + y + z = 6) \Rightarrow (2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z = 2 \cdot 6) \Rightarrow 2x + 2y + 2z = 12$$

Due equazioni sono tra loro **linearmente indipendenti** se non e' possibile trasformare la prima nella seconda moltiplicando o dividendo tutti i termini per lo stesso numero.

Ad esempio la prima e la terza sono tra loro linearmente indipendenti e non sono trasformabili una nell'altra: basta guardare i segni: moltiplicando non posso trasformare quattro segni positivi in tre positivi ed un negativo .

La nozione di dipendenza lineare e' fondamentale in tutti quegli oggetti matematici che hanno delle componenti ben definite, come le coordinate di un punto, le componenti di un vettore, i termini di un polinomio ordinato, e qui, le equazioni a piu' incognite perche' ci

permette di capire quando due oggetti sono effettivamente diversi e non possono diventare uguali e quando, invece, possono diventare uguali.

Per quello che ora ci interessa sui sistemi possiamo affermare che:

- se le equazioni sono fra loro linearmente dipendenti allora le matrici completa ed incompleta avranno entrambe delle righe uguali o proporzionali
- Se il sistema ammette una sola soluzione allora le equazioni componenti sono fra loro linearmente indipendenti.
Non vale il viceversa.

(d) Sistema impossibile

Anche qui facciamo un semplice esempio e poi raccogliamo i risultati

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 5 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Il sistema e' impossibile perche' la prima equazione e' in contrasto con la seconda: la somma degli stessi tre numeri non puo' dare una volta 6 ed una volta 5

Se risolviamo per sostituzione otterremo un'uguaglianza tipo $0=1$.

Se osserviamo la matrice incompleta e completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice completa

mentre nella matrice completa abbiamo due righe uguali nella matrice incompleta tali righe non vi sono: e quindi applicando il metodo di Cramer otterremo come soluzione per le incognite un numero fratto zero che corrisponde a soluzione impossibile.

Quindi il fatto che il sistema sia impossibile e' legato al fatto che la matrice dei coefficienti ha due righe uguali o proporzionali, mentre la matrice completa no; per evidenziare al meglio questo fatto introduciamo, nella prossima pagina, la nozione di **Rango di una matrice**.

(e) Rango di una matrice

Dobbiamo introdurre il fatto che se prendiamo dei determinanti di un certo ordine estraendoli da una matrice essi potranno essere tutti nulli oppure potra' esistere qualche determinante diverso da zero.

Partiamo dalla matrice incompleta e completa della pagina precedente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice completa

Quanti determinanti posso estrarre da quelle matrici?

- Determinanti 3x3 (rango 3)
1 dalla matrice incompleta
4 dalla matrice completa vedere: *
- determinanti 2x2 (rango 2)
9 dalla matrice incompleta vedere: **
18 dalla matrice completa vedere: ***
- Determinanti 1x1 (corrispondono agli elementi) (rango 1)
9 dalla matrice incompleta
12 dalla matrice completa

Definizione:

Definiamo **Rango o Caratteristica di una matrice** l'ordine del determinante piu' alto estraibile che sia diverso da zero

Se ora consideriamo la matrice incompleta vediamo che il determinante di ordine 3 e' uguale a zero, perche' ha due righe uguali, mentre esiste un determinante di ordine 2 diverso da zero; prendo il minore indicato in blu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Cioe'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -1 - 1 = -2$$

quindi il rango della matrice incompleta e' 2 perche' il determinante piu' grosso diverso da zero e' 2x2.

Nella matrice completa, invece, abbiamo che la colonna dei termini noti non rispetta la proporzione e, se vado a prendere uno dei minori considerandolo avente come colonna l'ultima colonna della matrice, vedo che il valore del suo determinante e' diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Ecco i calcoli:

Calcoliamo il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) = 2 + 5 - 6 = 1$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 = 6 - 5 + 2 = 3$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

quindi il rango della matrice completa e' 3 perche' il determinante piu' grosso diverso da zero e' **3x3**

Questo fatto di avere le caratteristiche della matrice completa e della matrice incompleta diverse e' tipico dei sistemi impossibili e deriva dal fatto che l'informazione dopo l'uguale, essendo errata, non rispetta la proporzione come i coefficienti delle incognite, quindi

Un sistema e' impossibile se il rango della matrice completa e' diverso dal rango della matrice incompleta.

*** Determinanti 3x3 estraibili dalla matrice completa**

Tolgo la riga in blu Faccio scorrere la riga che tolgo dall'ultima colonna alla prima

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,3} & b_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \\ \hline \end{array}$$

**Determinanti 2x2 estraibili dalla matrice incompleta

Tolgo gli elementi in blu

Tengo fissa la terza riga e faccio scorrere la colonna (terza, seconda prima)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \\ \hline \end{array}$$

Tengo fissa la seconda riga e faccio scorrere la colonna (terza, seconda prima)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \\ \hline \end{array}$$

Tengo fissa la prima riga e faccio scorrere la colonna (terza, seconda prima)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

*** Determinanti 2x2 estraibili dalla matrice completa

Per determinare gli elementi tengo fisso una riga: la terza, poi la seconda e poi la prima e fissando l'ultima colonna faccio scorrere la penultima colonna verso l'inizio

Tolgo gli elementi in blu

Tengo fissa la terza riga

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,2} & b_2 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,3} & b_2 \end{array} \right|$$

Tengo fissa la seconda riga

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{1,1} & b_1 \\ a_{3,1} & b_3 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{1,2} & b_1 \\ a_{3,2} & b_3 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{1,3} & b_1 \\ a_{3,3} & b_3 \end{array} \right|$$

Ora fisso la prima riga

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{2,1} & b_2 \\ a_{3,1} & b_3 \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,2} & b_3 \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,3} & b_3 \end{array} \right|
 \end{array}$$

(f) Teorema di Rouché-Capelli

Siamo ora in grado di enunciare un teorema che rappresenta il sunto di tutti i ragionamenti precedenti:

Un sistema di equazioni di primo grado (lineari) ammette soluzioni (una o infinite) se e solo se il rango (caratteristica) della matrice completa e' uguale al rango (caratteristica) della matrice incompleta.

Inoltre, sempre rifacendoci ai ragionamenti precedenti, possiamo dire che, se i ranghi uguali della matrice completa ed incompleta sono inferiori al numero delle incognite allora il sistema ammette infinite soluzioni.

Non solo, ma possiamo affermare che, se le incognite sono 3 e il rango vale s (con $s < 3$) allora le soluzioni sono ∞^{3-s}

Il ragionamento fatto per i sistemi di 3 equazioni di primo grado in tre incognite potrà essere esteso in modo semplice ai sistemi di n equazioni in n incognite.

Insomma per risolvere un sistema di 3 equazioni di primo grado in tre incognite dobbiamo:

1. Controllare la matrice completa ed incompleta e vedere se il loro rango vale 3: se vale 3 allora posso usare Cramer per trovare la soluzione
2. Se i ranghi sono diversi il sistema non ammette soluzioni
3. Se i ranghi sono uguali ma inferiori a 3 allora devo scegliere le equazioni corrispondenti al determinante il cui valore sia diverso da zero e considerare solo un numero di incognite uguale al numero di equazioni considerate spostando le altre incognite dopo l'uguale trattandole come fossero parametri e risolvere il sistema che ottengo con il metodo di Cramer (o di sostituzione).

(4) Sistema omogeneo

Vediamo ora un caso particolare: è possibile risolvere un sistema quando la somma delle incognite vale sempre zero?

Costruiamo il sistema con il solito metodo; consideriamo i valori:

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$$

che saranno le soluzioni.

Costruiamo le equazioni:

$$\begin{aligned} 1 + 2 - 3 &= 0 & x + y - z &= 0 \\ 1 - 2 \cdot 2 + 3 &= 0 & x - 2y + z &= 0 \\ 5 \cdot 1 - 2 - 3 &= 0 & 5x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y - z = 0 \end{cases}$$

Se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, procedo con il metodo di Cramer, siccome la colonna dei termini noti è tutta nulla otterro' la soluzione banale:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Se invece il determinante è uguale a zero (come nel nostro caso)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecco i calcoli:

Calcoliamo il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 2 + 5 + 1 = 8$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 10 - 1 - 1 = 8$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$$

Allora il sistema ammette infinite soluzioni e vale la regola:

Se i complementi algebrici degli elementi di una qualunque riga non sono tutti nulli allora il loro valore e' una delle infinite soluzioni del sistema.

Cioe' saranno soluzioni del sistema anche tutti i multipli e sottomultipli dei valori trovati cioe':

$$\begin{cases} x = \text{costante} \cdot C_{1,1} \\ y = \text{costante} \cdot C_{1,2} \\ z = \text{costante} \cdot C_{1,3} \end{cases}$$

Essendo:

$C_{1,1}$ il complemento algebrico del primo elemento della prima riga

$C_{1,2}$ il complemento algebrico del secondo elemento della prima riga

$C_{1,3}$ il complemento algebrico del terzo elemento della prima riga

Siccome i complementi algebrici degli elementi della prima riga non sono tutti nulli considero loro.

Attenzione: nel concetto di complemento algebrico e' implicito il segno normale se il complemento ha somma degli indici pari, segno cambiato se la somma degli indici e' dispari

Nel nostro caso abbiamo:

$$x = C_{1,1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = 2 + 1 = 3$$

$$y = C_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = - [1 \cdot (-1) - 5 \cdot (1)] = - (-1 - 5) = 6$$

$$z = C_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 5 = -1 + 10 = 9$$

Otengo quindi come soluzione:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \\ z = 9 \end{cases}$$

siccome ho come infinite soluzioni tutte quelle proporzionali a queste avro' come soluzione anche:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

ottenuta dalla precedente dividendo ogni risultato per 3

E' preferibile indicare le soluzioni come:

$$\begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = 3k \end{cases} \quad \text{con } k \text{ numero reale}$$

c) Sistema di n equazioni in n incognite

Oramai e' solo una generalizzazione parlare di sistemi lineari (cioe' di primo grado) di n equazioni in n incognite: ripetiamo in pratica i risultati ottenuti per la soluzione di un sistema di primo grado di 3 equazioni in 3 incognite

Distinguiamo i casi:

- Sistema lineare non omogeneo
- Sistema lineare omogeneo
- Sistema lineare con parametro

Se vuoi vedere un'interessante rappresentazione di un sistema di n equazioni in n incognite vai a [Prodotto fra matrici](#).

(1) Sistema lineare non omogeneo

Per risolvere un sistema lineare non omogeneo di n equazioni di primo grado in n incognite dobbiamo:

1. Controllare la matrice completa ed incompleta e vedere se il loro rango vale **n**: se vale **n** allora posso usare Cramer per trovare la soluzione
2. Se i ranghi sono diversi il sistema non ammette soluzioni
3. Se i ranghi sono uguali ad un numero **s** inferiore a **n** allora devo scegliere le equazioni corrispondenti al determinante il cui valore sia diverso da zero e considerare solo un numero di incognite uguale al numero di equazioni considerate spostando le altre incognite dopo l'uguale trattandole come fossero parametri e risolvere il sistema che ottengo con il metodo di Cramer (o di sostituzione). Otterro' un numero ∞^{n-s} di soluzioni.

Nota: fino a 4 incognite useremo le lettere **x, y, z, t**
mentre invece da 5 incognite in avanti useremo **x₁, x₂, x₃, x₄, x₅, x₆, x₇,...**

Vediamo qualche esercizio:

1) Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y + z - t = 1 \\ x - 2y + t = 1 \\ 3x + 2y - z - t = 0 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

Soluzione:

Considero le matrici incompleta e completa:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Matrice completa

Calcolo il determinante della matrice incompleta e vedo che vale:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Ecco i calcoli:

Devo calcolare il valore del determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Mi conviene sviluppare secondo l'ultima riga perché ho solo due termini diversi da zero
 La evidenzio in blu
 il primo termine della riga ha posto **a_{4,1}** cioè quarta riga e prima colonna quindi è di posto dispari e quindi va cambiato di segno
 il terzo termine della riga ha posto **a_{4,3}** cioè quarta riga e terza colonna quindi è di posto dispari e quindi va cambiato di segno
 Dove c'è zero non devo sviluppare perché zero per numero uguale zero

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

devo calcolare i due determinanti dopo l'uguale:
 Calcolo il primo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) = 2 - 2 = 0$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = -1 + 2 = 1$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del primo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Calcolo il secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 = 3 - 2 = 1$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 6 - 1 = 5$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 5 = -4$$

ed ottengo quindi

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-4) = 1 - 4 = -3$$

Essendo questo determinante anche un minore della matrice completa avro' che matrice completa ed incompleta hanno lo stesso rango e quindi il sistema ammette una sola soluzione e posso applicare il metodo di Cramer

Calcolo la x

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{-3}{-3} = 1$$

Ecco i calcoli:

Quello al denominatore l'ho gia' calcolato e vale -3
Devo calcolare il valore del determinante al numeratore:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Anche qui i conviene sviluppare secondo l'ultima riga perche' ho solo due termini diversi da zero

La evidenzio in blu

il primo termine della riga ha posto $a_{4,1}$ cioe' quarta riga e prima colonna quindi e' di posto dispari e quindi va cambiato di segno

il terzo termine della riga ha posto $a_{4,3}$ cioe' quarta riga e terza colonna quindi e' di posto dispari e quindi va cambiato di segno

Dove c'e' zero non devo sviluppare perche' zero per numero uguale zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

devo calcolare i due determinanti dopo l'uguale:

Calcolo il primo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) = 2 - 2 = 0$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = -1 + 2 = 1$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del primo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Calcolo il secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 = 2 - 2 = 0$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 2 - 1 = 1$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

ed ottengo quindi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-2) \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) = -2 - 1 = -3$$

Calcolo la y

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{\dots}{\dots} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-6}{-3} = 2$$

Ecco i calcoli:

Quello al denominatore l'ho già calcolato e vale -3
Devo calcolare il valore del determinante al numeratore:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Qui sviluppiamo secondo la prima riga; la evidenzio in blu

Il primo termine è nullo

il secondo termine della riga ha posto $a_{1,2}$ cioè prima riga e seconda colonna quindi è di posto dispari e quindi va cambiato di segno

il terzo termine della riga ha posto $a_{1,3}$ cioè prima riga e terza colonna quindi è di posto pari e quindi mantiene il suo segno

il quarto termine della riga ha posto $a_{1,4}$ cioè prima riga e quarta colonna quindi è di posto dispari e quindi va cambiato di segno

Dove c'è zero non devo sviluppare perché zero per numero uguale zero

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

devo calcolare i tre determinanti dopo l'uguale:

Calcolo il primo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) = -3$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot 0 = -1 + 1 = 0$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del primo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3$$

Calcolo il secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-2) = -1 - 6 = -7$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \cdot 0 = 2$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -7 - 2 = -9$$

Calcolo il terzo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot (-2) = -1$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \cdot (-1) = 2 - 3 = -1$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del terzo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-1) = 0$$

ed ottengo quindi

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-9) - (-1) \cdot 0 = 3 - 9 = -6$$

Calcolo la z

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$z = \frac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{-9}{-3} = 3$$

Ecco i calcoli:

Quello al denominatore l'ho già calcolato e vale -3

Devo calcolare il valore del determinante al numeratore:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Anche qui i conviene sviluppare secondo l'ultima riga perché ho solo due termini diversi da zero

La evidenzio in blu

il primo termine della riga ha posto **a_{4,1}** cioè quarta riga e prima colonna quindi è di posto

dispari e quindi va cambiato di segno

il terzo termine della riga ha posto $a_{4,3}$ cioè quarta riga e terza colonna quindi è di posto dispari e quindi va cambiato di segno

Dove c'è zero non devo sviluppare perché zero per numero uguale zero

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

devo calcolare i due determinanti dopo l'uguale:

Calcolo il primo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) \cdot 0 = -1 + 2 = 1$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = -2 + 2 = 0$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del primo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

Calcolo il secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 = 3 - 2 = 1$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 6 - 1 = 5$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 5 = -4$$

ed ottengo quindi

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1) \cdot (1) - (-2) \cdot (-4) = -1 - 8 = -9$$

Calcolo la t

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$t = \frac{\dots}{\dots} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Calcoli

$$\begin{aligned} & -12 \\ & = \frac{-12}{-3} = 4 \end{aligned}$$

Ecco i calcoli:

Quello al denominatore l'ho già calcolato e vale -3
Devo calcolare il valore del determinante al numeratore:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Qui sviluppiamo secondo la prima riga; la evidenzio in blu

Il primo termine è nullo

il secondo termine della riga ha posto $a_{1,2}$ cioè prima riga e seconda colonna quindi è di posto dispari e quindi va cambiato di segno

il terzo termine della riga ha posto $a_{1,3}$ cioè prima riga e terza colonna quindi è di posto pari e quindi mantiene il suo segno

il quarto termine della riga ha posto $a_{1,4}$ cioè prima riga e quarta colonna quindi è di posto dispari e quindi va cambiato di segno

Dove c'è zero non devo sviluppare perché zero per numero uguale zero

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

devo calcolare i tre determinanti dopo l'uguale:

Calcolo il primo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) = 2 - 3 = -1$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-2) = -1$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del primo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 - (-1) = 0$$

Calcolo il secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 0 = -4$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 \cdot (-2) = 2 + 12 = 14$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 14 = -18$$

Calcolo il terzo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo la regola di Sarrus riportando la prima e la seconda colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Moltiplico prima gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 0 = -2 + 2 = 0$$

Moltiplico poi gli elementi della diagonale secondaria e delle due diagonali parallele

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 3 \cdot (-1) = 6$$

Adesso faccio la differenza fra i due valori trovati ed ottengo il valore del terzo determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$$

ed ottengo quindi

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 + 1 \cdot (-18) - 1 \cdot (-6) = -18 + 6 = -12$$

Quindi ho le soluzioni:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = 4 \end{cases}$$

2) Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 + x_5 = 2 \end{cases}$$

Soluzione:

Considero le matrici incompleta e completa

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Matrice incompleta

Matrice completa

Calcolo il determinante della matrice incompleta e vedo che vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Calcoli}$$

Ecco i calcoli:

Devo calcolare il valore del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga

il primo termine della riga ha posto $a_{1,1}$ cioè prima riga e prima colonna quindi è di posto pari ($1+1=2$) e quindi mantiene il segno

il secondo termine della prima riga ha posto $a_{1,2}$ cioè prima riga e seconda colonna quindi è di posto dispari ($1+2=3$) e quindi va cambiato di segno

Dove c'è zero non devo sviluppare perché zero per numero uguale zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

devo calcolare i due determinanti dopo l'uguale:

Calcolo il primo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Sviluppo secondo l'ultima riga perché ho solo un termine diverso da zero; il termine ha posto 4,4 cioè quarta riga e quarta colonna ($4+4=8$) posto pari

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima colonna (in un determinante posso sviluppare indifferentemente per righe o per colonne) perché c'è un solo elemento diverso da zero di posto pari (elemento 1,1 ed $1+1=2$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

Calcolo il secondo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Sviluppo secondo la prima colonna, siccome c'è un solo termine diverso da zero (quarta riga e prima colonna $4+1=5$ posto dispari)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga perche' c'e' un solo elemento diverso da zero di posto pari (elemento 1,1 ed $1+1=2$)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

Quindi il mio determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Quindi il rango della matrice incompleta e' inferiore a 5

Calcolo il rango della matrice completa: posso estrarre [5 determinanti di ordine 5](#) oltre quello calcolato sopra (che coincide col determinante della matrice incompleta) e devo calcolarli finche' non ne trovo uno diverso da zero:

Se non lo trovo vado a calcolare se i ranghi della matrice completa ed incompleta valgono 4

Se invece ne trovo almeno uno diverso da zero il sistema e' impossibile

Considero il determinante della matrice completa ottenuto eliminando la penultima colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{Calcoli}$$

Ecco i calcoli:

Devo calcolare il valore del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima colonna

il primo termine della colonna ha posto $a_{1,1}$ cioe' prima riga e prima colonna quindi e' di posto pari ($1+1=2$) e quindi mantiene il segno

il quinto termine della prima colonna ha posto $a_{5,1}$ cioe' quinta riga e prima colonna quindi e' di posto pari ($5+1=6$) e quindi mantiene il segno

Dove c'e' zero non devo sviluppare perche' zero per numero uguale zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

devo calcolare i due determinanti dopo l'uguale:

Calcolo il primo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

Sviluppo secondo la prima colonna perché ho solo un termine diverso da zero; il termine ha posto 1,1 cioè prima riga e prima colonna ($1+1=2$) posto pari

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Senza applicare Sarrus sviluppo secondo la prima colonna

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Calcolo il secondo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Sviluppo secondo la prima colonna Il primo termine (prima riga prima colonna) ha posto $1+1=2$ pari il secondo termine (seconda riga prima colonna) ha posto $2+1=3$ dispari

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Senza usare la regola di Sarrus nel primo determinante sviluppo secondo la prima riga ed anche nel secondo

$$= 1 \cdot [1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}] + (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [1 \cdot 3 + 3 \cdot 1] - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$$

Quindi il mio determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = -2$$

Sono stato fortunato: non devo calcolare gli altri

Il rango della matrice completa e' 5

Essendo il rango della matrice completa 5 ed il rango della matrice incompleta inferiore a 5 allora il nostro sistema non ammette soluzioni

3) Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ x - z = -1 \\ y + t = 2 \end{cases}$$

Soluzione:

Considero le matrici incompleta e completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice completa

Calcolo il determinante della matrice incompleta e vedo che vale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Calcoli}$$

Ecco i calcoli:

Devo calcolare il valore del determinante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mi conviene sviluppare secondo la prima riga perche' ho solo due termini diversi da zero

La evidenzio in blu

il primo termine della riga ha posto $a_{1,1}$ cioe' prima riga e prima colonna $1+1=2$ quindi e' di posto pari e quindi mantiene il segno

il secondo termine della prima riga ha posto $a_{1,2}$ cioe' prima riga e seconda colonna $1+2=3$ quindi e' di posto dispari e va cambiato di segno

Dove c'e' zero non devo sviluppare perche' zero per numero uguale zero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Nel primo determinante dopo l'uguale sviluppo secondo la terza colonna

Nel secondo determinante sviluppo secondo la prima riga

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1 + 1 = 0$$

Quindi il rango della matrice incompleta e' inferiore a 5

Calcolo il rango della matrice completa: posso estrarre [4 determinanti di ordine 4](#) oltre quello calcolato sopra (che coincide col determinante della matrice incompleta) e devo calcolarli finche' non ne trovo uno diverso da zero:

Siccome l'esercizio l'ho fatto io (e per avere la terza equazione ho fatto la differenza fra la prima e la seconda) posso osservare che la terza riga e' differenza fra le prime due e quindi i minori estratti di ordine 4 contenendo la terza riga sono tutti uguali a zero.

Pero' se non faccio queste osservazioni devo passare un pomeriggio a fare conti, allora ti conviene studiare bene le proprieta' dei determinanti per vedere queste scorciatoie (fare link) e fare molti esercizi per acquisire esperienza (qui e' fondamentale)

Vado a calcolare se i ranghi della matrice completa ed incompleta valgono 3

Per vederlo prendo un minore che non contenga la terza riga

ad esempio il minore segnato in blu

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

cioe'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{Calcoli}$$

Ecco i calcoli:

Devo calcolare il valore del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$$

Essendo questo un minore sia della matrice completa che della matrice incompleta avro' che i ranghi valgono 3.

Utilizzo il minore calcolato per evidenziare il nuovo sistema (lascio l'incognita t come parametro):

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ y = 2 - t \end{cases}$$

converrebbe risolverlo per sostituzione visto che la y e' gia' calcolata, ma, per esercizio, continuiamo con i determinanti Considero le matrici incompleta e completa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2-t \end{vmatrix}$$

Matrice completa

Applico la regola di Cramer

Calcolo la x

$$\begin{array}{ccc|c}
 2 & 1 & 0 & \\
 3 & 1 & 1 & \\
 2-t & 1 & 0 &
 \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}}{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}} = t \quad \text{Calcoli}$$

Ecco i calcoli:

Calcoliamo solo il numeratore perche' il denominatore e' gia' calcolato e vale -1

$$\begin{array}{ccc|c}
 2 & 1 & 0 & \\
 3 & 1 & 1 & \\
 2-t & 1 & 0 &
 \end{array} =$$

conviene sviluppare secondo la terza colonna (e' diverso da zero solo l'elemento di posto _{2,3} dispari)

$$\begin{array}{ccc|c}
 2 & 1 & 0 & \\
 3 & 1 & 1 & \\
 2-t & 1 & 0 &
 \end{array} = -1 \cdot \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ 2-t & 1 & \end{array} = -2 + (2-t) = -2 + 2 - t = -t$$

quindi

$$\begin{array}{ccc|c}
 2 & 1 & 0 & \\
 3 & 1 & 1 & \\
 2-t & 1 & 0 &
 \end{array} \xrightarrow{-t}$$

$$x = \frac{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}}{-1} = t$$

Calcolo la y

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 0 & \\
 0 & 3 & 1 & \\
 0 & 2-t & 0 &
 \end{array}$$

$$y = \frac{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}}{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}} = 2 - t \quad \text{Calcoli}$$

Ecco i calcoli:

Calcoliamo solo il numeratore perche' il denominatore e' gia' calcolato e vale -1

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 3 & 1 & \\ 0 & 2-t & 0 & \end{array}$$

conviene sviluppare secondo la prima colonna

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 3 & 1 & \\ 0 & 2-t & 0 & \end{array} = 1 \cdot \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & \\ 2-t & 0 & \end{array} = -(2-t) = t-2$$

quindi

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 3 & 1 & \\ 0 & 2-t & 0 & \end{array} \quad y = \frac{t-2}{-1} = 2-t$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Calcolo la z

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 3 & \\ 0 & 1 & 2-t & \end{array} \quad z = \frac{t+1}{-1} = t+1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

[Calcoli](#)

Ecco i calcoli:

Calcoliamo solo il numeratore perche' il denominatore e' gia' calcolato e vale -1

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 3 & \\ 0 & 1 & 2-t & \end{array}$$

conviene sviluppare secondo la prima colonna

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 3 & \\ 0 & 1 & 2-t & \end{array} = 1 \cdot \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \\ 1 & 2-t & \end{array} = 2-t-3 = -t-1$$

quindi

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2-t \end{array} \right| \\
 y = \frac{-t-1}{-1} = t+1 \\
 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Quindi ho il risultato:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

Ho quindi infinite ∞^1 soluzioni al variare di t

(2) Sistema lineare omogeneo

Se il sistema e' lineare omogeneo di n equazioni in n incognite invece devi

1. **Controllare la matrice incompleta e vedere se il rango vale n : se vale n allora l'unica soluzione e' la soluzione banale:**

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} = 0 \\ x_n = 0 \end{cases}$$

2. **Se il rango e' uguale ad un numero s inferiore a n allora devo scegliere le equazioni corrispondenti al determinante il cui valore sia diverso da zero e considerare solo un numero di incognite uguale al numero di equazioni considerate spostando le altre incognite dopo l'uguale trattandole come fossero parametri e risolvere il sistema che ottengo con il metodo di Cramer (o di sostituzione). Otterro' un numero ∞^{n-s} di soluzioni, tra cui anche la soluzione banale**

Ripeto la nota della pagina precedente: fino a 4 incognite useremo le lettere

x, y, z, t

mentre invece da 5 incognite in avanti useremo

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \dots$

(3) Sistema lineare con parametro

Quando all'interno di un sistema hai un parametro e' interessante vedere come, al variare del parametro il sistema puo' ammettere una, nessuna o infinite soluzioni: siccome qui e' possibile racchiudere un po' tutta la teoria sin qui sviluppata questi esercizi sono piuttosto comuni, soprattutto negli esami di maturita' scientifica

Vediamo ad esempio questo esercizio, parte di un esercizio di esame

Maturita' scientifica sperimentale 1993 sessione suppletiva (prima parte del secondo esercizio)

Si stabiliscano le relazioni cui debbono soddisfare a e b affinche' il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} ax + 2y + bz = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay + bz = 1 \end{cases}$$

ammetta un'unica soluzione o infinite soluzioni o nessuna soluzione

$$\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & b & 1 \end{vmatrix}$$

Matrice incompleta

Matrice completa

Per avere una sola soluzione la matrice completa ed incompleta dovranno avere rango 3, quindi basterà che il determinante della matrice incompleta sia diverso da zero

Lo calcolo

$$\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 2ab - a^3 + 2a - 3b \quad \text{Calcoli}$$

Ecco i calcoli:

Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} =$$

sviluppo secondo la prima colonna

$$\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & b \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & b \\ a & b \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & b \\ 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a(b - a^2) - 1(2b - ab) + 1(2a - b) = \\ &= ab - a^3 - 2b + ab + 2a - b = \\ &= 2ab - a^3 + 2a - 3b \end{aligned}$$

Siccome ho due parametri a e b mi conviene esplicitare rispetto ad un solo parametro

Se il determinante è diverso da zero

$$2ab - a^3 + 2a - 3b \neq 0$$

allora esplicitando b ottengo (esplicito b perché è più semplice)

$$b(2a - 3) - a^3 + 2a \neq 0$$

Anche se c'è diverso ci si comporta come in un'equazione

$$b(2a - 3) \neq a^3 - 2a$$

e quindi

$$b \neq \frac{a^3 - 2a}{(2a - 3)}$$

in questo caso il sistema ammette una sola soluzione se invece abbiamo

$$b = \frac{a^3 - 2a}{(2a - 3)}$$

allora la matrice incompleta ha rango 2 mentre i tre minori di ordine 3 della matrice completa diversi da quello calcolato valgono

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2 \quad \text{Calcoli}$$

Ecco i calcoli:

Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} =$$

sviluppo secondo la prima colonna

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a(1-a) - 1(2-a) + 1(2-1) = \\ &= a - a^2 - 2 + a + 2 - 1 = \\ &= -a^2 + 2a - 1 = \\ &= -(a^2 - 2a + 1) = \\ &= -(a-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-b) \quad \text{Calcoli}$$

Ecco i calcoli:

Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} =$$

sviluppo secondo la prima colonna (ormai mi sono abituato ad usare questa, ma si può sviluppare secondo la riga o la colonna che si vuole)

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a(a-b) - 1(b-b) + 1(b-a) = \\ &= a^2 - ab + b - a = \end{aligned}$$

Scompongo: è un [raccoglimento parziale](#)

$$= a(a-b) - 1(-b+a) =$$

siccome $(a-b)$ e $(-b+a)$ sono lo stesso binomio, raccolgo ed ottengo

$$= (a-b)(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(2-a) \quad \text{Calcoli}$$

Ecco i calcoli:

Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} =$$

continuo a sviluppare secondo la prima colonna

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(a-b) - 1(b-b) + a(b-a) =$$

$$= 2a - 2b + ab - a^2 =$$

Scompongo: e' un [raccoglimento parziale](#)

$$= 2(a-b) - a(-b+a) =$$

siccome $(a-b)$ e $(-b+a)$ sono lo stesso binomio, raccolgo ed ottengo

$$= (a-b)(2-a)$$

e se cerco la soluzione comune:

$$\begin{cases} -(a-1)^2 = 0 \\ (a-1)(a-b) = 0 \\ (a-b)(2-a) = 0 \end{cases}$$

Ecco i calcoli:

Qui non c'è nemmeno bisogno di risolvere il sistema

(in caso volessi risolverlo devi considerare solo due equazioni perché hai due incognite e la seconda e la terza equazione sono uguali; quindi dovrai prendere la prima ed una delle altre due)

posso osservare semplicemente che tutto è uguale a zero quando

$$a = 1$$

e sono nulle la seconda e la terza quando

$$a = b$$

Quindi:

Tutte e tre le equazioni si annullano se

$$a = 1$$

Mentre si annullano solo la seconda e la terza se

$$b = a \neq 1$$

avro' che le prime due equazioni si annullano se

$$a = 1$$

Mentre la seconda e la terza si annullano se

$$b = a$$

e la terza si annulla anche se

$$a = 2$$

Quindi raccogliendo potremo dire:

- Se

$$b \neq \frac{a^3 - 2a}{(2a-3)}$$

Allora avremo una sola soluzione

- Se

$$b = \frac{a^3 - 2a}{(2a-3)}$$

allora distinguiamo i casi

- se $a \neq 1$ $a \neq 2$ od anche $a \neq b$ allora il sistema non ammette soluzioni
- se $a = 1$ oppure $a = 2$ od anche $a = b$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni (approfondire)

d) Sistema di k equazioni in n incognite

Come argomento teorico raccoglie un po' tutto quanto fatto sinora senza aggiungere cose significative;

facciamone un breve cenno distinguendo i tre casi:

- $k > n$
- $k = n$
- $k < n$

Sistema di k equazioni in n incognite

$k > n$

Per semplicità facciamo un esempio pratico: supponiamo di avere 8 equazioni in 5 incognite

- se non ho equazioni linearmente dipendenti allora il sistema non ammette soluzioni
Ho 8 equazioni in 5 incognite quindi 3 equazioni portano informazioni in contrasto con le altre ed i ranghi delle matrici completa ed incompleta saranno diversi
- Il sistema non ammette soluzioni nemmeno se ho solamente una o due equazioni linearmente dipendenti da altre perché i ranghi della matrice completa ed incompleta sarebbero diversi.
avrei 7 equazioni indipendenti in 5 incognite oppure 6 equazioni indipendenti in 5 incognite, il che significa che qualche informazione è in contrasto con altre ed anche qui i ranghi della matrice completa ed incompleta sono diversi.
- Se ho tre equazioni linearmente dipendenti da altre il sistema si riduce a 5 equazioni in 5 incognite e quindi, se le equazioni sono compatibili, ammette una sola soluzione
In questo caso le informazioni portate dalle 5 equazioni determinano le 5 incognite e i ranghi delle matrici completa ed incompleta sono uguali a 5
- Se le equazioni sono compatibili e quelle linearmente dipendenti sono 4,5,6,... allora il mio sistema avrà $\infty^1, \infty^2, \infty^3, \dots$ soluzioni
Come già visto avremo che alcune equazioni daranno le stesse informazioni di altre e quindi alcune incognite vanno portate dopo l'uguale per avere tante equazioni linearmente indipendenti quante sono le incognite. in tal caso i ranghi delle matrici completa ed incompleta saranno uguali a 4, 3, 2...

in ogni caso comunque basterà che due equazioni portino informazioni in contrasto fra loro (siano incompatibili) per avere un sistema impossibile.

Esempio di equazioni non compatibili

$$x+y+z+t = 1$$

$$x+y+z+t = 2$$

sono incompatibili perché la somma.

Sistema di k equazioni in n incognite

$k = n$

In questo caso, essendo il numero di equazioni pari a quello delle incognite possiamo rifarci ad un sistema di n equazioni in n incognite.

Sistema di k equazioni in n incognite

$k < n$

Per semplicità facciamo anche qui un esempio pratico: supponiamo di avere 5 equazioni in 7 incognite

In tal caso scelgo 5 incognite e porto le altre 2 dopo l'uguale come se fossero dei parametri e poi mi comporto come per un sistema di n equazioni in n incognite.

Mi conviene scegliere, se possibile, le incognite da mantenere prima dell'uguale in modo tale che il determinante della matrice incompleta risultante sia diverso da zero: mi risparmierei parecchi problemi

3. Sistemi di grado superiore al primo

Sono sistemi che dipendono, per la loro soluzione, dal risolvere un'equazione di grado maggiore di uno

- [Grado di un sistema](#)
- [Sistemi di secondo grado in due incognite](#)
- [Sistemi di secondo grado a più incognite](#)
- [Sistemi di grado superiore](#)
- [Sistemi simmetrici](#)
- [Sistemi omogenei](#)
- [Sistemi che si risolvono con artifici](#)

a) Grado di un sistema

Il grado di un sistema si calcola moltiplicando i gradi delle equazioni componenti; ad esempio:

$$\begin{cases} x^3 + y^4 = 9 \\ x^2 - y = 1 \end{cases}$$

e' di ottavo grado (la prima equazione e' di quarto grado e la seconda di grado 2 e $4 \cdot 2 = 8$)
La sua soluzione dipende dalla soluzione di un'equazione di grado 8 ed avra' 8 soluzioni (reali distinte, reali coincidenti o complesse coniugate)

Per soluzione si intende una coppia di valori in x ed y come:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

b) Sistemi di secondo grado in due incognite

E' il sistema fra un'equazione di primo grado ed un'equazione di secondo grado:

Il metodo utilizzato per la soluzione sara' la sostituzione; allora la soluzione del sistema dipendera' dalla soluzione di un'equazione di secondo grado

Otterremo quindi 2 coppie in x ed y come soluzioni per il nostro sistema

Vediamo un paio di esercizi per

- [Sistema numerico](#)
- [Sistema letterale](#)

Sistema numerico

Vediamo un paio di esercizi

1) Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Il sistema e' di secondo grado perche' la prima equazione e' di grado 2 e la seconda di grado 1
ricavo la x dalla seconda equazione e sostituisco il valore trovato nella prima equazione:

$$\begin{cases} (y+1)^2 + y^2 = 5 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

eseguo i calcoli (al posto della seconda equazione metto una linea per indicare che non la uso):

$$\begin{cases} y^2 + 2 + 1 + y^2 = 5 \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2 + 2y - 4 = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

Risolvero l'equazione.; ecco i calcoli:

Risolvi l'equazione $y^2 + y - 2 = 0$
applicando la formula risolutiva:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = -2$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il più:

$$y_1 = \frac{-1 - 3}{2} \quad y_1 = -2$$

$$y_2 = \frac{-1 + 3}{2} \quad y_2 = 1$$

Ho quindi le soluzioni

$$y_1 = -2 \quad y_2 = 1$$

Ora devo sostituire i valori trovati **uno alla volta** al posto dell'equazione mancante e calcolare le x corrispondenti

- Primo valore $y =$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = -2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

- Secondo valore $y = 1$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Otengo quindi le soluzioni:

Prima soluzione: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ Seconda soluzione: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Di solito prima di avere il sistema ridotto a forma normale bisogna eseguire calcoli più o meno difficili.

Vediamo un esempio con calcoli semplici

2)

Risolvi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2(x + y)^2 - (x - 1)(3x + y) = x - 1 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

eseguo i calcoli:

$$\begin{cases} 2(x^2 + 2xy + y^2) - (3x^2 + xy - 3x - y) = x - 1 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 2y^2 - 3x^2 - xy + 3x + y - x + 1 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Ora il sistema e' ridotto a forma normale: ricavo la x dalla seconda equazione e sostituisco il valore trovato nella prima equazione:

$$\begin{cases} -(-2y - 4)^2 + 3y(-2y - 4) + 2y^2 + 2(-2y - 4) + y + 1 = 0 \\ x = -2y - 4 \end{cases}$$

eseguo i calcoli (al posto della seconda equazione metto una linea per indicare che non la uso):

$$\begin{cases} -(4y^2 + 16y + 16) - 6y^2 - 12y + 2y^2 - 4y - 8 + y + 1 = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y^2 - 16y - 16 - 6y^2 - 12y + 2y^2 - 4y - 8 + y + 1 = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8y^2 - 31y - 23 = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

cambio di segno:

$$\begin{cases} 8y^2 + 31y + 23 = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

Risolvere l'equazione; ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione $8y^2 + 31y + 23 = 0$

appliciamo la formula:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 8$$

$$b = 31$$

$$c = 23$$

$$y_{1,2} = \frac{-31 \pm \sqrt{31^2 - 4(8)(23)}}{16}$$

$$y_{1,2} = \frac{-31 \pm \sqrt{961 - 736}}{16}$$

$$y_{1,2} = \frac{-31 \pm \sqrt{225}}{16}$$

$$y_{1,2} = \frac{-31 \pm 15}{16}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il piu':

$$y_1 = \frac{-31 - 15}{16} = -\frac{23}{8} \quad y_2 = \frac{-31 + 15}{16} = -1$$

Ho quindi le soluzioni

$$y_1 = -\frac{23}{8} \quad y_2 = -1$$

Ora devo sostituire i valori trovati **uno alla volta** al posto dell'equazione mancante e calcolare le x corrispondenti

- Primo valore $y = -23/8$

$$y = -23/8$$

$$x = -2y - 4$$

$$y = -23/8$$

$$x = -2(-23/8) - 4 = 23/4 - 4$$

$$y = -23/8$$

$$x = 7/4$$

- Secondo valore $y = -1$

$$y = -1$$

$$x = -2y - 4$$

$$y = -1$$

$$x = -2(-1) - 4 = 2 - 4$$

$$y = -1$$

$$x = -2$$

Otteniamo quindi le soluzioni

Prima soluzione: $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

Seconda soluzione: $\begin{cases} x = 7/4 \\ y = -23/8 \end{cases}$

Ho ordinato le soluzioni secondo i valori della x: dal piu' piccolo al piu' grande, intendendo per piu' piccolo quello piu' spostato a sinistra verso i valori negativi

Sistema letterale - Vediamo un esercizio con un sistema di secondo grado letterale

Qui devi sapere bene tutto il calcolo letterale: questi esercizi possono essere resi anche molto difficili come calcoli; noi vediamone uno semplice

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 4a = 2(a-1)^2 \\ x + y = 2a \end{cases}$$

Prima di tutto dovremo risolvere le operazioni in modo da ridurre il sistema ad una forma normale:

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 4a = 2(a^2 - 2a + 1) \\ x + y = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 4a = 2a^2 - 4a + 2 \\ x + y = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 4a - 2a^2 + 4a - 2 = 0 \\ x + y = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 - 2a^2 + 8a - 2 = 0 \\ x + y = 2a \end{cases}$$

Il sistema e' di secondo grado perche' la prima equazione e' di grado 2 e la seconda di grado 1

ricavo la y dalla seconda equazione e sostituisco il valore trovato nella prima equazione (conviene ricavare la y altrimenti se ricavo la x devo anche moltiplicare per 3):

$$\begin{cases} 3x^2 - (2a - x)^2 - 2a^2 + 8a - 2 = 0 \\ y = 2a - x \end{cases}$$

eseguo i calcoli (al posto della seconda equazione metto una linea per indicare che non la uso):

$$\begin{cases} 3x^2 - (4a^2 - 4ax + x^2) - 2a^2 + 8a - 2 = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 4a^2 + 4ax - x^2 - 2a^2 + 8a - 2 = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 4ax - 6a^2 + 8a - 2 = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

divido per 2 tutti i termini della prima equazione

$$x^2 + 2ax - 3a^2 + 4a - 1 = 0$$

Risolvere l'equazione; ecco i calcoli:

Risolvi l'equazione

$$x^2 + 2ax - 3a^2 + 4a - 1 = 0$$

nelle equazioni letterali, quando possibile, conviene applicare la [formula ridotta](#)

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

facciamo attenzione a non confondere la **a** della formula con la **a** lettera dell'esercizio

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$\beta = a$$

$$c = -3a^2 + 4a - 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - (1)(-3a^2 + 4a - 1)}}{1}$$

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2 - 4a + 1}$$

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{4a^2 - 4a + 1}$$

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{(2a - 1)^2}$$

Posso eliminare tra loro quadrato e radice

$$x_{1,2} = -a \pm (2a - 1)$$

la parentesi e' essenziale, perche' davanti all'espressione ho anche il segno meno
Ora prendo una volta il meno ed una volta il piu'

$$\begin{array}{ll} x_1 = -a - 2a + 1 & x_1 = -3a + 1 \\ x_2 = -a + 2a - 1 & x_2 = a - 1 \end{array}$$

Ho quindi le soluzioni

$$x_1 = -3a + 1 \quad x_2 = a - 1$$

Ora devo sostituire i valori trovati **uno alla volta** al posto dell'equazione mancante e calcolare le x corrispondenti

- Primo valore $x = -3a + 1$

$$\begin{cases} x = -3a + 1 \\ y = 2a - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3a + 1 \\ y = 2a + 3a - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3a + 1 \\ y = 5a - 1 \end{cases}$$

- Secondo valore $x = a - 1$:

$$\begin{cases} x = a - 1 \\ y = 2a - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a - 1 \\ y = 2a - a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a - 1 \\ y = a + 1 \end{cases}$$

Otengo quindi le soluzioni

$$\text{Prima soluzione: } \begin{cases} x = -3a + 1 \\ y = 5a - 1 \end{cases} \quad \text{Seconda soluzione: } \begin{cases} x = a - 1 \\ y = a + 1 \end{cases}$$

c) Sistemi di secondo grado a piu' incognite

Per risolverli devi sostituire le incognite una alla volta sino ad avere un'equazione in una sola incognita e quindi risolvere l'equazione

Vediamo un esercizio con 3 incognite:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 6 \\ x - 2y - z = -1 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Ricavo la z dall'ultima equazione e la sostituisco nelle altre due:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (6 - x - y)^2 = 6 \\ x - 2y - (6 - x - y) = -1 \\ z = 6 - x - y \end{cases}$$

eseguo i calcoli; al posto della terza equazione (ormai usata) metto una linea:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (36 + x^2 + y^2 - 12x - 12y + 2xy) = 6 \\ x - 2y - 6 + x + y = -1 \\ \hline \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 36 - x^2 - y^2 + 12x + 12y - 2xy = 6 \\ 2x - y = 5 \\ \hline \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2xy + 12x + 12y = 42 \\ 2x - y = 5 \\ \hline \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 17/2 \\ y = 2(17/2) - 5 = 17 - 5 = 12 \\ z = 6 - x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 17/2 \\ y = 12 \\ z = 6 - 17/2 - 12 = -29/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 17/2 \\ y = 12 \\ z = -29/2 \end{cases}$$

Otengo quindi le soluzioni

$$\text{Prima soluzione: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{Seconda soluzione: } \begin{cases} x = 17/2 \\ y = 12 \\ z = -29/2 \end{cases}$$

d) Sistemi di grado superiore

Per risolvere un sistema di grado superiore occorre risolvere un'equazione di grado superiore al secondo

Vediamo un esercizio: Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 37 \\ xy = 6 \end{cases}$$

e' un sistema di quarto grado perche' le due equazioni che lo compongono sono di secondo grado, quindi ci aspettiamo una equazione di quarto grado e quindi con 4 soluzioni ricavo y dalla seconda equazione:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 37 \\ y = 6/x \end{cases}$$

devo pero' porre la condizione $x \neq 0$

ora vado a sostituire il valore della y trovato al posto della y nella prima equazione:

$$\begin{cases} x^2 + (6/x)^2 = 37 \\ \text{-----} \end{cases}$$

sviluppo il quadrato sia al numeratore che al denominatore:

$$\begin{cases} x^2 + 36/x^2 = 37 \\ \text{-----} \end{cases}$$

ora faccio il minimo comune multiplo x^2

$$\begin{cases} \frac{x^4 + 36}{x^2} = \frac{37x^2}{2} \\ \text{-----} \end{cases}$$

avendo supposto x diverso da zero posso eliminare il denominatore:

$$\begin{cases} x^4 + 36 = 37x^2 \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 - 37x^2 + 36 = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

ora devo risolvere l'equazione biquadratica. Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$x^4 - 37x^2 + 36 = 0$$

pongo $x^2 = z$ e quindi $x^4 = z^2$ ed ottengo

$$z^4 - 37z^2 + 36 = 0$$

risolvo rispetto a z:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$z_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{(37^2 - 4 \cdot 36)}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 144}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{37 \pm 35}{2}$$

- $z_1 = (37 + 35)/2 = 72/2 = 36$

- $z_2 = (37 - 35)/2 = 2/2 = 1$

Ora, essendo $z = x^2$ devo risolvere le due equazioni:

- $x^2 = 36$

- $x^2 = 1$

- risolvo la prima

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = +6$$

- risolvo la seconda

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = +1$$

ottengo le 4 soluzioni

$$x_1 = -6 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 6$$

Ora devo sostituire i valori trovati uno alla volta alla x nella seconda equazione per trovare il valore della y

- Primo valore $x_1 = -6$

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = 6/(-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{cases}$$

- Secondo valore $x_2 = -1$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 6/(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -6 \end{cases}$$

- Terzo valore $x_3 = 1$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 6/1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 6 \end{cases}$$

- Quarto valore $x_4 = 6$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 6/6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 6 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

Otengo quindi le soluzioni (4 come avevamo previsto):

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 6 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

e) Sistemi simmetrici

Diremo che un sistema e' simmetrico se quando scambiamo fra loro le x e le y il sistema non cambia

Sono ad esempio simmetrici i sistemi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = -19 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 15 \\ x^2 + y^2 + x + y = 36 \end{cases}$$

- Soluzione di un sistema simmetrico elementare
- Formule di Waring
- Soluzione di sistemi simmetrici generali
- Sistemi riconducibili a simmetrici

Per poterli risolvere useremo le regole della somma e prodotto delle radici nelle equazioni di secondo grado, ma per poter utilizzare tali regole dovremo saper utilizzare le formule di Waring

(1) Soluzione di un sistema simmetrico elementare

Chiameremo sistema simmetrico elementare un sistema in cui abbiamo un'equazione con la somma delle incognite e l'altra equazione con il loro prodotto:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

in pratica equivale a risolvere il problema [gia' visto](#) di trovare due numeri di cui conosciamo la somma ed il prodotto; cioe' bastera' risolvere un'equazione di secondo grado in z del tipo

$$z^2 - sz + p = 0$$

con **s** somma delle incognite e **p** prodotto delle incognite

Vediamo un esempio; risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

considero l'equazione

$$z^2 - sz + p = 0$$

con

$$s = x + y = 5$$

$$p = x \cdot y = 6$$

Otteniamo l'equazione

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

per trovare x ed y risolviamo l'equazione

Applico la formula risolutiva:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 6$$

sostituiamo nella formula:

$$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu' :

$$z_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2 \qquad z_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

ogni soluzione trovata e' una volta x ed una volta y infatti il sistema simmetrico implica che le soluzioni siano simmetriche:

Quindi le due soluzioni saranno

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

$$y_1 = 3 \qquad y_2 = 2$$

Puoi verificare che hai fatto giusto facendone semplicemente la somma ed il prodotto

(2) Formule di Waring

Ogni sistema simmetrico si puo' trasformare nell'insieme di uno o piu' sistemi simmetrici elementari

Le formule di Waring ci permettono di eseguire tali trasformazioni; vediamole:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

Dimostrazione:

dimostriamo la formula

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

Partiamo dall'[uguaglianza](#) (quadrato del binomio)

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

leggiamo a rovescio

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

porto il 2xy dopol'uguale

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$$

Dimostrazione:

Dimostriamo la formula

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

Partiamo dall'uguaglianza (quadrato del binomio)

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

leggiamo a rovescio

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

porto il $-2xy$ dopol'uguale

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

Dimostrazione:

Dimostriamo la formula

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x+y)$$

Partiamo dall'uguaglianza (cubo del binomio)

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

leggiamo a rovescio

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$$

raccolgo $3xy$ fra il secondo ed il terzo termine al primo membro

$$x^3 + 3xy(x+y) + y^3 = (x + y)^3$$

porto il $3xy(x+y)$ dopol'uguale

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$

Dimostrazione:

Dimostriamo la formula

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x-y)$$

Partiamo dall'uguaglianza (cubo del binomio)

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

leggiamo a rovescio

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$$

raccolgo $-3xy$ fra il secondo ed il terzo termine al primo membro

$$x^3 - 3xy(x-y) - y^3 = (x - y)^3$$

porto il $-3xy(x-y)$ dopol'uguale

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x-y)$$

$$x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2$$

Dimostrazione:

Dimostriamo la formula

$$x^4 + y^4 = (x + y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2$$

Partiamo dall'uguaglianza (Potenza quarta del binomio)

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

leggiamo a rovescio

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = (x + y)^4$$

considero il termine centrale nel primo membro come differenza:

$$6x^2y^2 = 8x^2y^2 - 2x^2y^2$$

in questo modo posso pensare $8x^2y^2$ come un doppio prodotto di un quadrato (dopo aver raccolto)

$$x^4 + 4x^3y + 8x^2y^2 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = (x + y)^4$$

Adesso raggruppo entro parentesi i termini che mi interessano

$$x^4 + (4x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3) - 2x^2y^2 + y^4 = (x + y)^4$$

Tra i termine entro parentesi raccolgo $4xy$

$$x^4 + 4xy(x^2 + 2xy + y^2) - 2x^2y^2 + y^4 = (x + y)^4$$

Adesso il termine entro parentesi e' il quadrato di un binomio

$$x^4 + 4xy(x + y)^2 - 2x^2y^2 + y^4 = (x + y)^4$$

e adesso lasciando a destra solamente $x^4 + y^4$ e trasportando gli altri temrini dopo l'uguale ottengo

$$x^4 + y^4 = (x + y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2$$

(3) Soluzione di sistemi simmetrici generali

Ogni sistema simmetrico si puo' trasformare nell'insieme di uno o piu' sistemi simmetrici elementari

A me sono sempre piaciute: e' come risolvere un cruciverba od un Sudoku; volta per volta devi cercare il metodo migliore

Vediamo il metodo su alcuni esercizi

1) $\begin{cases} xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$ **Svolgimento:**

E' un sistema di quarto grado perche' entrambe le equazioni componenti sono di secondo grado

Applico la [prima formula di Waring](#) alla seconda equazione:

$$\begin{cases} xy = 15 \\ (x+y)^2 - 2xy = 34 \end{cases}$$

Sostituisco il valore di xy dalla prima equazione nella seconda:

$$\begin{cases} xy = 15 \\ (x+y)^2 - 2(15) = 34 \end{cases}$$

faccio i calcoli:

$$\begin{cases} xy = 15 \\ (x+y)^2 - 30 = 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 15 \\ (x+y)^2 = 34 + 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 15 \\ (x+y)^2 = 64 \end{cases}$$

adesso siccome ho $(x+y)^2$ posso fare la radice per trovare $(x+y)$ ed, siccome le radici di 64 sono -8 e +8 ottengo i due sistemi equivalenti al sistema di partenza:

$$\begin{cases} xy = 15 \\ x + y = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 15 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Risolvero la prima:

$$\begin{cases} xy = 15 \\ x + y = -8 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 + 8z + 15 = 0$$

risolvo ed ottengo:

$$z_1 = -3$$

$$z_2 = -5$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$z^2 + 8z + 15 = 0$$

appliciamo la formula ridotta:

$$z_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 8 \quad b/2 = 4$$

$$c = 15$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - (1)(15)}}{1}$$

$$z_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 15}$$

$$z_{1,2} = -4 \pm \sqrt{1}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il piu' ed ottengo:

$$z_1 = -4 + 1 = -3$$

$$z_2 = -4 - 1 = -5$$

Ho quindi le soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

Risolvero la seconda:

$$\begin{cases} xy = 15 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 - 8z + 15 = 0$$

risolvero ed ottengo

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = 5$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$z^2 - 8z + 15 = 0$$

appliciamo la formula ridotta:

$$z_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -8 \quad b/2 = -4$$

$$c = 15$$

$$z_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4^2 - (1)(15)}}{1}$$

$$z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15}$$

$$z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{1}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il piu' ed ottengo:

$$z_1 = 4 - 1 = 3$$

$$z_2 = 4 + 1 = 5$$

Ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

Raccogliendo ho le 4 soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 5 \\ y_4 = 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

Svolgimento:

E' un sistema di secondo grado perche' la prima equazione e' di primo grado e la seconda di secondo grado

Applico la [prima formula di Waring](#) alla seconda equazione:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)^2 - 2xy = 13 \end{cases}$$

$$(x + y)^2 - 2xy = 13$$

Sostituisco il valore di (x+y) dalla prima equazione nella seconda:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (1)^2 - 2xy = 13 \end{cases}$$

faccio i calcoli:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 1 - 2xy = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2xy = -1 + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2xy = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 - z - 6 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = -2$$

Ecco i calcoli:

Risolviemo l'equazione

$$z^2 - z - 6 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = -6$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Ora prendo una volta il piu' ed una volta il meno:

$$z_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad z_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 - x - y = 60 \end{cases}$$

Svolgimento:

Sembra un sistema di terzo grado, ma, essendo simmetrico, troveremo solamente due soluzioni: infatti e' di secondo grado come puoi vedere usando il metodo di sostituzione

Applico la [terza formula di Waring](#) alla seconda equazione; metto anche in evidenza il meno davanti alla x ed alla y:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) - (x + y) = 60 \end{cases}$$

Sostituisco il valore di (x+y) dalla prima equazione nella seconda:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (1)^3 - 3xy(1) - 1 = 60 \end{cases}$$

faccio i calcoli:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 1 - 3xy - 1 = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -3xy = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3xy = -60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -20 \end{cases}$$

Considero l'equazione associata

$$z^2 - z - 20 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$z_1 = 5$$

$$z_2 = -4$$

Ecco i calcoli:

Risolvi l'equazione

$$z^2 - z - 20 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = -20$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-20)}}{2(1)}$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{2}$$

Ora prendo una volta il più ed una volta il meno:

$$z_1 = \frac{1 + 9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad z_2 = \frac{1 - 9}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^3y + xy^3 = 290 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

Svolgimento:

Nella prima equazione metto in evidenza xy:

$$xy(x^2 + y^2) = 290$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

Sostituisco il valore di $(x^2 + y^2)$ dalla seconda equazione nella prima:

$$xy(29) = 290$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

$$29xy = 290$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

divido per 29 nella prima equazione:

$$xy = 10$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

adesso applico la [prima formula di Waring](#) alla seconda equazione:

$$xy = 10$$

$$(x + y)^2 - 2xy = 29$$

sostituisco il valore di xy della prima equazione nella seconda:

$$xy = 10$$

$$(x + y)^2 - 2(10) = 29$$

faccio i calcoli:

$$xy = 10$$

$$(x + y)^2 - 20 = 29$$

$$xy = 10$$

$$(x + y)^2 = 29 + 20$$

$$xy = 10$$

$$(x + y)^2 = 49$$

Adesso siccome ho $(x+y)^2$ posso fare la radice per trovare $(x+y)$ ed, siccome le radici di 49 sono -7 e +7 ottengo i due sistemi equivalenti al sistema di partenza:

$$\begin{cases} xy = 10 \\ x + y = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 10 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Risolvero la prima:

$$\begin{cases} xy = 10 \\ x + y = -7 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 + 7z + 10 = 0$$

risolvero ed ottengo

$$z_1 = -2$$

$$z_2 = -5$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$z^2 + 7z + 10 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 7$$

$$c = 10$$

$$z_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$z_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{-7 \pm 3}{2}$$

Ora prendo una volta il piu' ed una volta il meno:

$$z_1 = \frac{-7 + 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad z_2 = \frac{-7 - 3}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

Risolvero la seconda:

$$\begin{cases} xy = 10 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 - 7z + 10 = 0$$

risolvero ed ottengo

$$z_1 = +2$$

$$z_2 = +5$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$z^2 - 7z + 10 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -7$$

$$c = 10$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Ora prendo una volta il piu' ed una volta il meno:

$$z_1 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad z_2 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = +2 \\ y_1 = +5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = +5 \\ y_2 = +2 \end{cases}$$

Raccogliendo ho le 4 soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -5 \\ y_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 5 \\ y_4 = 2 \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 23 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$$

Svolgimento:

Facciamo qualche passaggio per semplificare un po'

qui mi conviene ricavare (x^2+y^2) dalla seconda equazione e sostituire nella prima:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 23 \\ x^2 + y^2 = 19 - xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 19 - xy + 2x + 2y = 23 \\ x^2 + y^2 = 19 - xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - xy = 23 - 19 \\ x^2 + y^2 = 19 - xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x + y) - xy = 4 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$$

adesso applico la [prima formula di Waring](#) alla seconda equazione:

$$\begin{cases} 2(x + y) - xy = 4 \\ (x + y)^2 - 2xy + xy = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x + y) - xy = 4 \\ (x + y)^2 - xy = 19 \end{cases}$$

[Sottraggo fra loro](#) la prima equazione dalla seconda e la metto a sistema con una delle due equazioni, ad esempio la prima (e' la piu' semplice):

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) = 15 \\ 2(x + y) - xy = 4 \end{cases}$$

Ecco tutti i passaggi:

Ti faccio i calcoli passaggio per passaggio parto dal sistema:

$$\begin{cases} 2(x + y) - xy = 4 \\ (x + y)^2 - xy = 19 \end{cases}$$

Siccome sottraggo la prima dalla seconda per vederlo meglio scrivo il sistema mettendo al primo posto la seconda equazione:

$$\begin{cases} (x + y)^2 - xy = 19 \\ 2(x + y) - xy = 4 \end{cases}$$

Ora sottraggo fra loro i termini delle equazioni

$$(x+y)^2 - xy \qquad \qquad \qquad = \qquad 19$$

$$2(x+y) - xy \qquad \qquad \qquad = \qquad 4$$

$$(x+y)^2 - xy - [2(x+y) - xy] \qquad \qquad \qquad = \qquad 19 - 4$$

Nel risultato faccio cadere le parentesi e, dopo l'uguale, sommo

$$(x+y)^2 - xy - 2(x+y) + xy = 15$$

posso eliminare $-xy$ con $+xy$ ed ottengo

$$(x+y)^2 - 2(x+y) = 15$$

Quest'equazione va rimessa a sistema con una delle due equazioni di partenza (la piu' semplice)

Considero ora la prima equazione: si puo' considerare un'equazione di secondo grado nell'incognita $(x+y)=t$

$$t^2 - 2t - 15 = 0$$

che ha soluzioni

$$t_1 = -3$$

$$t_2 = 5$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$t^2 - 2t - 15 = 0$$

appliciamo la formula ridotta:

$$t_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -2 \quad b/2 = -1$$

$$c = -15$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - (1)(-15)}}{1}$$

$$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 15}$$

$$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{16}$$

$$t_{1,2} = 1 \pm 4$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il piu' ed ottengo:

$$t_1 = 1 - 3 = -3$$

$$t_2 = 1 + 4 = 5$$

Ottengo i due sistemi equivalenti al sistema di partenza:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 2(x + y) - xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2(x + y) - xy = 4 \end{cases}$$

Risolve il primo:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 2(x + y) - xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 2(x + y) - xy = 4 \end{cases}$$

Sostituisco nella seconda -3 al posto di $(x+y)$:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 2(-3) - xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 2(-3) - xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ -xy = 4 + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -10 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$z_1 = -2 \quad z_2 = +5$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = -10$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)}$$

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

Ora prendo una volta il piu' ed una volta il meno:

$$z_1 = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad z_1 = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

Risolve il secondo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2(x + y) - xy = 4 \end{cases}$$

Sostituisco nella seconda 5 al posto di (x+y):

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2(5) - xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -xy = 4 - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

risolvo ed ottengo [Calcoli](#)

$$z_1 = 2$$

$$z_2 = 3$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 6$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Ora prendo una volta il piu' ed una volta il meno:

$$z_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad z_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 53 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

Raccogliendo ho le 4 soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 3 \\ y_4 = 2 \end{cases}$$

6) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 70 \\ xy = 12 \end{cases}$ Svolgimento:

Osserviamo bene le due equazioni: i primi tre termini della prima si possono raggruppare in un quadrato, mentre fra gli altri due termini posso raccogliere 3:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + 3(x+y) = 70 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Considero ora la prima equazione: si può considerare un'equazione di secondo grado nell'incognita $(x+y)=t$
 $t^2 + 3t - 70 = 0$

che ha soluzioni

$$t_1 = -10$$

$$t_2 = 7$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$t^2 + 3t - 70 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$c = -70$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-70)}}{2(1)}$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 17}{2}$$

Ora prendo una volta il più ed una volta il meno:

$$t_1 = \frac{-3 - 17}{2} = \frac{-20}{2} = -10 \quad t_2 = \frac{-3 + 17}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Otengo i due sistemi equivalenti al sistema di partenza:

$$\begin{cases} x + y = -10 \\ xy = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Risolvo il primo:

$$x + y = -10$$

$$xy = 12$$

considero l'equazione associata

$$z^2 + 10z - 12 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$z_1 = -5 - \sqrt{37} \quad z_2 = -5 + \sqrt{37}$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$z^2 + 10z - 12 = 0$$

appliciamo la formula ridotta:

$$z_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 10 \quad b/2 = 5$$

$$c = -12$$

$$z_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-1)^2 - (1)(-12)}}{1}$$

$$z_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 + 12}$$

$$z_{1,2} = -5 \pm \sqrt{37}$$

Ora prendo una volta il meno ed una volta il piu' ed ottengo:

$$z_1 = -5 - \sqrt{37} \quad z_2 = -5 + \sqrt{37}$$

Ho quindi le soluzioni

$$x_1 = -5 - \sqrt{37} \quad y_1 = -5 + \sqrt{37}$$

$$y_1 = -5 + \sqrt{37} \quad y_2 = -5 - \sqrt{37}$$

Risolvero il secondo:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 - 7z + 12 = 0$$

risolvero ed ottengo

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = 4$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$z^2 - 7z + 12 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -7$$

$$c = 12$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

Ora prendo una volta il piu' ed una volta il meno:

$$z_1 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad z_2 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Ho quindi le soluzioni

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 4$$

$$y_1 = 4 \quad y_2 = 3$$

Raccogliendo ho le 4 soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -5 - \sqrt{37} \\ y_1 = -5 + \sqrt{37} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -5 + \sqrt{37} \\ y_2 = -5 - \sqrt{37} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 4 \\ y_4 = 3 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Svolgimento:

Potremmo usare la formula di Waring, ma qui possiamo usare un procedimento piu' semplice: eleviamo alla quarta la seconda espressione in modo da avere dappertutto x^4 ed y^4

In questo modo trasformiamo un sistema di grado 8 in un sistema di grado 32, cioè con 32 soluzioni, ma poi vedrai che prenderemo solamente le soluzioni che verificano l'equazione iniziale $xy=2$ e quindi troveremo solo 8 soluzioni accettabili

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x^4 y^4 = 16 \end{cases}$$

Ora poniamo $x^4=q$ ed $y^4=t$; otteniamo:

$$\begin{cases} q + t = 17 \\ q t = 16 \end{cases}$$

che è un sistema simmetrico elementare considero l'equazione associata

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$z_1 = 16 \quad z_2 = 1$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo l'equazione

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -17$$

$$c = 16$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$

$$z_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{2}$$

Ora prendo una volta il più ed una volta il meno:

$$z_1 = \frac{17 + 15}{2} = \frac{32}{2} = 16 \quad z_2 = \frac{17 - 15}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} q_1 = 16 \\ t_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} q_2 = 1 \\ t_2 = 16 \end{cases}$$

Ora devo risolvere i sistemi:

$$\begin{cases} x^4 = 16 \\ y^4 = 1 \end{cases}$$

ed anche:

$$\begin{cases} x^4 = 1 \\ y^4 = 16 \end{cases}$$

Risolvo il primo:

$$\begin{cases} x^4 = 16 \\ y^4 = 1 \end{cases}$$

Ecco come si calcola:

Per risolvere

$$x^4 = 16$$

lo scrivo come

$$x^4 - 16 = 0$$

adesso scompongo il termine prima dell'uguale come un polinomio: è una differenza di quadrati che si scompone:

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

Adesso basta uguagliare a zero ogni fattore ed ottengo le soluzioni

$$x - 2 = 0 \quad x = 2$$

$$x + 2 = 0 \quad x = -2$$

$$x^2 + 4 = 0 \quad x^2 + 4 = 0 \quad x = \pm\sqrt{-4} \quad x = \pm 2i$$

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \\x_2 &= -2 \\x_3 &= 2i \\x_4 &= -2i\end{aligned}$$

(mettiamo anche le soluzioni complesse) dovrei considerare 16 soluzioni: per ottenere tutte le soluzioni devi combinare ognuna delle 4 soluzioni della x con ognuna delle 4 soluzioni della y , ma poi siccome devo rispettare la condizione $xy=2$ allora avremo accettabili solamente le 4 soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2i \\ y_3 = -i \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2i \\ y_4 = +i \end{cases}$$

Il secondo sistema:

$$\begin{cases} x^4 = 1 \\ y^4 = 16 \end{cases}$$

mi dara' le soluzioni simmetriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -i \\ y_3 = 2i \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = +i \\ y_4 = -2i \end{cases}$$

Anche qui considero accettabili solo le 4 soluzioni appaiate nel modo sopradetto perche' devono rispettare la condizione iniziale $xy=2$

Se vuoi ti posso indicare un metodo che puoi sempre applicare per risolvere in modo automatico i sistemi simmetrici; pero' cosi' non e' divertente risolverli.

Te lo faccio vedere su un esercizio:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 22 \\ x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 85 \end{cases}$$

Svolgimento:

Per risolverlo in modo automatico trasformiamo tutti i termini in gruppi del tipo $(x+y)$ ed xy , magari utilizzando anche le formule di Waring; Una volta fatto cio' consideriamo due nuove variabili:

$$x+y = s$$

$$xy = p$$

e sostituiamole; otterremo un sistema di due equazioni in due incognite che potremo risolvere con i metodi noti.

Trovare le soluzioni reali del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 22 \\ x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 85 \end{cases}$$

cerchiamo di evidenziare i gruppi $(x+y)$ ed xy ; nella seconda equazione raccolgo xy fra il secondo ed il terzo termine.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (x + y) = 22 \\ x^3 + y^3 + xy(x + y) = 85 \end{cases}$$

ora applico le [formule di Waring](#) sia alla prima che alla seconda equazione

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy + (x+y) = 22 \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) + xy(x+y) = 85 \end{cases}$$

sommo i fattori simili

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy + (x+y) = 22 \\ (x+y)^3 - 2xy(x+y) = 85 \end{cases}$$

adesso pongo

$$x+y = s$$

$$xy = p$$

ed ottengo:

$$\begin{cases} s^2 - 2p + s = 22 \\ s^3 - 2sp = 85 \end{cases}$$

mi conviene ricavare $2p$ da sopra e sostituirne il valore nella seconda equazione

$$\begin{cases} 2p = s^2 + s - 22 \\ s^3 - s(s^2 + s - 22) = 85 \end{cases}$$

eseguo i calcoli:

$$\begin{cases} 2p = s^2 + s - 22 \\ s^3 - s^3 - s^2 + 22s = 85 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2p = s^2 + s - 22 \\ s^2 - 22s + 85 = 0 \end{cases}$$

la seconda equazione e' un'equazione di secondo grado in s

$$s^2 - 22s + 85 = 0$$

la risolvo ed ottengo:

$$s = 5 \quad s = 17$$

ora sostituisco ad s nella prima equazione una volta 5 ed una volta 17

- sostituisco 5

$$\begin{cases} 2p = 5^2 + 5 - 22 = 8 \\ s = 5 \end{cases}$$
 divido per 2 per ottenere p

$$\begin{cases} p = 4 \\ s = 5 \end{cases}$$
- sostituisco 7

$$\begin{cases} 2p = 17^2 + 17 - 22 = 284 \\ s = 17 \end{cases}$$
 divido per 2 per ottenere p

$$\begin{cases} p = 142 \\ s = 17 \end{cases}$$

Ora, sostituendo ad s e p le loro espressioni ottengo i due sistemi:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 17 \\ xy = 142 \end{cases}$$

Risolvo il primo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = 4$$

Ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Risolvo il secondo:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ xy = 142 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 - 17z + 142 = 0$$

risolvo ed ottengo il termine sotto radice minore di zero

$$\Delta = 289 - 568 = -279 < 0$$

quindi non ho soluzioni reali

Raccogliendo ho le 2 soluzioni reali:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Come vedi non e' che si lavori di meno, si lavora in modo automatico senza dover pensare, cosa che e' del tutto contraria alla Matematica.

Puo' servire al massimo come metodo per scrivere un programma per calcolatore che risolva automaticamente i sistemi simmetrici

(4) Sistemi riconducibili a simmetrici

Talvolta osservando bene un sistema e' possibile, anche se non e' simmetrico, trasformarlo in un sistema simmetrico in modo da riuscire a risolverlo piu' agevolmente

Vediamone alcuni esempi:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x^2 + 9y^2 = 13 \end{cases}$$

Svolgimento:

Osserviamo che nella seconda equazione ci sono i quadrati dei termini presenti nella prima equazione
Poniamo allora $2x=q$ e $3y=t$; otteniamo:

$$\begin{cases} q + t = 5 \\ q^2 + t^2 = 13 \end{cases}$$

ora applichiamo la [prima formula di Waring](#) :

$$\begin{cases} q + t = 5 \\ (q+t)^2 - 2tq = 13 \end{cases}$$

sostituisco il valore di $(q+t)$ nella seconda equazione:

$$\begin{cases} q + t = 5 \\ (5)^2 - 2tq = 13 \end{cases}$$

eseguo i calcoli ed ottengo:

$$\begin{cases} q + t = 5 \\ -2tq = 13 - 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q + t = 5 \\ -2tq = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q + t = 5 \\ tq = 6 \end{cases}$$

che e' un sistema simmetrico elementare; considero l'equazione associata

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$z_1 = 2 \quad z_2 = 3$$

ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} q_1 = 2 & q_2 = 3 \\ t_1 = 3 & t_2 = 2 \end{cases}$$

ora essendo

$$2x = q \text{ avro' } x = q/2$$

$$3y = t \text{ avro' } y = t/3$$

e quindi:

$$\begin{cases} x_1 = 1 & x_2 = 3/2 \\ y_1 = 1 & y_2 = 2/3 \end{cases}$$

Da notare che le soluzioni **non** sono simmetriche.

$$2) \begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{Svolgimento:}$$

Poniamo $2x=q$ e $3y=t$; avremo quindi $x=q/2$ ed $y=t/3$ otteniamo:

$$\begin{cases} q + t = 20 \\ q/2 \cdot t/3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q + t = 20 \\ qt/6 = 6 \end{cases}$$

faccio il minimo comune multiplo nella seconda equazione e tolgo i denominatori:

$$\begin{cases} q + t = 20 \\ qt = 36 \end{cases}$$

che e' un sistema simmetrico elementare; considero l'equazione associata

$$z^2 - 20z + 36 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$z_1 = 2 \quad z_2 = 18$$

ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} q_1 = 2 & q_2 = 18 \\ t_1 = 18 & t_2 = 2 \end{cases}$$

ora essendo

$$x = q/2 \quad \text{e} \quad y = t/3$$

sostituisco ed ottengo:

$$\begin{cases} x_1 = 1 & x_2 = 9 \\ y_1 = 6 & y_2 = 2/3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y = -5 \\ xy = -6 \end{cases} \quad \text{Svolgimento:}$$

Stavolta poniamo $y = -k$; otteniamo:

$$\begin{cases} x - (-k) = -5 \\ x(-k) = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + k = -5 \\ -kx = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + k = -5 \\ kx = 6 \end{cases}$$

E' un sistema simmetrico elementare; considero l'equazione associata

$$z^2 + 5z + 6 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$z_1 = -2 \quad z_2 = -3$$

ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -2 & x_2 = -3 \\ k_1 = -3 & k_2 = -2 \end{cases}$$

ora essendo

$$y = -k$$

sostituisco ed ottengo:

$$\begin{cases} x_1 = -2 & x_2 = -3 \\ y_1 = 3 & y_2 = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 37 \end{cases} \quad \text{Svolgimento:}$$

Anche qui poniamo $y = -k$; otteniamo:

$$\begin{cases} x - (-k) = 1 \\ x^3 - (-k)^3 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + k = 1 \\ x^3 + k^3 = 37 \end{cases}$$

Applico la relativa [formula di Waring](#):

$$\begin{cases} x + k = 1 \\ (x + k)^3 - 3kx(x + k) = 37 \end{cases}$$

Ora sostituisco il valore $(x+k)=1$ nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x + k = 1 \\ (1)^3 - 3kx(1) = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + k = 1 \\ 1 - 3kx = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + k = 1 \\ -3kx = 37 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + k = 1 \\ -3kx = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + k = 1 \\ kx = -12 \end{cases}$$

E' un sistema simmetrico elementare; considero l'equazione associata

$$z^2 - z - 12 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$z_1 = -4 \quad z_2 = 3$$

ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -4 & x_2 = 3 \\ k_1 = 3 & k_2 = -4 \end{cases}$$

ora essendo

$$y = -k$$

sostituisco ed ottengo:

$$\begin{cases} x_1 = -4 & x_2 = 3 \\ y_1 = -3 & y_2 = 4 \end{cases}$$

f) Sistemi omogenei

Un sistema si dice omogeneo se le equazioni, con l'eccezione dei termini noti, hanno tutti i termini con lo stesso grado;

ad esempio e' omogeneo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 96 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

Questo sopra si puo' risolvere anche per sostituzione; vediamo invece come si risolvono quando le equazioni sono di secondo grado

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy = 3 \\ x^2 - 3y^2 + 2xy = 5 \end{cases}$$

Poniamo $y = tx$

otteniamo:

$$\begin{cases} 2x^2 + t^2x^2 - 3tx^2 = 3 \\ x^2 - 3t^2x^2 + 2tx^2 = 5 \end{cases}$$

Metto in evidenza x^2 in entrambe le espressioni prima dell'uguale:

$$\begin{cases} x^2(2 + t^2 - 3t) = 3 \\ x^2(1 - 3t^2 + 2t) = 5 \end{cases}$$

adesso dividiamo membro a membro entrambe le equazioni

$$\frac{x^2(2 + t^2 - 3t)}{x^2(1 - 3t^2 + 2t)} = \frac{3}{5}$$

semplifichiamo per x^2 ed otteniamo

$$\frac{2 + t^2 - 3t}{1 - 3t^2 + 2t} = \frac{3}{5}$$

e, facendo il m.c.m., dopo aver supposto il denominatore diverso da zero (si annulla per $t=1$ e $t=-1/3$ fare link), ottengo

$$\begin{aligned} 5(2 + t^2 - 3t) &= 3(1 - 3t^2 + 2t) \\ 10 + 5t^2 - 15t &= 3 - 9t^2 + 6t \\ 14t^2 - 21t + 7 &= 0 \end{aligned}$$

dividiamo tutto per 7 (cosi' abbiamo meno calcoli)

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$t_1 = 1/2 \quad t_2 = 1$$

ora costruisco un sistema con l'equazione $y=tx$ e con una delle due equazioni del sistema con la t (la piu' facile):

$$\begin{cases} y = tx \\ x^2(1 - 3t^2 + 2t) = 5 \end{cases}$$

e vi sostituisco i valori trovati uno alla volta

Sostituisco $t=1/2$:

$$\begin{cases} y = 1/2 x \\ x^2[1 - 3(1/2)^2 + 2(1/2)] = 5 \end{cases}$$

calcolo:

$$\begin{cases} y = 1/2 x \\ 5/4 x^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1/2 x \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1/2 (\pm 2) \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

ottengo le soluzioni:

$$\begin{cases} y = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Sostituisco $t=1$:

$$\begin{cases} y = 1 \cdot x \\ x^2[1 - 3(1)^2 + 2(1)] = 5 \end{cases}$$

calcolo:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 \cdot (0) = 5 \end{cases}$$

Impossibile perché nessun numero moltiplicato per zero dà 5

Da notare che per $t=1$ si annulla il denominatore che avevamo supposto diverso da zero

Quindi abbiamo le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

g) Sistemi che si risolvono con artifici

Talvolta è possibile risolvere dei sistemi introducendo alcuni artifici di calcolo; purtroppo non esistono regole generali ma solo l'osservazione e l'esercizio ti possono rendere "bravo". Vediamo però assieme alcuni casi che è possibile classificare

- Sostituire un valore od un gruppo di valori con variabili ausiliarie
- Calcolare un'espressione parzialmente
- Utilizzo di espressioni particolari (tipo formule di Waring)
- sommare o sottrarre membro a membro
- Eseguire il rapporto membro a membro

Sostituire un valore od un gruppo di valori con variabili ausiliarie

Devi controllare se un termine o un gruppo di termini compare più volte e sostituirlo con altre variabili in modo da rendere il sistema più semplice

Esempio 1

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 5 \\ x + y = 13 \end{cases}$$

Osserviamo la seconda equazione:

$$x + y = 13$$

per avere gli stessi gruppi di variabili presenti nell'equazione sopra basta aggiungere e togliere 1 (cosa che non cambia di valore l'espressione)

$$x + 1 + y - 1 = 13$$

ora pongo

$$\sqrt{x+1} = t \quad \sqrt{y-1} = u$$

quindi il sistema diventa:

$$\begin{cases} t + u = 5 \\ t^2 + u^2 = 13 \end{cases}$$

Che è un normalissimo [sistema simmetrico](#); applico la [prima formula di Waring](#) alla seconda equazione:

$$\begin{cases} t + u = 5 \\ (t+u)^2 - 2tu = 17 \end{cases}$$

Sostituisco 5 al posto di (t+u):

$$\begin{cases} t + u = 5 \\ 25 - 2tu = 13 \end{cases}$$

eseguo i calcoli ed ottengo:

$$\begin{cases} t + u = 5 \\ tu = 6 \end{cases}$$

considero l'equazione associata

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

risolvo ed ottengo [Calcoli](#)

$$\begin{matrix} z_1 = 2 & z_2 = 3 \\ \begin{cases} t_1 = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} & \begin{cases} t_2 = 3 \\ u_2 = 2 \end{cases} \end{matrix}$$

devo quindi risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{y-1} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} = 3 \\ \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

Ed ottengo come risultato

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 8 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Particolarmente importante è il caso che si presenta nei [problemi con l'ellisse](#) e l'iperbole

[Calcolare un'espressione parzialmente](#)

A volte conviene calcolare il valore di tutto un gruppo per poter risolvere

Vediamone un esempio

[Esempio 1](#)

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{xy}} + \sqrt{\frac{xy}{x+y}} - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Intanto avremo subito le condizioni di realtà (considerando i denominatori diversi da zero)

$$x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$$

Osserviamo poi che le radici sono l'una inversa dell'altra, quindi poniamo:

$$\sqrt{\frac{x+y}{xy}} = t$$

allora la prima equazione del sistema sarà

$$t + \frac{1}{t} - 2 = 0$$

cioè, facendo il minimo comune multiplo e supponendo $t \neq 0$

$$t^2 + 1 - 2t = 0$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0$$

ed ottengo la soluzione (doppia: due soluzioni coincidenti)

$$t = 1$$

Quindi posso scrivere:

$$\sqrt{\frac{x+y}{xy}} = 1$$

che equivale, elevando al quadrato entrambe i membri

$$\frac{x+y}{xy} = 1$$

$$----- = 1$$

$$\frac{xy}{xy}$$

cioè

$$x + y = xy$$

devo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y = xy \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Possiamo farlo per sostituzione; ricavo x dalla seconda equazione e sostituisco nella prima:

$$\begin{cases} x + y = xy \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + y = y^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 2y = 0 \\ x = y \end{cases}$$

ottengo dalla prima equazione i due valori

$y = 0$ che non e' accettabile per le condizioni di realta' iniziali

$y = 2$

ottengo quindi la soluzione:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

o meglio:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Utilizzo di espressioni particolari (tipo formule di Waring)

Talvolta e' possibile utilizzando espressioni particolari riuscire a semplificare le equazioni componenti del sistema e quindi risolverlo piu' facilmente

Vediamone un esempio utilizzando le formule di Waring

Esempio 1; risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = 10 \\ x + z = 6 \\ y + t = 4 \\ y t = 3 \end{cases}$$

Scriviamola cosi':

$$\begin{cases} (x^2 + z^2) - (y^2 + t^2) = 10 \\ x + z = 6 \\ y + t = 4 \\ y t = 3 \end{cases}$$

Ora applichiamo la [prima formula di Waring](#)

$$\begin{cases} (x + z)^2 - 2xz - [(y + t)^2 - 2yt] = 10 \\ x + z = 6 \\ y + t = 4 \\ y t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + z)^2 - 2xz - (y + t)^2 + 2yt = 10 \\ x + z = 6 \\ y + t = 4 \\ y t = 3 \end{cases}$$

Adesso sostituisco ed ottengo:

$$\begin{cases} 6^2 - 2xz - 4^2 + 2(3) = 10 \\ x + z = 6 \\ y + t = 4 \\ y t = 3 \end{cases}$$

cioe', eseguendo i calcoli

$$\begin{cases} xz = 8 \\ x + z = 6 \\ y + t = 4 \\ y t = 3 \end{cases}$$

ora il sistema e' scomponibile in due sistemi simmetrici

risolvo il sistema fra le prime due equazioni

considero l'equazione associata

$$k^2 - 6k + 8 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$k_1 = 2$$

$$k_2 = 4$$

risolvo il sistema fra la terza e la quarta equazione

considero l'equazione associata

$$s^2 - 4s + 3 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 3$$

ho quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ z_1 = 4 \\ y_1 = 1 \\ t_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ z_2 = 4 \\ y_2 = 3 \\ t_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 4 \\ z_3 = 2 \\ y_3 = 1 \\ t_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 4 \\ z_4 = 2 \\ y_4 = 3 \\ t_4 = 1 \end{cases}$$

o meglio, mettendo in ordine, ottengo le 4 quaterne di soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 4 \\ t_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \\ z_2 = 4 \\ t_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 4 \\ y_3 = 1 \\ z_3 = 2 \\ t_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 4 \\ y_4 = 3 \\ z_4 = 2 \\ t_4 = 1 \end{cases}$$

Sommare o sottrarre termine a termine

Puo' essere molto utile se abbiamo gruppi di termini uguali (oppure opposti) nelle due equazioni, bastera' sottrarre (sommare) per eliminarli ed ottenere un'equazione piu' semplice da mettere a sistema

Questo metodo viene normalmente utilizzato in geometria analitica per [trovare le coordinate dei punti comuni a due circonferenze](#)

Esempio 1

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 - 5y = -2 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

dalla prima equazione sottraiamo la seconda

Strano il termine sottraiamo, e ti va anche bene, il mio Prof di analisi all'universita' diceva "sottragghiamo"

$$x^2 + 3xy + 2y^2 - 5y = -2$$

$$x^2 + 3xy + y^2 = 4$$

$$\hline // \quad // \quad y^2 - 5y = -6$$

quindi posso considerare il sistema equivalente (come seconda equazione prendo la piu' semplice):

$$\begin{cases} y^2 - 5y + 6 = 0 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + 3xy + y^2 = 4$$

considero la prima equazione

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

risolvo ed ottengo

$$y_1 = 2$$

$$y_2 = 3$$

quindi il mio sistema si scinde nei due sistemi:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

ossia sostituendo il valore di y

$$\begin{cases} y = 2 \\ x^2 + 6x + 4 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x^2 + 9x + 9 = 4 \end{cases}$$

e sommando i termini simili:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x^2 + 6x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x^2 + 9x + 5 = 0 \end{cases}$$

- Risolvo il primo:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x^2 + 6x = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 6x = 0$$

risolvendo la seconda equazione ottengo

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = -6$$

ottengo quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -6 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

- Risolvo il secondo:

$$\begin{cases} y = 3 \\ x^2 - 9x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 9x + 5 = 0$$

risolvendo la seconda equazione ottengo

$$x_1 = (9 + \sqrt{61})/2 \text{ e } x_2 = (9 - \sqrt{61})/2$$

ottengo quindi le soluzioni

$$x_1 = (9 - \sqrt{61})/2 \quad x_2 = (9 + \sqrt{61})/2$$

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = 3$$

Otengo quindi le 4 coppie di soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -6 \\ y_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = (9 - \sqrt{61})/2 \\ y_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = (9 + \sqrt{61})/2 \\ y_4 = 3 \end{cases}$$

Dividere membro a membro

E' un metodo alternativo al precedente: invece di sommare o sottrarre si possono isolare i termini uguali o proporzionali in un membro e poi dividere; solo provando puoi vedere se conviene piu' questo metodo oppure il precedente; di solito e' poco usato preferendosi usare altri metodi piu' intuitivi

Esempio 1:

Risolvere il sistema:

$$x^2 - 3xy + y^2 - 2x + y + 2 = 0$$

$$x^2 - 3xy + y^2 + y = 0$$

Isoliamo i termini uguali prima dell'uguale:

$$x^2 - 3xy + y^2 = 2x - y - 2$$

$$x^2 - 3xy + y^2 = -y$$

supponendo $x^2 - 3xy + y^2$ diverso da zero ed y diverso da zero divido membro a membro

$$\frac{x^2 - 3xy + y^2}{x^2 - 3xy + y^2} = \frac{-y}{2x - y - 2}$$

$$1 = \frac{-y}{2x - y - 2}$$

$$\frac{x^2 - 3xy + y^2}{x^2 - 3xy + y^2} = \frac{-y}{2x - y - 2}$$

ottengo

$$2x - y - 2$$

$$1 = \frac{-y}{2x - y - 2}$$

$$-y$$

e calcolando

$$-y = 2x - y - 2$$

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

Posso sostituire questa equazione ad una qualunque del mio sistema (naturalmente la prendo al posto della piu' complicata)

quindi il mio sistema equivale al sistema:

$$x = 1$$

$$x^2 - 3xy + y^2 = -y$$

sostituisco il valore $x=1$ nella seconda equazione:

$$x = 1$$

$$1 - 3y + y^2 = -y$$

$$x = 1$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

Nella seconda equazione, senza risolvere, posso osservare che ho il quadrato di un binomio:

$$x = 1$$

$$(y - 1)^2 = 0$$

ottengo quindi la soluzione (doppia)

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = 1$$

devo infine controllare che questi valori sostituiti ad x ed y nei termini che ho messo al denominatore non me li annullino (altrimenti la soluzione non sarebbe accettabile)

$$x^2 - 3xy + y^2 = 1 - 3 + 1 \neq 0$$

$$y = 1 \neq 0$$

La soluzione e' accettabile

E. Matrici e determinanti

In questo capitolo formalizziamo meglio quanto abbiamo gia' visto nel capitolo sui sistemi di 3 equazioni in 3 incognite: Partendo dalle matrici passeremo alle matrici quadrate, parleremo dei loro determinanti e vedremo le regole che ci permetteranno di calcolarli al meglio. Considereremo poi alcuni semplici cenni di algebra delle matrici

- **Matrici: concetti di base**
- **Matrici quadrate**
- **Determinante di una matrice quadrata**

- Cenni di algebra delle matrici

Un consiglio: ti conviene, come preparazione, leggere prima i capitoli dal [sistema di 3 equazioni in 3 incognite](#) sino a [sistema di k equazioni in n incognite](#); ti servira' per capire meglio a cosa servono e perche' sono nati i determinanti e le matrici.

1. Matrici: concetti di base

Una matrice $m \times n$ (m righe per n colonne) e' una tabella come la seguente

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$		$a_{1,k}$		$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$		$a_{2,k}$		$a_{2,n}$
.....					
$a_{h,1}$	$a_{h,2}$		$a_{h,k}$		$a_{h,n}$
.....					
$a_{m,1}$	$a_{m,2}$		$a_{m,k}$		$a_{m,n}$

con m ed n numeri naturali

in essa possiamo distinguere [le righe e le colonne](#):

Ti ho indicato le righe con lo stesso colore: la prima riga in verde, la seconda in blu,

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$		$a_{1,k}$		$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$		$a_{2,k}$		$a_{2,n}$
.....					
$a_{h,1}$	$a_{h,2}$		$a_{h,k}$		$a_{h,n}$
.....					
$a_{m,1}$	$a_{m,2}$		$a_{m,k}$		$a_{m,n}$

anche le colonne con lo stesso colore: la prima colonna in verde, la seconda in blu

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$		$a_{1,k}$		$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$		$a_{2,k}$		$a_{2,n}$
.....					
$a_{h,1}$	$a_{h,2}$		$a_{h,k}$		$a_{h,n}$
.....					
$a_{m,1}$	$a_{m,2}$		$a_{m,k}$		$a_{m,n}$

l'elemento generico $a_{h,k}$ appartiene all'h-esima riga ed alla k-esima colonna con h e k numeri naturali e

$$1 < h < m \text{ e } 1 < k < n$$

Puo' essere indicata in breve con i simboli

$$\begin{pmatrix} a_{h,k} \end{pmatrix} \text{ oppure } (a_{h,k}) \text{ con } h \text{ e } k \text{ numeri naturali e } 1 < h < m \text{ e } 1 < k < n$$

Forse piu' che la definizione sulle matrici e' interessante l'utilizzo di questo ente matematico:

Le matrici compariranno in tutte quelle discipline dove avremo che un oggetto e' suddiviso in varie parti o componenti come

- un insieme di k vettori nello spazio n -dimensionale
- le coordinate di k punti nello spazio ad n dimensioni
- un sistema di k equazioni ad n incognite
- l'insieme delle possibili permutazioni su n oggetti

Per farvene comprendere l'importanza pensa che nella fisica moderna è possibile utilizzare le matrici per raggiungere gli stessi risultati ottenuti con la funzione d'onda;

Pensa anche che uno dei maggiori software per lo studio della matematica il "LABMAT" è basato tutto sulle matrici

È possibile considerare una matrice con una sola riga **Matrice riga**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix}$$

oppure anche una matrice con una sola colonna **Matrice colonna**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{h,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

ma le matrici che ci interesseranno particolarmente saranno quelle che hanno lo stesso numero di righe e colonne **Matrici quadrate o di ordine n**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h,1} & a_{h,2} & \dots & a_{h,k} & \dots & a_{h,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

2. Matrici quadrate

Una matrice è quadrata se ha tante righe quante colonne

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

con n numero naturale

n si dice anche **ordine** della matrice quadrata: ad esempio se una matrice quadrata è di ordine 5 allora ha 5 righe e 5 colonne.

Nella matrice quadrata possiamo distinguere [la diagonale principale e la la diagonale secondaria](#):

Diagonale principale

Ti indico in colore blu gli elementi della diagonale principale

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$		$a_{1,h}$		$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$		$a_{2,h}$		$a_{2,n}$
.....					
$a_{h,1}$	$a_{h,2}$		$a_{h,h}$		$a_{h,n}$
.....					
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$		$a_{n,h}$		$a_{n,n}$

Diagonale secondaria

Qui ti indico in blu gli elementi della diagonale secondaria:
per fartelo capire meglio ti scrivo anche la penultima riga e la penultima colonna

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$		$a_{1,h}$		$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$		$a_{2,h}$		$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$
.....						
$a_{h,1}$	$a_{h,2}$		$a_{h,h}$		$a_{h,n-1}$	$a_{h,n}$
.....						
$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$		$a_{n-1,h}$		$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$		$a_{n,h}$		$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$

Data una matrice definiremo **Matrice trasposta** la matrice che si ottiene scambiando tra loro le righe e le colonne; ad esempio la matrice trasposta di quella sopra e':

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$		$a_{n,1}$
$a_{1,2}$	$a_{2,2}$		$a_{n,2}$
.....			
$a_{1,n}$	$a_{2,n}$		$a_{n,n}$

Passiamo ora a parlare del determinante di una matrice quadrata.

3. [Determinante di una matrice quadrata](#)

Mentre una matrice e' una tabella il determinante di una matrice quadrata e' un numero: vedremo come e' possibile determinare il valore di tale numero

Mentre la matrice viene indicata con la doppia barra il determinante viene indicato con una barra singola

Determinante $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

essendo gli elementi del determinante $a_{1,1} \dots a_{n,n}$ numeri reali.

Vediamo ora di sviluppare il calcolo di un determinante di una radice quadrata approfondendo e generalizzando quanto già fatto nel [calcolo del determinante 3X3](#)

- Complemento algebrico di un elemento del determinante
- Calcolo del determinante col metodo di Laplace
- Proprietà dei determinanti (utili per il loro calcolo)
- Esempi di calcolo di un determinante utilizzandone le proprietà

a) Complemento algebrico di un elemento del determinante

Consideriamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h,1} & a_{h,2} & \dots & a_{h,k} & \dots & a_{h,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Per vedere come calcolarlo introduciamo la nozione di **complemento algebrico**

Prima definiamo il complemento e poi il complemento algebrico.

Definiamo complemento $C_{h,k}$ di un elemento qualunque $a_{h,k}$ il determinante che si ottiene togliendo la riga e la colonna su cui si trova l'elemento in questione

$a_{h,k}$ indica semplicemente uno degli elementi della matrice, siccome ne posso prendere uno qualunque metto $a_{h,k}$ per indicare un elemento generico

Esempio:

Consideriamo una matrice di ordine 4 e calcoliamo il complemento di $a_{2,2}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = C_{2,2}$$

elimino la riga e la colonna dove c'è $a_{2,2}$ (elimino gli elementi in blu) ed ottengo il complemento $C_{2,2}$ di $a_{2,2}$

Passiamo ora alla nozione di **complemento algebrico**

È detto algebrico perché dotato di un segno.

Definiamo complemento algebrico $(-1)^{(h+k)} \cdot C_{h,k}$ di un elemento qualunque $a_{h,k}$ il

determinante che si ottiene togliendo la riga e la colonna su cui si trova l'elemento in questione con il segno positivo se $h+k$ =numero pari ed il segno negativo se $h+k$ =numero dispari

Per questo si mette $(-1)^{h+k}$ perche' se $(h+k)$ e' pari eseguendo la potenza ottengo +1 mentre se $(h+k)$ e' dispari ottengo -1

Ad esempio calcoliamo il complemento algebrico di $a_{2,2}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = + C_{2,2}$$

elimino la riga e la colonna dove c'e' $a_{2,2}$ (elimino gli elementi in blu) ed ottengo il complemento $C_{2,2}$ di $a_{2,2}$; metto il segno positivo perche' $2+2=4$ numero pari ed ottengo il complemento algebrico.

Calcoliamo ora il complemento algebrico di $a_{2,3}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} = - C_{2,3}$$

elimino la riga e la colonna dove c'e' $a_{2,3}$ (elimino gli elementi in blu) ed ottengo il complemento $C_{2,3}$ di $a_{2,3}$; metto il segno negativo perche' $2+3=5$ numero dispari ed ottengo il complemento algebrico.

b) Calcolo del determinante col metodo di Laplace

Il determinante di ordine 1 corrisponde al numero stesso

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \end{vmatrix} = a_{1,1}$$

Se ora vado a rivedere come calcolavo il determinante nel caso di un sistema di due equazioni in due incognite posso dire:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} = a_{1,1} \cdot C_{1,1} - a_{1,2} \cdot C_{1,2}$$

Cioe' moltiplico il primo elemento della prima riga per il suo complemento e moltiplico il secondo elemento della prima riga per il suo complemento e faccio la differenza

Posso anche dire:

Sommo ogni termine della prima riga moltiplicato per il suo complemento algebrico

Controlla come esercizio che e' indifferente se sviluppi utilizzando gli elementi della seconda riga, della prima colonna od anche della seconda colonna: ottieni sempre lo stesso risultato

Estendiamo il metodo ad un determinante 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga (e' indifferente sviluppare secondo una qualsiasi riga o colonna) mettendo il segno positivo se la somma degli indici dell'elemento e' pari ed il segno negativo se la somma degli indici dell'elemento e' dispari.

Meglio dire:

Sommo ogni termine di una riga (o colonna) moltiplicato per il suo complemento algebrico

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \pm a_{1,1} \cdot C_{1,1} \pm a_{1,2} \cdot C_{1,2} \pm a_{1,3} \cdot C_{1,3}$$

Se vuoi vedere come calcolare il segno dei complementi algebrici, ecco come:

Considero $a_{1,1}$:

la somma degli indici e'

$$1 + 1 = 2$$

2 e' numero pari e quindi metto il segno +

Considero $a_{1,2}$:

la somma degli indici e'

$$1 + 2 = 3$$

3 e' numero dispari e quindi metto il segno -

Considero $a_{1,3}$:

la somma degli indici e'

$$1 + 3 = 4$$

4 e' numero pari e quindi metto il segno +

e quindi abbiamo

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Se vuoi vedere un esempio numerico di [calcolo di un determinante 3x3](#), ecco:

Calcolare

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [(-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1] - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + 3 \cdot [2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1] =$$

$$= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 =$$

$$= -3 - 6 + 9 = 0$$

Questo metodo sara' applicabile per ricorrenza anche a determinanti 4x4, 5x5,....
Regola generale (sviluppo secondo l'h-sima riga)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h,1} & a_{h,2} & \dots & a_{h,k} & \dots & a_{h,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \\
 = a_{h,1} (-1)^{h+1} C_{h,1} + a_{h,2} (-1)^{h+2} C_{h,2} + \dots + a_{h,k} (-1)^{h+k} C_{h,k} + \dots + a_{h,n} (-1)^{h+n} C_{h,n}$$

Ti ricordo che i termini $(-1)^{h+k}$ forniscono il segno del complemento algebrico e valgono +1 quando l'esponente e è pari mentre valgono -1 quando l'esponente e è dispari

Inoltre posso scegliere una qualunque riga o colonna per sviluppare; quindi, per rendere i calcoli più semplici, se possibile, sceglierò una riga o una colonna dove vi sono termini uguali a zero

1) Esempio di calcolo di un determinante 4x4:

Devo calcolare il valore del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Mi conviene sviluppare secondo la prima riga perché ho solo due termini diversi da zero

La evidenzio in blu

il primo termine della riga ha posto $a_{1,1}$ cioè prima riga e prima colonna $1+1=2$ quindi è di posto pari e quindi mantiene il segno

il secondo termine della prima riga ha posto $a_{1,2}$ cioè prima riga e seconda colonna $1+2=3$ quindi è di posto dispari e va cambiato di segno

Dove c'è zero non devo sviluppare perché zero per numero uguale zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Nel primo determinante dopo l'uguale sviluppo secondo la terza colonna

Nel secondo determinante sviluppo secondo la prima riga

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1 + 1 = 0$$

2) Esempio di calcolo di un determinante 5x5 :

Devo calcolare il valore del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga

il primo termine della riga ha posto $a_{1,1}$ cioè prima riga e prima colonna quindi è di posto pari ($1+1=2$) e quindi mantiene il segno

il secondo termine della prima riga ha posto $a_{1,2}$ cioè prima riga e seconda colonna quindi è di posto dispari ($1+2=3$) e quindi va cambiato di segno

Dove c'è zero non devo sviluppare perché zero per numero uguale zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

devo calcolare i due determinanti dopo l'uguale:

Calcolo il primo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Sviluppo secondo l'ultima riga perché ho solo un termine diverso da zero; il termine ha posto 4,4 cioè quarta riga e quarta colonna ($4+4=8$) posto pari

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima colonna (in un determinante posso sviluppare indifferentemente per righe o per colonne) perché c'è un solo elemento diverso da zero di posto pari (elemento 1,1 ed $1+1=2$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

Calcolo il secondo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Sviluppo secondo la prima colonna, siccome c'è un solo termine diverso da zero (quarta riga e prima colonna $4+1=5$ posto dispari)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga perché c'è un solo elemento diverso da zero di posto pari (elemento 1,1 ed $1+1=2$)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

Quindi il mio determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Essendo i calcoli generalmente molto laboriosi vedremo nella prossima pagina delle proprietà che ci permetteranno di trasformare un determinante in altri equivalenti ma con righe o colonne con elementi nulli

c) Proprietà dei determinanti (utili per il loro calcolo)

Vediamo le principali:

- Se tutti gli elementi di una riga (di una colonna) sono nulli allora il determinante vale zero:

infatti se ho ad esempio il determinante con la prima riga nulla, sviluppo secondo la prima riga ed ottengo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = + 0 \cdot C_{1,1} - 0 \cdot C_{1,2} + 0 \cdot C_{1,3} = 0$$

- Scambiando fra loro due righe (due colonne) il determinante cambia di segno:

Ad esempio, scambiando fra loro la prima e la seconda riga si ha:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Per esercizio prova a svilupparli e controlla il risultato

[Se hai bisogno di aiuto per svolgere l'esercizio](#), ecco:

Consideriamo determinanti un po' semplificati

Vogliamo dimostrare che vale l'uguaglianza (scambio tra loro la seconda e la terza riga):

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Sviluppo il primo secondo la prima riga:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot (ei - fh) - b \cdot (di - gf) + c \cdot (dh - eg) =$$

$$= aei - afh - bdi + bgf + cdh - ceg$$

Sviluppo anche il secondo sempre con la prima riga:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} g & i \\ d & f \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} g & h \\ d & e \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot (fh - ei) - b \cdot (gf - di) + c \cdot (eg - dh) =$$

$$= afh - aei - bgf + bdi + ceg - cdh$$

Se controlliamo sono gli stessi fattori del primo determinante ma col segno cambiato
Come volevamo

- Se in un determinante due righe (due colonne) sono proporzionali il determinante vale zero:

Dimostriamolo in un determinante 3x3: supponiamo che la terza riga si ottenga dalla prima moltiplicandola per il numero **b**

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ ba_{1,1} & ba_{1,2} & ba_{1,3} \end{vmatrix} =$$

Sviluppo secondo la prima riga:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ ba_{1,1} & ba_{1,2} & ba_{1,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ ba_{1,2} & ba_{1,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ ba_{1,1} & ba_{1,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ ba_{1,1} & ba_{1,2} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1} \cdot (a_{2,2}ba_{1,3} - a_{2,3}ba_{1,2}) - a_{1,2} \cdot (a_{2,1}ba_{1,3} - a_{2,3}ba_{1,1}) + a_{1,3} \cdot (a_{2,1}ba_{1,2} - a_{2,2}ba_{1,1}) =$$

$$= b a_{1,1} a_{2,2} a_{1,3} - b a_{1,1} a_{2,3} a_{1,2} - b a_{1,2} a_{2,1} a_{1,3} + b a_{1,2} a_{2,3} a_{1,1} + b a_{1,3} a_{2,1} a_{1,2} - b a_{1,3} a_{2,2} a_{1,1} =$$

$$= 0$$

sono fattori a due a due uguali e di segno contrario

- Se moltiplico ogni elemento di una riga (colonna) per un numero reale **C** allora il valore del determinante viene moltiplicato per **C**:

Ad esempio si ha:

$$\begin{vmatrix} Ca_{1,1} & Ca_{1,2} & Ca_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = C \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

E posso farlo per qualunque riga o colonna

Infatti sviluppando il primo si ottiene:

$$\begin{vmatrix} Ca_{1,1} & Ca_{1,2} & Ca_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = Ca_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - Ca_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + Ca_{1,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} =$$

$$= Ca_{1,1} \cdot (a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - Ca_{1,2} \cdot (a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + Ca_{1,3} \cdot (a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) =$$

$$= Ca_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - C a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - Ca_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} + Ca_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + Ca_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} - Ca_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} =$$

e raccogliendo **C**

$$= C(a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}) =$$

siccome quello tra parentesi è lo sviluppo del secondo determinante possiamo scrivere

$$= C \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Come volevamo

- Se gli elementi di una riga (colonna) sono somma di due addendi allora il determinante è uguale alla somma dei determinanti che hanno nella riga (colonna) come elementi il primo addendo ed il secondo addendo :

sarebbe a dire

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d & e+f \\ g & h & i \\ l & m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & e \\ g & h & i \\ l & m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d & f \\ g & h & i \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

Per dimostrarlo basta sviluppare il primo (ad esempio secondo la prima riga) e mostrare che otteniamo la somma degli sviluppi del secondo.

Puoi farlo per esercizio

- Il valore del determinante non cambia se sommo (sottraggo) ad una riga (colonna) una qualunque riga (colonna) parallela moltiplicata per un numero reale C : questa è la regola che ci permetterà di ottenere righe o colonne con più elementi nulli e quindi ci permetterà di sviluppare determinanti complessi in modo abbastanza semplificato

La regola dice che:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kd & b+ke & c+kf \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

con k numero reale

Infatti per la regola [precedente](#) abbiamo

$$\begin{vmatrix} a+kd & b+ke & c+kf \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kd & ke & kf \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ma per la regola sulle [righe proporzionali](#) il secondo determinante è nullo quindi la proprietà è dimostrata

- Il determinante di una matrice quadrata e della sua trasposta hanno lo stesso valore:

Significa che:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

Per dimostrarlo basta sviluppare, ad esempio, il primo determinante secondo la prima riga e l'altro secondo la prima colonna: ottieni lo stesso sviluppo

d) Esempi di calcolo di un determinante utilizzandone le proprietà'

Vediamo come è possibile, utilizzando le regole della pagina precedente, trasformare un determinante in un altro con lo stesso valore ma con una riga (colonna) che abbia alcuni elementi nulli; in questo modo mi conviene sviluppare il determinante secondo quella riga (colonna)

Calcolare il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

dalla seconda colonna sottraggo la quarta colonna

Ottengo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

adesso alla prima riga sommo l'ultima riga

Ottengo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ora alla seconda riga sommo l'ultima riga ed ottengo un determinante con una colonna di tutti zeri meno un termine:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 & 5 \\ 6 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ora sviluppo secondo la seconda colonna:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 & 5 \\ 6 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ho messo il segno piu' perche' il 2 ha posto $_{4,2}$ (quarta riga seconda colonna) quindi posto pari

Ora dovremmo sviluppare: nei determinanti di ordine 3 di solito non conviene semplificare, conviene calcolare immediatamente o con il [metodo di Sarrus](#) o con il metodo normale.

Comunque essendo questo un esercizio procediamo a semplificare

Dalla seconda riga [sottraggo la terza moltiplicata per 2](#), poi sviluppo lungo la seconda riga ed ottengo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 & 5 \\ 6 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +2 \cdot (+2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}) =$$

Ho messo il segno piu' perche' il 2 ha posto $_{2,2}$ (seconda riga seconda colonna) quindi posto pari

Potevo anche sottrarre la terza colonna dalla seconda, come vedi ci sono tante possibilita'; un buon numero di esercizi ti consentira' di trovare sempre la strada migliore

$$= 2 [2(10-15)] = 2[2(-5)] = -20$$

e) Cenni di algebra delle matrici

Vediamo ora alcuni semplici cenni di algebra delle matrici: mentre per la somma possiamo ampliare il concetto di somma numerico per la moltiplicazione abbiamo bisogno di una nuova definizione di prodotto, il prodotto righe per colonne fra matrici.

- Prodotto fra matrici
- Somma fra matrici quadrate
- Matrice nulla
- Prodotto righe per colonne fra matrici quadrate
- Matrice unitaria
- Matrice inversa di una matrice quadrata
- Prodotto esterno: scalare per matrice
- Algebra delle matrici

f) Prodotto fra matrici

E' possibile definire in vari modi il prodotto fra matrici:

- righe per righe
- righe per colonne
- colonne per righe
- colonne per colonne

Tra questi l'unico che viene usato normalmente e' il **prodotto righe per colonne** indichiamolo con il simbolo $\otimes$. Vediamone un esempio: per poterlo usare dobbiamo avere lo stesso numero di colonne nella prima matrice del numero delle righe nella seconda; facciamo un prodotto fra una matrice 2×3 con una matrice 3×4 ; La prima ha tre colonne e la seconda tre righe; otterremo una matrice 2×4 con due righe e 4 colonne

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} =$$

devo moltiplicare ogni termine di una riga per ogni termine di una colonna:

- al primo posto $a_{1,1}$ metto la somma dei prodotti degli elementi della prima riga per la prima colonna
 $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$
- al posto $a_{1,2}$ metto la somma dei prodotti degli elementi della prima riga per la seconda colonna
 $1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 3$
- al posto $a_{1,3}$ metto la somma dei prodotti degli elementi della prima riga per la terza colonna
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 23$
- al posto $a_{1,4}$ metto la somma dei prodotti degli elementi della prima riga per la quarta colonna
 $1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 20$
- al posto $a_{2,1}$ metto la somma dei prodotti degli elementi della seconda riga per la prima colonna
 $3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 17$

Possiamo dire che la somma fra matrici quadrate dello stesso ordine e' un'operazione di composizione interna, nel senso che la somma di due matrici quadrate dello stesso ordine e' ancora una matrice quadrata dello stesso ordine; inoltre la somma fra matrici e' commutativa, cioe'

$$A \oplus B = B \oplus A$$

h) Matrice nulla

Definiamo matrice nulla la matrice con tutti gli elementi uguali a zero.

Esempio di matrice nulla di tipo 4x4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0}$$

La matrice nulla sara' l'elemento neutro per l'addizione nella somma fra matrici quadrate dello stesso ordine

$$A \oplus \mathbb{0} = \mathbb{0} \oplus A = A$$

Prova, per esercizio a dimostrarlo su un esempio

i) Prodotto righe per colonne fra matrici quadrate

Possiamo dire subito che e' un'operazione di composizione interna perche' il prodotto fra due matrici quadrate dello stesso ordine e' ancora una matrice quadrata dello stesso ordine. Dobbiamo pero' notare che l'operazione non e' commutativa, cioe' il risultato dipende dall'ordine in cui sono moltiplicati i fattori

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

Per esercizio vediamo su un esempio numerico

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

Mentre avremo

$$B \otimes A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 6 & 9 & 13 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Da notare che la matrice nulla, rispetto all'operazione di prodotto righe per colonne, si comporta come elemento assorbente

$$A \otimes \mathbb{0} = \mathbb{0} \otimes A = \mathbb{0}$$

Bisogna ancora aggiungere che il prodotto righe per colonne fra matrici quadrate gode della proprietà associativa, cioè

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

cioè per moltiplicare fra loro tre matrici puoi moltiplicare prima le prime due e poi la matrice ottenuta per la terza oppure puoi moltiplicare tra loro prima la seconda e la terza e poi moltiplicare la prima per la matrice prodotto ottenuta: ottieni lo stesso risultato

Per esercizio prova a moltiplicare tre matrici 3x3 nei due modi diversi

j) Matrice unitaria

Definiamo matrice unitaria la matrice che ha tutti gli elementi nulli tranne quelli che si trovano sulla diagonale principale e che valgono tutti 1

Esempio di matrice unitaria di tipo 4x4

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbb{u}$$

La matrice unitaria sarà l'elemento neutro per il prodotto nella moltiplicazione righe per colonne fra matrici quadrate dello stesso ordine

$$A \otimes \mathbb{u} = \mathbb{u} \otimes A = A$$

Prova, per esercizio a dimostrarlo su un esempio

k) Matrice inversa di una matrice quadrata

Una matrice quadrata A^{-1} si dice inversa della matrice quadrata A se vale

$$A \otimes A^{-1} = A^{-1} \otimes A = \|\mathbf{u}\|$$

Come nei numeri non puoi fare l'inverso dello zero qui non potrai fare la matrice inversa delle matrici il cui determinante vale zero (vengono chiamate **matrici singolari**)

Diciamo subito che calcolare la matrice inversa di una matrice data e' un'operazione laboriosa, quindi dovrai fare parecchi esercizi; comunque le operazioni da svolgere sono le seguenti

1. Prima calcola il valore del determinante della matrice, chiamiamolo $\det(A)$ e vediamo se e' diverso da zero; se e' uguale a zero non esiste la matrice inversa
2. Calcola la trasposta della matrice di partenza (basta scambiare tra loro le righe con le colonne)
3. Per ogni elemento della matrice trasposta calcolane il complemento algebrico, considerando il complemento algebrico come elemento ottieni una nuova matrice, chiamiamola A' (si chiama **matrice aggiunta**)
4. Adesso dividi la matrice A' per $\det(A)$ (cioe' dividi ogni termine per $\det(A)$) e ottieni l'inversa della matrice quadrata di partenza

Per esercizio vediamo su un esempio numerico:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Voglio trovare l'inversa A^{-1}

1. Calcoliamo il valore del determinante della matrice A

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad \text{Calcoli}$$

2. Calcolo la trasposta della matrice di partenza (scambio tra loro le righe con le colonne)

$$A^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Per ogni elemento del determinante della matrice trasposta calcolo il complemento algebrico; nel calcolo ricordati di cambiare di segno gli elementi di posto dispari

$$C_{1,1} = 5 \quad \text{Se vuoi vedere il calcolo dei complementi algebrici}$$

$$C_{1,2} = -5$$

$$C_{1,3} = 0$$

$$C_{2,1} = 0$$

$$C_{2,2} = -1$$

$$C_{2,3} = 2$$

$$C_{3,1} = -5$$

$$C_{3,2} = 3$$

$$C_{3,3} = -1$$

4. consideriamo quindi la matrice A' che ha come elementi i complementi algebrici trovati

$$A' = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

5. Adesso divido la matrice A' per il valore del determinante di A (che valeva -5) e ottengo la matrice A^{-1} cioè l'inversa di quella di partenza

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \\ 1 & -3/5 & 1/5 \end{vmatrix}$$

Come vedi bisogna fare un sacco di calcoli, ed ho preso solo una matrice 3x3

Importante: la matrice unitaria è inversa di se' stessa, cioè se calcoli l'inverso della matrice unitaria ottieni la stessa matrice (come nei numeri: l'inverso di 1 è sempre 1)

Esercizi:

- prova a moltiplicare questa matrice per quella di partenza e controlla che effettivamente ottieni la matrice unitaria
- Calcola l'inversa della matrice unitaria per controllare che coincide con la matrice di partenza

l) Prodotto esterno: scalare per matrice

Il prodotto visto nella pagina precedente (-1/5 per la matrice) si considera come prodotto esterno o prodotto fra uno scalare ed una matrice. Indichiamolo con $\underline{x}$

In genere il prodotto esterno viene definito come:

$$\underline{m} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_{1,1} & ma_{1,2} & \dots & ma_{1,n} \\ ma_{2,1} & ma_{2,2} & \dots & ma_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ma_{n,1} & ma_{n,2} & \dots & ma_{n,n} \end{vmatrix}$$

L'esistenza di operazione interna (la somma $\oplus$) ed un prodotto esterno rendono le matrici quadrate d'ordine $n \times n$ uno spazio vettoriale

m) Algebra delle matrici

Riassumendo le proprietà viste:

- Esiste un'operazione interna: la somma $\oplus$
- La somma è commutativa
- esiste l'elemento neutro $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ rispetto all'operazione somma
- Data una matrice A esiste l'elemento opposto $-A$ tale che $A \oplus (-A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$
- Esiste un prodotto esterno $\otimes$ (quindi con queste proprietà l'insieme delle matrici quadrate è uno spazio vettoriale)
- Esiste un'operazione interna: il prodotto righe per colonne $\otimes$
- Esiste l'elemento neutro moltiplicativo $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$
- Per ogni matrice quadrata non singolare esiste l'elemento inverso tale che $A \otimes A^{-1} = A^{-1} \otimes A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$
- Il prodotto è associativo $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

- la moltiplicazione e' distributiva rispetto all'addizione

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

Proprieta' non verificata, prova a verificarla tu per esercizio

Quindi si dice che l'insieme delle matrici quadrate di ordine $n \times n$ forma un'algebra

F. Introduzione ai radicali

Chiedo scusa a qualcuno se il fatto di scrivere pagine non in fila puo' dare qualche fastidio, pero' senza fare i radicali non e' possibile affrontare lo studio delle equazioni di secondo grado, quindi nello sviluppo devo seguire un certo ordine logico che non corrisponde a quello seguito nella classificazione degli argomenti

-
- definizione di radicale
 - radicali aritmetici
 - radicali algebrici
 - operazioni con i radicali
 - radicali doppi
 - razionalizzazione
 - radicali con esponente frazionario
 - espressioni con i radicali
 - disequazioni irrazionali ad indice pari
 - disequazioni irrazionali ad indice dispari

1. Definizione di radicale

Perche' i radicali:

in matematica ogni volta che facciamo un'operazione dobbiamo anche vedere se e' possibile tornare indietro cioe' fare l'operazione alla rovescia (ricordati che una salita vista dall'altra parte e' una discesa) quindi possiamo definire un radicale (grosso modo) come l'operazione inversa dell'elevamento a potenza.

quindi dobbiamo dire che un radicale di un certo dato e' quel numero tale che facendovi la potenza ottengo il dato di partenza

Definizione:

Si definisce radice ennesima di un numero a quel numero b che elevato a potenza n mi ridà a

in formule:

$$\sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a$$

e si legge : la radice ennesima di a e' il numero b che elevato alla n diventa uguale ad a

Nomenclatura: se considero $b \sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{a}$ e' il radicale

b e' il coefficiente del radicale

n e' l'indice di radice

a e' il radicando

Siccome la matematica e' la scienza del massimo rendimento con il minimo sforzo si utilizzano delle abbreviazioni per scrivere di meno:

$$\sqrt[1]{a} = a \text{ perche' } a^1 = a \text{ e quindi la radice non si scrive}$$

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ perché le radici quadrate saranno le più numerose, quindi non scriverne l'indice sarà un bel risparmio di tempo.

2. Radicali aritmetici

Quando non ci interessa sapere che segno otteniamo estraendo la radice parliamo di radicali aritmetici, cioè di radicali senza segno.

Così ad esempio $\sqrt{25} = 5$ è un radicale aritmetico

Una delle applicazioni più interessanti per i radicali aritmetici è il concetto di modulo possiamo infatti definire il modulo di un numero a anche come la radice aritmetica del quadrato di a stesso

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

Questa definizione deriva dal fatto che la distanza (che è sempre positiva) in geometria euclidea viene definita come radice quadrata della somma dei quadrati delle coordinate, cioè

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{distanza}$$

applicando il concetto su uno spazio ad una dimensione (retta) viene fuori il concetto di modulo

$$|\text{distanza}| = \sqrt{x^2}$$

3. Radicali algebrici

I radicali algebrici sono l'operazione inversa dell'elevamento a potenza: infatti se ho $\sqrt{25}$ significa che devo trovare quel numero che moltiplicato per se stesso mi dà 25 quindi avrò:

5 perché $5 \times 5 = 25$

ma avrò anche

-5 perché $(-5) \times (-5) = 25$

quindi per considerare tutte le possibilità scriverò

$$\sqrt{25} = \pm 5$$

Per indicare un radicale aritmetico userò il modulo:

$$\sqrt{b} = |a|$$

Per indicare un radicale algebrico userò il segno $\pm$

$$\sqrt{b} = \pm a$$

4. Operazioni con i radicali

Come per tutti gli enti matematici appena definiti ora occorre studiare quali sono le regole per le operazioni fra gli enti stessi:

- equivalenza
- somma e differenza
- prodotto
- quoziente
- elevamento a potenza

- portare fuori radice
- esercizi sulle operazioni con radicali

a) Equivalenza fra radicali

Due radicali si diranno equivalenti se hanno lo stesso valore:

Se io calcolo la radice quadrata di quattro otterro' 2 perche' due elevato al quadrato mi da' 4

$$\sqrt[4]{4} = 2 \rightarrow 2^2 = 4$$

Se ora calcolo la radice quarta di 16 otterro' ancora 2 perche' 2 elevato alla quarta mi da' 16:

$$\sqrt[4]{16} = 2 \rightarrow 2^4 = 16$$

ma se i due radicali hanno lo stesso valore sono equivalenti e deve esistere una regola che mi permetta di passare dal primo radicale al secondo e viceversa ed io devo trovare questa regola

Se scrivo i radicandi scomposti in fattori confrontando i due radicali ottengo:

$$\sqrt[2]{2^2} = \sqrt[4]{2^4}$$

e se osservi bene puoi ottenere il secondo radicale dal primo moltiplicando sia l'indice di radice che l'esponente del radicando per due (e questa sara' la regola cercata)

Regola:

Due radicali si dicono equivalenti quando posso trasformarli l'uno nell'altro moltiplicando o dividendo sia l'indice di radice che l'esponente del radicando per uno stesso numero

$$\sqrt[n \cdot s]{a^{t \cdot s}} = \sqrt[n]{a^t}$$

Un mio professore del Liceo, per farcela ricordare meglio, la chiamava "regola di ebollizione" e ci diceva che e' come quando una pentola d'acqua bolle solleva la schiuma che va fuori della pentola cosi' i radicali sollevano la parte uguale (nella regola scritta sopra la s si solleva ed esce dalla pentola ed ottengo il secondo radicale)

Conseguenza:

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[1]{a^1} = a$$

cioe' se l'indice di radice e l'esponente del radicando sono uguali posso mandare via la radice.

b) Somma e differenza fra radicali

Per somma intendiamo la somma algebrica cioe' sia la somma che la differenza

Per capire come eseguire la somma fra radicali ripensiamo alla somma fra monomi:

In matematica quando dobbiamo fare una nuova operazione cerchiamo sempre di rifarci a qualcosa di generale: in questo caso alla definizione piu' generale possibile di somma: la [somma fra monomi](#)

$$5a + 4a + 7b = 9a + 7b$$

se al posto di a metto $\sqrt{2}$ e al posto di b metto $\sqrt{3}$ ottengo

$$5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 7\sqrt{3} = 9\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$$

cioe'

Regola:

Per eseguire la somma fra termini con radicali devo cercare i termini simili (con radicali uguali) e poi sommarne i coefficienti numerici (i termini fuori del radicale)
diremo simili due termini se hanno lo stesso radicale

Un piccolo esercizio per chiarire meglio il concetto:

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - \sqrt{2} =$$

raggruppiamo i termini simili

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$$

sommiamo i coefficienti numerici

$$(2 + 3 - 1)\sqrt{2} + (3 + 2 - 4)\sqrt{3} = 4\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

c) Prodotto fra radicali

Dobbiamo distinguere due casi:

- Prodotto fra radicali con lo stesso indice
- Prodotto fra radicali con indice diverso

Prodotto fra radicali con lo stesso indice

Anche per il prodotto ci rifacciamo al calcolo letterale : infatti per eseguire un prodotto fra monomi devo moltiplicare numeri con numeri e lettere con lettere

Se ti serve ridai un'occhiata al [prodotto fra monomi](#)

qui lo stesso: dovro' moltiplicare i numeri fuori con i numeri fuori e le parti dentro radice con le parti dentro radice

$$2\sqrt[4]{7} \cdot 5\sqrt[4]{4} = 10\sqrt[4]{28}$$

Regola:

Per moltiplicare fra loro due termini con radicali con lo stesso indice si devono moltiplicare fra loro i coefficienti e tra loro i radicandi mentre la radice resta invariata

Vediamo un altro semplice esempio:

$$a\sqrt{(a+b)} \cdot 3\sqrt{(a-b)} =$$

$$= 3a\sqrt{(a+b)(a-b)} =$$

$$= 3a\sqrt{(a^2 - b^2)}$$

Prodotto fra radicali con indice diverso

Per eseguire il prodotto fra radicali con indice diverso cerchiamo di ricondurci al prodotto fra radicali dello stesso indice, perche' era molto facile; quindi dovremo trasformare i radicali in modo da farli diventare con lo stesso indice poi faremo come prima

Per fare questo useremo la regola di equivalenza:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b^2}$$

il minimo comune multiplo fra 3 e 4 e' 12 quindi devo trasformare i due radicali in modo che abbiano indice 12 moltiplicando sia l'indice di radice che l'esponente del radicando per uno stesso numero

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^4} \text{ ho moltiplicato per 4}$$

$$\sqrt[4]{b^2} = \sqrt[12]{b^6} \text{ ho moltiplicato per 3}$$

quindi:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b^2} = \sqrt[12]{a^4} \cdot \sqrt[12]{b^6} = \sqrt[12]{a^4 b^6}$$

Regola:

Per moltiplicare fra loro due radicali con indice diverso prima li trasformo in radicali con lo stesso indice poi procedo come prima

Facciamo anche qui un piccolo esercizio:

$$3\sqrt[3]{3} \cdot 4\sqrt{3} =$$

gli indici sono 3 e 2 quindi il minimo comune multiplo e' 6;

(quando l'indice di radice non e' indicato si intende 2)

trasformo i due radicali

$$= 3\sqrt[6]{3^2} \cdot 4\sqrt[6]{3^3} =$$

eseguo la moltiplicazione

$$= 3 \cdot 4\sqrt[6]{3^2 \cdot 3^3} = 12\sqrt[6]{3^5}$$

d) Quoziente fra radicali

Come per il prodotto distinguiamo due casi:

- se i radicali hanno lo stesso indice
- se i radicali non hanno lo stesso indice

Se i radicali hanno lo stesso indice:

in questo caso basta fare il radicale del quoziente dei termini dentro radice:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

Regola:

Per dividere fra loro due radicali con lo stesso indice si dividono tra loro i radicandi

Se i radicali non hanno lo stesso indice

prima devo far diventare i due radicali con lo stesso indice, poi procedo come prima

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt[12]{a^4}}{\sqrt[12]{b^3}} = \sqrt[12]{\left(\frac{a^4}{b^3}\right)}$$

Regola:

Per dividere fra loro due radicali se non hanno lo stesso indice prima si riducono allo stesso indice poi si procede come prima.

e) Elevamento a potenza

Per elevare a potenza una radice basta elevare a potenza il radicando:

$$(\sqrt[5]{3})^4 = \sqrt[5]{3^4}$$

Qualche difficolta' si puo' avere quando si deve fare una potenza di un polinomio con radicali, in tal caso occorre avere ben presenti le regole dei **prodotti notevoli**
esempio:

$$(3 + 2\sqrt{3})^2 =$$

E' il **quadrato di un binomio** :

- quadrato del primo termine:
 $3^2 = 9$
- doppio prodotto del primo termine per il secondo:
 $2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
- quadrato del secondo termine
 $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \sqrt{3^2} = 4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$

quindi:

$$(3 + 2\sqrt{3})^2 = 9 + 12\sqrt{3} + 12 = 21 + 12\sqrt{3}$$

f) Portare fuori radice

E' un'operazione tipica dei radicali:

Posso farla quando l'indice del radicando e' superiore all'indice della radice

$$\sqrt[5]{a^{13}} = \sqrt[5]{a^{10} \cdot a^3} = \sqrt[5]{a^{10}} \cdot \sqrt[5]{a^3} = a^2 \sqrt[5]{a^3}$$

se hai bisogno di una [spiegazione piu' in dettaglio](#), ecco:

$$\sqrt[5]{a^{13}} =$$

per le proprieta' inverse delle potenze posso pensare a^{13} come $a^{10} \cdot a^3$

In questo modo la prima potenza sara' un multiplo dell'indice di radice

$$= \sqrt[5]{a^{10} \cdot a^3} =$$

Ora spezzo la radice in due parti in modo che la prima potenza sia da sola dentro la radice (posso farlo per come ho definito il prodotto fra radicali)

$$= \sqrt[5]{a^{10}} \cdot \sqrt[5]{a^3} =$$

Per la regola di equivalenza posso semplificare l'indice di radice e l'esponente del radicando nel primo radicale

divido per 5

$$\sqrt[5]{a^{10}} = \sqrt[1]{a^2} = a^2$$

quindi il risultato e'

$$= a^2 \sqrt[5]{a^3}$$

Per farla capire meglio, ai miei scolari la spiego nel modo seguente:

Supponi di voler andare a vedere una serie di film. Se il biglietto costa 5 euro e tu hai in tasca 13 euro cosa succede?

Puoi andare al cinema due volte e ti restano 3 euro in tasca.

Per le radici e' lo stesso ragionamento: il termine dentro radice ha potenza 13 e, per uscire di radice, deve pagare 5 perche' l'indice di radice e' 5; quindi esce 2 volte (a^2) e resta con 3 dentro radice (a^3)

Questi meccanismi matematici sono da noi usati, senza rendercene conto, nella vita di tutti i giorni; va a merito della matematica l'evidenziarli e l'ordinarli permettendoci di usarli a ragion veduta e di costruire dei modelli con cui affrontare consapevolmente le varie situazioni.

5. Radicali doppi

Sono radicali che contengono al loro interno somme o differenze con altri radicali: considereremo il caso piu' semplice: quello che capita talvolta risolvendo un'equazione di secondo grado cioe':

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

Si può procedere in due modi diversi

- applicando la formula risolutiva
- ragionando sull'esercizio

Formula risolutiva per i radicali doppi

Di seguito ti viene data la formula risolutiva, senza dimostrazione: se vuoi dimostrarla basta elevare al quadrato a destra ed a sinistra dell'uguale finché i due termini non diventano uguali; ma a me sembra una fatica inutile

Formula con il **più** dentro radice:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Formula con il **meno** dentro radice:

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Naturalmente è utile applicare la formula solamente se il termine $(a^2 - b)$ è un quadrato e come tale è estraibile di radice.

Vediamo un paio di esercizi per meglio fissare il concetto

Trasformare in radicali semplici

$$1) \sqrt{4 + \sqrt{7}} = \quad \text{Soluzione:}$$

Trasformare, se possibile, l'espressione:

$$\sqrt{4 + \sqrt{7}} =$$

in somma di radicali semplici

Prima controllo che sia possibile considerando il termine: $a^2 - b$ se è un quadrato perfetto procedo perché è estraibile di radice, altrimenti dico che non conviene procedere, cioè non si può trasformare in somma di radicali semplici

$$a^2 - b = 4^2 - 7 = 16 - 7 = 9$$

9 è il quadrato di 3 quindi è estraibile di radice; procedo

Applico la formula

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Sostituisco $a=4$ $b=7$:

$$= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{4^2 - 7}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{4^2 - 7}}{2}} =$$

Eseguo i quadrati:

$$= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 7}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 7}}{2}} =$$

Calcolo:

$$= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{9}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{9}}{2}} =$$

estraggo di radice essendo $9 = 3^2$:

$$= \sqrt{\frac{4 + 3}{2}} + \sqrt{\frac{4 - 3}{2}} =$$

Eseguo i calcoli ai numeratori ed ottengo il risultato finale:

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$2) \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} = \quad \text{Soluzione:}$$

Trasformare, se possibile, l'espressione:

$$\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} =$$

in somma di radicali semplici

Prima di tutto devo mettere il radicale nella forma classica portando il due dentro radice, posso farlo elevandolo a potenza due

$$= \sqrt{(3 + \sqrt{2^2 \cdot 2})} =$$

$$= \sqrt{(3 + \sqrt{8})} =$$

Ora controllo che sia possibile considerando il termine: $a^2 - b$ se e' un quadrato perfetto procedo perche' e' estraibile di radice, altrimenti dico che non conviene procedere, cioe' non si puo' trasformare in somma di radicali semplici

$$a^2 - b = 3^2 - 8 = 9 - 8 = 1$$

1 e' il quadrato di 1 quindi e' estraibile di radice; procedo

Applico la formula:

$$\sqrt{(a + \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}}$$

Sostituisco $a=3$ $b=8$

$$= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{(3^2 - 8)}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{(3^2 - 8)}}{2}} =$$

Eseguo i quadrati:

$$= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{(9 - 8)}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{(9 - 8)}}{2}} =$$

Calcolo:

$$= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{1}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{1}}{2}} =$$

estraggo di radice essendo $1 = 1^2$:

$$= \sqrt{\frac{3 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{3 - 1}{2}} =$$

Eseguo i calcoli ai numeratori:

$$= \sqrt{\frac{4}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}} =$$

Semplifico ed ottengo il risultato finale

$$= \sqrt{2} + 1$$

$$3) \sqrt{(6 - 2\sqrt{5})} = \quad \text{Soluzione:}$$

Trasformare, se possibile, l'espressione:

$$\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})} =$$

in somma di radicali semplici

Prima di tutto devo mettere il radicale nella forma classica portando il due dentro radice, posso farlo elevandolo a potenza due

$$= \sqrt{(6 - \sqrt{2^2 \cdot 5})} = \sqrt{(6 - \sqrt{20})} =$$

Ora controllo che sia possibile considerando il termine: $a^2 - b$ se e' un quadrato perfetto procedo perche' e' estraibile di radice, altrimenti dico che non conviene procedere, cioe' non si puo' trasformare in somma di radicali semplici

$$a^2 - b = 6^2 - 20 = 36 - 20 = 16$$

16 e' il quadrato di 4 quindi e' estraibile di radice; procedo

Applico la formula:

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Sostituisco $a=6$ $b=20$:

$$= \sqrt{\frac{6 + \sqrt{6^2 - 20}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - \sqrt{6^2 - 20}}{2}} =$$

Eseguo i quadrati:

$$= \sqrt{\frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2}} =$$

Calcolo:

$$= \sqrt{\frac{6 + \sqrt{16}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - \sqrt{16}}{2}} =$$

estraggo di radice essendo $16 = 4^2$:

$$= \sqrt{\frac{6 + 4}{2}} - \sqrt{\frac{6 - 4}{2}} =$$

Eseguo i calcoli ai numeratori:

$$= \sqrt{\frac{10}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}} =$$

Semplifico ed ottengo il risultato finale

$$= \sqrt{5} - 1$$

Ragionare sull'esercizio

E' il metodo che chiedo di seguire ai miei alunni:

Se il radicale si puo' scomporre nella somma di due radicali semplici significa che il termine dentro radice si puo' estrarre, cioe' e' un quadrato;

il problema e' come riconoscere il quadrato;

vediamolo negli esempi risolti precedentemente, partendo dai quadrati piu' riconoscibili

Trasformare in radicali semplici

1) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} =$ Soluzione:

Trasformare, se possibile, l'espressione:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} =$$

in somma di radicali semplici

Per farlo il termine dentro radice deve essere un quadrato cioe'

$$3 + 2\sqrt{2}$$

e' il quadrato di un binomio in cui i due quadrati sono stati sommati: il doppio prodotto vale $2\sqrt{2}$ e la somma dei due quadrati deve essere 3

se il prodotto e' $\sqrt{2}$ i termini saranno $\sqrt{2}$ ed 1 ed infatti il loro quadrato e' $2 + 1 = 3$

quindi posso scrivere:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} =$$

so che $3 = 1 + 2$

$$= \sqrt{1 + 2 + 2\sqrt{2}} =$$

scompongo il trinomio in un quadrato

$$= \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} =$$

e semplificando il radicale esterno con il quadrato ottengo

$$= 1 + \sqrt{2}$$

2) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} =$ Soluzione:

Trasformare, se possibile, l'espressione:

$$\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})} =$$

in somma di radicali semplici

Per farlo il termine dentro radice deve essere un quadrato cioè'

$$6 - 2\sqrt{5}$$

e' il quadrato di un binomio in cui i due quadrati sono stati sommati: il doppio prodotto vale $2\sqrt{5}$ e la somma dei due quadrati deve essere 6

se il prodotto e' $\sqrt{5}$ i termini saranno $\sqrt{5}$ ed 1 ed infatti il loro quadrato e' $5 + 1 = 6$

quindi posso scrivere

$$\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})} =$$

so che $6 = 5 + 1$

$$= \sqrt{(5 + 1 - 2\sqrt{5})} =$$

scompongo il trinomio in un quadrato

$$= \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} =$$

e semplificando il radicale esterno con il quadrato ottengo

$$= \sqrt{5} - 1$$

Siccome il quadrato trasforma tutti i segni in segni positivi, tornando indietro potrei fare $\sqrt{5} - 1$ ma anche $1 - \sqrt{5}$ allora dovrai avere l'avvertenza, quando in mezzo c'e' il segno meno, di mettere al primo posto il termine di valore maggiore

$$3) \sqrt{(4 + \sqrt{7})} = \quad \text{Soluzione:}$$

Trasformare, se possibile, l'espressione:

$$\sqrt{(4 + \sqrt{7})} =$$

in somma di radicali semplici

Per farlo il termine dentro radice deve essere un quadrato cioè'

$$4 + \sqrt{7}$$

e' il quadrato di un binomio in cui i due quadrati sono stati sommati:

Facciamo in modo di esplicitare il doppio prodotto con un 2 davanti:

$$\sqrt{7} = 2\sqrt{\frac{7}{4}}$$

ho moltiplicato dentro radice sopra e sotto per 4 poi ho estratto il 4 al numeratore

il doppio prodotto vale $2\sqrt{7/4}$ e la somma dei due quadrati deve essere 4

se il prodotto e' $\sqrt{7/4}$ i termini saranno $\sqrt{7/2}$ e $\sqrt{1/2}$ ed infatti il loro quadrato e' $7/2 + 1/2 = 8/2 = 4$

quindi posso scrivere

$$\sqrt{(4 + \sqrt{7})} =$$

so che $4 = 7/2 + 1/2$:

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{7}{4}}\right)}$$

scompongo il trinomio in un quadrato:

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

e semplificando il radicale esterno con il quadrato ottengo:

$$\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

6. Razionalizzazione

Se voglio calcolare anche approssimativamente il valore di un espressione tipo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

mi trovo in difficoltà perché dovrei calcolare il valore del rapporto:

$$\frac{1}{1,41421356...}$$

Cioè se abbiamo le radici al denominatore è difficile riuscire a calcolare il valore di una frazione; se invece avessimo la frazione:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

non ho nessun problema perché posso dividere ogni cifra per 2:

$$\frac{1,41421356...}{2} = 0,70710678...$$

Quindi diventa importante avere frazioni senza radicali al denominatore.

Il procedimento per eliminare i radicali dai denominatori si chiama razionalizzazione.

Distingueremo vari casi:

- Un radicale al denominatore
- Due radicali al denominatore
- Tre radicali al denominatore
- Quattro radicali al denominatore

Razionalizzazione con una radice al denominatore

Distinguiamo i casi:

- La radice ha indice 2
- La radice ha indice superiore a due

Razionalizzazione con una radice di indice due al denominatore

Se abbiamo una radice quadrata al denominatore tipo:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}$$

per togliere la radice sotto devo trasformare il denominatore in un quadrato, cosa che posso ottenere moltiplicandolo per $\sqrt{b}$ però per non variare di valore l'espressione dovrò moltiplicare per $\sqrt{b}$ anche al numeratore (in questo modo sarà come moltiplicare per 1 e il valore dell'espressione non varia):

$$= \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} =$$

Otengo:

$$= \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} =$$

e semplificando la radice con la potenza ottengo il risultato:

$$= \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Vediamo ora qualche esercizio per fissare meglio il metodo:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$ Soluzione:

Razionalizzare la seguente espressione:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

Moltiplico sopra e sotto per $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} =$$

Semplifico la radice con il quadrato ed ottengo il risultato:

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nota che i due valori, quello iniziale e quello finale sono quelli su cui abbiamo fatto l'esempio per capire il perché della razionalizzazione

2) $\frac{4}{\sqrt{3}} =$ Soluzione:

Razionalizzare la seguente espressione:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} =$$

Moltiplico sopra e sotto per $\sqrt{3}$:

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} =$$

Semplifico la radice con il quadrato ed ottengo il risultato:

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

3) $\frac{3}{2\sqrt{3}} =$ Soluzione:

Razionalizzare la seguente espressione:

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} =$$

Moltiplico sopra e sotto per $\sqrt{3}$:

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3^2}} =$$

Semplifico la radice con il quadrato:

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} =$$

Semplifico per 3 ed ottengo il risultato finale:

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} =$ Soluzione:

Razionalizzare la seguente espressione:

$$\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} =$$

Moltiplico sopra e sotto per $\sqrt{3}$:

$$= \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{3^2}} =$$

Semplifico la radice con il quadrato:

$$= \frac{3\sqrt{6}}{5 \cdot 3} =$$

Semplifico per 3 ed ottengo il risultato finale:

$$= \frac{\sqrt{6}}{5}$$

Razionalizzazione con una radice di indice superiore a due al denominatore

Razionalizzazione con una radice di indice superiore a due al denominatore (regola generale)

Razionalizzare:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^s}} =$$

con $n > s$

per togliere la radice sotto devo trasformare il denominatore in una potenza uguale all'indice della radice; posso farlo moltiplicando sotto per $\sqrt[n]{b^{n-s}}$ però per non variare di valore l'espressione dovrò moltiplicare per $\sqrt[n]{b^{n-s}}$ anche al numeratore (in questo modo sarà come moltiplicare per 1 e il valore dell'espressione non varia):

$$= \frac{a}{\sqrt[n]{b^s}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-s}}}{\sqrt[n]{b^{n-s}}} =$$

Ottengo:

$$= \frac{a \sqrt[n]{b^{n-s}}}{\sqrt[n]{b^n}} =$$

$$= \frac{a \sqrt[n]{b^{n-s}}}{b}$$

e semplificando la radice con la potenza ottengo il risultato:

Facciamo un esempio pratico.

Razionalizzare:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{b^3}} =$$

per togliere la radice sotto devo trasformare il denominatore in una potenza uguale all'indice della radice, in questo caso 5, cosa che posso ottenere moltiplicandolo per $\sqrt[5]{b^2}$ però per non variare di valore l'espressione dovrò moltiplicare per $\sqrt[5]{b^2}$ anche al numeratore (in questo modo sarà come moltiplicare per 1 e il valore dell'espressione non varia):

$$\frac{a}{\sqrt[5]{b^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[5]{b^2}} =$$

Otengo:

$$= \frac{a \sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[5]{b^5}} =$$

e semplificando la radice con la potenza ottengo il risultato:

$$= \frac{a \sqrt[5]{b^2}}{b}$$

In pratica devi moltiplicare sopra e sotto per una radice con lo stesso indice e il termine dentro (radicando) deve avere potenza uguale alla differenza fra l'indice di radice e la potenza del radicando dato:

cioè se hai radice dodicesima di x elevato alla settima devi moltiplicare per radice dodicesima di x elevato alla quinta:

cinque = dodici meno sette

Due termini al denominatore

Tratteremo i seguenti casi

- Due radici quadrate al denominatore
- Una radice quadrata ed un altro termine al denominatore
- Due radici cubiche al denominatore

Due radici quadrate al denominatore

Vogliamo razionalizzare:

$$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

Devo togliere le radici al denominatore, cioè devo far diventare i termini due quadrati;

C'è un problema: se moltiplico per gli stessi numeri ottengo il quadrato di un binomio e quindi avrei due termini al quadrato ed il loro doppio prodotto; la radice resterebbe nel doppio prodotto;

Però esiste un prodotto notevole che mi dà come risultato solo dei quadrati:

la somma di due monomi per la loro differenza cioè'

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Cioè per avere dei quadrati e far sparire le radici basterà moltiplicare per gli stessi termini con il segno in mezzo cambiato. E naturalmente sopra e sotto per non cambiare di valore l'espressione:

$$= \frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} =$$

Otengo:

$$= \frac{c\sqrt{a} - c\sqrt{b}}{\sqrt{a^2 - b^2}} =$$

semplifico le radici con i quadrati:

$$= \frac{c\sqrt{a} - c\sqrt{b}}{a - b} =$$

Vediamo alcuni esercizi:

1) $\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ Soluzione:

Razionalizzare:

$$\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} =$$

Devo moltiplicare sopra e sotto per $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

$$= \frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$$

Otengo:

$$= \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{\sqrt{5^2} - \sqrt{3^2}} =$$

semplifico le radici con i quadrati:

$$= \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} =$$

semplifico numeratore e denominatore

$$= 2(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

2) $\frac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{7}}$ Soluzione:

Razionalizzare:

$$\frac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{7}} =$$

Prima di procedere conviene cambiare l'ordine dei termini al denominatore, altrimenti al denominatore otterro' un numero negativo e quindi alla fine dovrò cambiare di segno sopra e sotto.

Posso farlo per la proprietà commutativa dell'addizione: cambiando l'ordine degli addendi il risultato dell'addizione non cambia

Devo moltiplicare sopra e sotto per $\sqrt{7} - 2$

$$= \frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} =$$

Otengo:

$$= \frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{\sqrt{7^2} - \sqrt{2^2}} =$$

semplifico le radici con i quadrati:

$$= \frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{7 - 2} =$$

$$= \frac{5(\sqrt{7} - 2)}{5} =$$

semplifico numeratore e denominatore

$$= \sqrt{7} - \sqrt{2}$$

3) $\frac{9}{4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}}$ Soluzione:

Razionalizzare:

$$\frac{9}{4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}} =$$

Devo moltiplicare sopra e sotto per $4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$

$$= \frac{9}{4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}} =$$

ottengo:

$$= \frac{9(4\sqrt{3} + 2\sqrt{5})}{4^2\sqrt{3^2} - 2^2\sqrt{5^2}} =$$

semplifico le radici con i quadrati:

$$= \frac{9(4\sqrt{3} + 2\sqrt{5})}{16 \cdot 3 - 4 \cdot 5} =$$

$$= \frac{9(4\sqrt{3} + 2\sqrt{5})}{48 - 20} =$$

$$= \frac{36\sqrt{3} + 18\sqrt{5}}{28} =$$

Raccolgo due al numeratore:

$$= \frac{2(18\sqrt{3} + 9\sqrt{5})}{28} =$$

Semplifico ora per 2 ed ottengo il risultato finale :

$$= \frac{18\sqrt{3} + 9\sqrt{5}}{14} =$$

Una radice quadrata ed un termine al denominatore

Nel caso in cui abbiamo al denominatore un termine ed una radice si procede esattamente allo stesso modo del caso precedente:

$$\frac{c}{a + \sqrt{b}} =$$

Devo moltiplicare sopra e sotto per $a - \sqrt{b}$:

$$= \frac{c}{a + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} =$$

Otengo:

$$= \frac{c(a - \sqrt{b})}{a^2 - \sqrt{b^2}} =$$

semplifico la radice con il quadrato:

$$= \frac{c(a - \sqrt{b})}{a^2 - b} =$$

Vediamo alcuni esercizi:

$$1) \frac{2}{2 + \sqrt{3}} =$$

Soluzione:

Razionalizzare:

$$\frac{2}{2 + \sqrt{3}} =$$

Devo moltiplicare sopra e sotto per $2 - \sqrt{3}$

$$= \frac{2}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} =$$

ottengo:

$$= \frac{2(2 - \sqrt{3})}{2^2 - \sqrt{3^2}} =$$

semplifico la radice con il quadrato:

$$= \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} =$$

$$= 2(2 - \sqrt{3})$$

$$2) \frac{3}{5 - 2\sqrt{2}} =$$

Soluzione:

Razionalizzare:

$$\frac{3}{5 - 2\sqrt{2}} =$$

Devo moltiplicare sopra e sotto per $5 + 2\sqrt{2}$

$$= \frac{3}{5 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{5 + 2\sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}} =$$

Ottengo

$$= \frac{3(5 + 2\sqrt{2})}{5^2 - 2^2\sqrt{2}^2} =$$

semplifico la radice con il quadrato ed eseguo i calcoli:

$$= \frac{3(5 + 2\sqrt{2})}{25 - 8} =$$

sommo ed ottengo il risultato:

$$= \frac{3(5 + 2\sqrt{2})}{17}$$

Due radici cubiche al denominatore

Vediamo su un esempio:

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} =$$

Siccome dobbiamo eliminare le radici cubiche ci riferiamo alle formule

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

quindi per risolvere basterà sostituire $\sqrt[3]{a}$ al posto di x e $\sqrt[3]{b}$ al posto di y e poi moltiplicare numeratore e denominatore in modo da far sparire le radici cubiche nel seguente modo

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})[(\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2] = (\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 = a + b$$

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})[(\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2] = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = a - b$$

-
- Cioè se hai una somma di due radici cubiche
 $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$
 devi moltiplicare numeratore e denominatore per
 $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$
 - mentre se hai una differenza di radici cubiche
 $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$
 devi moltiplicare numeratore e denominatore per:
 $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$
-

Vediamolo in alcuni esercizi:

$$1) \frac{2}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} =$$

Soluzione:

Razionalizzare:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} =$$

Devo moltiplicare sopra e sotto per $\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3^2}$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3^2}} =$$

Ottengo:

$$= \frac{2(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3^2})}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{3^2}} =$$

Semplifico le radici con i cubi:

$$= \frac{2(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3^2})}{2+3} =$$

$$= \frac{2(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})}{5}$$

2) $\frac{3}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} =$ Soluzione:

Razionalizzare:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} =$$

Devo moltiplicare sopra e sotto per $\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2^2}$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2^2}} =$$

Otengo:

$$= \frac{3(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2^2})}{\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{2^2}} =$$

Semplifico le radici con i cubi:

$$= \frac{3(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2^2})}{5-2} =$$

$$= \frac{3(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})}{3} =$$

Semplifico per 3 sopra e sotto

$$= \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$$

Tre termini al denominatore

Anche qui useremo uno dei [principali meccanismi della matematica](#) : trasformeremo i tre termini in due termini (usando le parentesi):

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} = \frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + \sqrt{d}} =$$

e ci rifaremo al caso di [due termini al denominatore](#):

$$= \frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + \sqrt{d}} \cdot \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) - \sqrt{d}}{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) - \sqrt{d}} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - \sqrt{d}^2} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d})}{\sqrt{b^2} + 2\sqrt{bc} + \sqrt{c^2} - \sqrt{d^2}} =$$

Otterremo in questo modo al denominatore tre quadrati ed una radice e quindi, estraendo i quadrati e sommando avremo due termini, tra cui una radice, al denominatore:

$$= \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d})}{b + 2\sqrt{bc} + c - d} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d})}{(b + c - d) + 2\sqrt{bc}} =$$

quindi continueremo con la razionalizzazione di [due termini](#)

Ora segui l' esempio numerico, ti chiarira' meglio il concetto

Razionalizzare la seguente espressione:

$$\frac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}} =$$

Soluzione:

Razionalizzare:

$$\frac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}} = \frac{5}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{7}} =$$

moltiplico sopra e sotto per il denominatore con il segno in mezzo cambiato:

$$= \frac{5}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{7}} \cdot \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{7}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{7}} = \frac{5(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{7})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{7}}{\sqrt{2^2} + 2\sqrt{6} + \sqrt{3^2} - \sqrt{7^2}} =$$

Estraggo di radice:

$$= \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{7}}{2 + 2\sqrt{6} + 3 - 7} = \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{7}}{2\sqrt{6} - 2} =$$

Ora devo rifarmi al caso di una radice ed un numero al denominatore:

$$= \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{7}}{2\sqrt{6} - 2} \cdot \frac{2\sqrt{6} + 2}{2\sqrt{6} + 2} = \frac{10\sqrt{12} + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{18} + 10\sqrt{3} - 10\sqrt{42} - 10\sqrt{7}}{2^2\sqrt{6^2} - 2^2} =$$

Adesso scompongo al numeratore per portare fuori radice quello che posso, mentre al denominatore semplifico radice e quadrato:

$$= \frac{10\sqrt{2^2 \cdot 3} + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2 \cdot 3^2} + 10\sqrt{3} - 10\sqrt{42} - 10\sqrt{7}}{4 \cdot 6 - 4} =$$

$$= \frac{20\sqrt{3} + 10\sqrt{2} + 30\sqrt{2} + 10\sqrt{3} - 10\sqrt{42} - 10\sqrt{7}}{24 - 4} =$$

sommo i termini con le radici simili:

$$= \frac{30\sqrt{3} + 40\sqrt{2} - 10\sqrt{42} - 10\sqrt{7}}{20} =$$

Raccolgo 10 al numeratore per semplificarlo con il denominatore:

$$= \frac{10(3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - \sqrt{42} - \sqrt{7})}{20} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - \sqrt{42} - \sqrt{7}}{2} =$$

Quattro termini al denominatore

Ormai e' logico come procederemo: trasformeremo i quattro termini in due termini (usando le parentesi):

$$\frac{\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e}}{a} = \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + (\sqrt{d} + \sqrt{e})}{a} =$$

e ci rifaremo al caso di due termini al denominatore;

Sviluppando i quadrati al denominatore otterremo in questo modo quattro numeri e due radici e quindi, sommando avremo tre termini e ci rifaremo al caso precedente

Sono esercizi molto lunghi e, di solito, vengono usati dai docenti nelle classi dove ci sono alunni che riescono a fare il compito in classe con anticipo: dando come finale uno o due di questi esercizi si costringe l'alunno ad usare tutto il tempo messo a disposizione, senza concedergli tempo per "consigliare" i compagni

Vediamo un esempio numerico

Razionalizzare la seguente espressione:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \quad \text{Soluzione}$$

Razionalizzare:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{1}{(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{5})} =$$

moltiplico sopra e sotto per il denominatore con il segno in mezzo cambiato:

$$= \frac{1}{(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{5})} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - (3 + 2\sqrt{15} + 5)} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 - 2\sqrt{15} - 5} =$$

Sommo:

$$= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{2} - 2\sqrt{15} - 5} =$$

Raggruppo i primi due termini:

$$= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(2\sqrt{2} - 2\sqrt{15}) - 5} =$$

moltiplico per gli stessi termini con il segno in mezzo cambiato:

$$= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(2\sqrt{2} - 2\sqrt{15}) - 5} \cdot \frac{(2\sqrt{2} - 2\sqrt{15}) + 5}{(2\sqrt{2} - 2\sqrt{15}) + 5} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{15} + 5 + 2\sqrt{4} - 2\sqrt{30} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{45} - 5\sqrt{3} - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{75} - 5\sqrt{5}}{(2\sqrt{2} - 2\sqrt{15})^2 - 5^2} =$$

sopra estraggo di radice quello che posso, sotto sviluppo i quadrati:

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{15} + 5 + 4 - 2\sqrt{30} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 6\sqrt{5} - 5\sqrt{3} - 2\sqrt{10} + 10\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}^2 - 8\sqrt{30} + 4\sqrt{15}^2 - 25} =$$

$$= \frac{7\sqrt{2} - 2\sqrt{15} + 9 - 2\sqrt{30} - 2\sqrt{6} + \sqrt{5} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{10}}{8 - 8\sqrt{30} + 60 - 25} =$$

per essere precisi sopra ordiniamo: prima i numeri poi le radici in ordine di radicale:

$$= \frac{+9 + 7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{15} - 2\sqrt{30}}{43 - 8\sqrt{30}} =$$

moltiplico sopra e sotto per il denominatore con il segno in mezzo cambiato_

$$= \frac{+9 + 7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{15} - 2\sqrt{30}}{43 - 8\sqrt{30}} \cdot \frac{43 + 8\sqrt{30}}{43 + 8\sqrt{30}} =$$

$$= \frac{387 + 301\sqrt{2} + 215\sqrt{3} + 43\sqrt{5} - 86\sqrt{6} - 86\sqrt{10} - 86\sqrt{15} - 86\sqrt{30} + 72\sqrt{30} + 56\sqrt{60} + 40\sqrt{90} + 8\sqrt{150} - 16\sqrt{180} - 16\sqrt{300} - 16\sqrt{450} - 16\sqrt{900}}{(43)^2 - 8^2\sqrt{30}^2}$$

sopra estraio di radice quel che si può, sotto sviluppiamo:

$$= \frac{387 + 301\sqrt{2} + 215\sqrt{3} + 43\sqrt{5} - 86\sqrt{6} - 86\sqrt{10} - 86\sqrt{15} - 86\sqrt{30} + 72\sqrt{30} + 112\sqrt{15} + 120\sqrt{10} + 40\sqrt{6} - 96\sqrt{5} - 160\sqrt{3} - 240\sqrt{2} - 480}{1849 - 67 \cdot 30}$$

E questo è il risultato:

$$= \frac{-93 + 61\sqrt{2} + 55\sqrt{3} + 213\sqrt{5} - 46\sqrt{6} + 34\sqrt{10} + 26\sqrt{15} - 14\sqrt{30}}{49}$$

7. Forma esponenziale dei radicali

Svolgendo le operazioni sui radicali abbiamo trovato alcune coincidenze fra le frazioni ed i radicali: ad esempio per moltiplicare fra loro due radicali di indice diverso occorre farne il minimo comune multiplo come per la somma fra frazioni

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[12]{a^4 b^3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12}$$

Osserva la coincidenza fra i numeri

Per estrarre di radice occorre fare il quoziente ed il resto che equivale a dire trasformare una frazione impropria in numero e frazione propria.

$$\sqrt[5]{a^{13}} = \sqrt[5]{a^5 \cdot a^5 \cdot a^3} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^3} = a^2 \sqrt[5]{a^3}$$

$$\frac{13}{5} = \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$$

Anche qui osserva la coincidenza fra i numeri dei risultati

E potremmo indicare altre coincidenze

Ora in Matematica niente succede per caso: se troviamo queste analogie significa che deve essere possibile fare un collegamento fra radicali e frazioni; d'altra parte possiamo anche dire che il radicale è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza, quindi introduciamo la seguente notazione

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Cioe' indicheremo l'esponente del radicale come il denominatore di una frazione
 Piu' in generale indicheremo:

$$\sqrt[n]{a^s} = a^{s/n}$$

Cioe'

Un radicale si puo' indicare con una potenza avente la base uguale al radicando e come esponente una frazione con al numeratore l'esponente del radicando ed al denominatore l'indice della radice

Vedremo nella prossima pagina l'utilita' di questa rappresentazione

a) Applicazioni

Siccome i radicali si possono pensare in forma esponenziale (come potenze) allora potremo nei calcoli usare le [regole](#) viste per le potenze; tali regole sono valide solamente nel caso di prodotti, quozienti e potenze, ma conviene usarle perche' i calcoli vengono molto facilitati.

Vediamo un paio di esempi

$$1) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt{8} =$$

Soluzione:

Trasformo in forma esponenziale

$$= 2^{1/3} \cdot 4^{1/4} \cdot 8^{1/2} =$$

ricordando che $4 = 2^2$ ed $8 = 2^3$ posso scrivere

$$= 2^{1/3} \cdot (2^2)^{1/4} \cdot (2^3)^{1/2} =$$

eseguo la potenza di potenza

$$= 2^{1/3} \cdot 2^{2/4} \cdot 2^{3/2} =$$

posso semplificare $2/4 = 1/2$

$$= 2^{1/3} \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{3/2} =$$

prodotto di potenze con la stessa base, posso fare la somma degli esponenti

$$= 2^{(1/3 + 1/2 + 3/2)} =$$

$$= 2^{(2+3+9)/6} =$$

ritrasformo in forma di radice

$$= \sqrt[6]{2^{14}} =$$

[estraggo](#) di radice

$$= 2^{14/6} \sqrt[6]{2^2} =$$

semplifico per 2 l'indice di radice con l'esponente di potenza

$$= 4 \sqrt[3]{2} =$$

$$2) \sqrt{\frac{a \sqrt{a \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{a \sqrt{a}}}} =$$

Soluzione:

Trasformo in forma esponenziale:

$$= \left[\frac{a \cdot (a \cdot a^{1/3})^{1/2}}{(a \cdot a^{1/2})^{1/4}} \right]^{1/2} =$$

moltiplico dentro parentesi tonde (sommo gli esponenti):

$$= \left[\frac{a \cdot (a^{1+1/3})^{1/2}}{(a^{1+1/2})^{1/4}} \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{a \cdot (a^{4/3})^{1/2}}{(a^{3/2})^{1/4}} \right]^{1/2} =$$

eseguo le potenze nelle parentesi tonde (prodotto degli esponenti):

$$= \left[\frac{a \cdot a^{2/3}}{a^{3/8}} \right]^{1/2} =$$

Posso portare da sotto a sopra cambiando di segno l'esponente:

$$[a \cdot a^{2/3} \cdot a^{-3/8}]^{1/2}$$

moltiplico dentro parentesi quadra (somma degli esponenti)

$$= [a^{1+2/3-3/8}]^{1/2} =$$

$$= [a^{(24+16-9)/24}]^{1/2} =$$

$$= [a^{31/24}]^{1/2} =$$

ora eseguo il prodotto degli esponenti

$$= a^{31/24 \cdot 1/2} =$$

$$= a^{31/48} =$$

$$= \sqrt[48]{a^{31}}$$

8. Disequazioni irrazionali ad indice pari

In prima stesura consideriamo solamente radici quadrate

Una disequazione irrazionale e' una disequazione in cui un'espressione contenente l'incognita si trova sotto il segno di radice.

Chiamando F(x) e G(x) le espressioni contenenti la x considereremo i casi

- Disequazione elementare del tipo $F(x) > \sqrt{G(x)}$
- Disequazione elementare del tipo $F(x) < \sqrt{G(x)}$
- Disequazioni piu' complesse
- Caso particolare

Se invece di $>$ abbiamo $\geq$ dovremo adattare le nostre soluzioni anche all'uguaglianza: per ogni caso in fondo alla pagina sara' trattata anche l'uguaglianza

a) Disequazione elementare del tipo $F(x) > \sqrt{G(x)}$

Dobbiamo risolvere:

$$F(x) > \sqrt{G(x)}$$

Il ragionamento da fare e' il seguente:

- Il termine sotto radice (radicando) deve sempre essere maggiore o uguale a zero
 $G(x) \geq 0$
- Essendo il radicale definito positivo (o nullo) anche il primo termine (essendo maggiore del secondo) dovra' essere positivo
 $F(x) > 0$
- Il quadrato del primo termine dovra' essere maggiore del quadrato del secondo termine (infatti finora abbiamo supposto che sono entrambe positivi ma non che il primo e' maggiore del secondo)
 $[F(x)]^2 > G(x)$

Quindi l'espressione si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} G(x) \geq 0 \\ F(x) > 0 \\ [F(x)]^2 > G(x) \end{cases}$$

E la soluzione del sistema fornirà le soluzioni della disequazione

se abbiamo $F(x) \geq \sqrt{G(x)}$ allora il nostro sistema diventerà:

$$\begin{cases} G(x) \geq 0 \\ F(x) \geq 0 \\ [F(x)]^2 \geq G(x) \end{cases}$$

Infatti siccome il primo termine può essere uguale al secondo anche la seconda e terza disequazione del sistema avranno il maggiore od uguale

Vediamo ora un paio di esercizi:

1) $x - 2 > \sqrt{x^2 - 16} =$

Svolgimento:

Risolvere la disequazione:

- Il radicando deve sempre essere maggiore o uguale a zero
 $x^2 - 16 \geq 0$
- Essendo il radicale definito positivo (o nullo) anche il primo termine (essendo maggiore del secondo) dovrà essere positivo
 $x - 2 > 0$
- Il quadrato del primo termine dovrà essere maggiore del quadrato del secondo termine
 $(x - 2)^2 > x^2 - 16$

Debo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ (x - 2)^2 > x^2 - 16 \end{cases}$$

sviluppo la terza equazione

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 4x + 4 > x^2 - 16 \end{cases}$$

porto i termini prima del disuguale

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 4x + 4 - x^2 + 16 > 0 \end{cases}$$

sommo i termini simili

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ -4x + 20 > 0 \end{cases}$$

cambio di segno e verso la terza

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ 4x - 20 < 0 \end{cases}$$

porto il -20 dopo l'uguale

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ 4x < 20 \end{cases}$$

divido la terza per 4

e otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x < 5 \end{cases}$$

- La prima $x^2 - 16 \geq 0$ è verificata per $x \leq -4$ U $x \geq 4$ Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 16 \geq 0$$

considero l'equazione associata:

$$x^2 - 16 = 0$$

E' un'equazione pura

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -4 \quad x_2 = 4$$

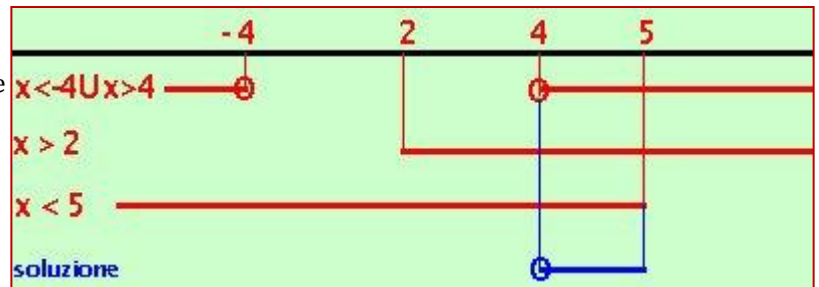
Essendo $x^2 - 16 \geq 0$ dovro' prendere i valori esterni all'intervallo delle radici, quindi

$$x \leq -4 \quad \text{U} \quad x \geq 4$$

- La seconda $x - 2 > 0$ e' verificata per $x > 2$
- La terza e' verificata per $x < 5$

Essendo un sistema devo prendere le soluzioni comuni

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove e' accettabile l'uguale li indico con un cerchietto



Devo prendere i valori che risolvono contemporaneamente tutte e tre le disequazioni: ottengo come risultato

$$4 \leq x < 5$$

2) $x - 3 \geq \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Svolgimento:

Risolvere la disequazione

- Il radicando deve sempre essere maggiore o uguale a zero
 $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
- Essendo il radicale definito positivo o nullo anche il primo termine (essendo maggiore o uguale al secondo) dovra' essere positivo o nullo
 $x - 3 \geq 0$
- Il quadrato del primo termine dovra' essere maggiore o uguale al quadrato del secondo termine
 $(x - 3)^2 \geq x^2 - 3x + 2$

Debbo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ (x - 3)^2 \geq x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

sviluppo la terza equazione

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 9 \geq x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

porto i termini prima del disuguale

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 9 - x^2 + 3x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

sommo i termini simili

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ -3x + 7 \geq 0 \end{cases}$$

cambio di segno e verso la terza

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ 3x - 7 \leq 0 \end{cases}$$

porto il -7 dopo l'uguale

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ 3x \leq 7 \end{cases}$$

divido la terza per 3

e otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x \leq 7/3 \end{cases}$$

- La prima $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ e' verificata per $x \leq 1 \cup x \geq 2$

Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

considero l'equazione associata:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = 2$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} =$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu':

$$\frac{3 - 1}{2} = 1 \quad \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Ho quindi le due soluzioni :

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2$$

Essendo $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici piu' i valori agli estremi dell'intervallo stesso, quindi

$$x \leq 1 \cup x \geq 2$$

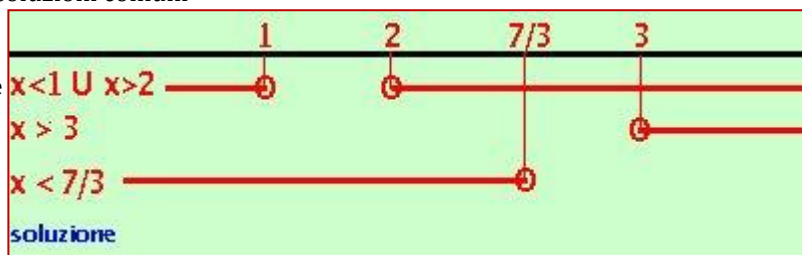
- La seconda $x - 3 \geq 0$ e' verificata per $x \geq 3$
- La terza e' verificata per $x \leq 7/3$

Essendo un sistema devo prendere le soluzioni comuni

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove e' accettabile l'uguale li indico con un cerchietto

Devo prendere i valori che risolvono contemporaneamente tutte e tre le disequazioni: siccome non esistono valori comuni la mia disequazione

Non ha soluzioni



b) Disequazione elementare del tipo $F(x) < \sqrt{G(x)}$

Dobbiamo risolvere:

$$F(x) < \sqrt{G(x)}$$

Intanto abbiamo due possibilita':

- $F(x) > 0$
- $F(x) < 0$

a) se $F(x) > 0$ allora:

- Il termine sotto radice (radicando) deve sempre essere maggiore di zero
 $G(x) > 0$
- per ipotesi
 $F(x) > 0$

- Il quadrato del primo termine dovrà essere minore del quadrato del secondo termine
 $[F(x)]^2 < G(x)$

La prima condizione è già contenuta nella terza ($G(x)$ è maggiore di un quadrato che è certamente positivo) quindi l'espressione si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ [F(x)]^2 < G(x) \end{cases}$$

b) se $F(x) < 0$ allora perché la disequazione sia verificata è sufficiente che il termine sotto radice (radicando) sia maggiore o uguale a zero $G(x) \geq 0$, perché in tal caso posso fare il radicale ed il radicale è definito positivo o nullo quindi l'espressione si trasforma nel sistema:

$$\begin{cases} F(x) < 0 \\ G(x) \geq 0 \end{cases}$$

Raccogliendo devo risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} F(x) \geq 0 \\ [F(x)]^2 < G(x) \end{cases} \quad \begin{cases} F(x) < 0 \\ G(x) \geq 0 \end{cases}$$

Nella prima poniamo anche $F(x) = 0$ per cercare tutte le soluzioni

E la soluzione dei sistemi fornirà le soluzioni della disequazione

c) se $F(x) \leq \sqrt{G(x)}$ allora otterremo:

$$\begin{cases} F(x) \geq 0 \\ [F(x)]^2 \leq G(x) \end{cases} \quad \begin{cases} F(x) < 0 \\ G(x) \geq 0 \end{cases}$$

Vediamo ora un paio di esercizi:

1) $x + 3 < \sqrt{x^2 - 3} =$ Svolgimento

Risolvere la disequazione

Devo risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ (x + 3)^2 < x^2 - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 3 \geq 0 \end{cases}$$

- risolviamo il primo:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ (x + 3)^2 < x^2 - 3 \end{cases}$$

sviluppiamo la seconda equazione

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 + 6x + 9 < x^2 - 3 \end{cases}$$

porto tutti i termini prima del disuguale

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 + 6x + 9 - x^2 + 3 < 0 \end{cases}$$

sommo i termini simili

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 6x + 12 < 0 \end{cases}$$

divido per 6

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$$

porto il termine noto dopo l'uguale e otteniamo:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

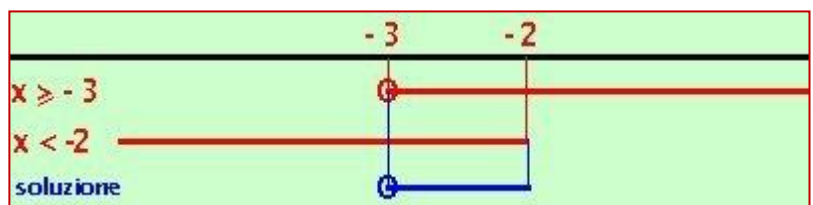
La prima $x + 3 \geq 0$ è verificata per $x \geq -3$

La seconda è verificata per $x \leq -2$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove è accettabile l'uguale li indico con un cerchietto. Essendo un sistema prendo le soluzioni comuni

Abbiamo come soluzione -

$$-3 \leq x < -2$$



- risolviamo il secondo

$$x + 3 < 0$$

$$x^2 - 3 \geq 0$$

la prima $x + 3 < 0$ e' verificata per $x < -3$

la seconda $x^2 - 3 \geq 0$ e' verificata per $x \leq -\sqrt{3} \cup x \geq \sqrt{3}$

Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 3 \geq 0$$

considero l'equazione associata:

$$x^2 - 3 = 0$$

E' un'equazione pura

$$x^2 = 3$$

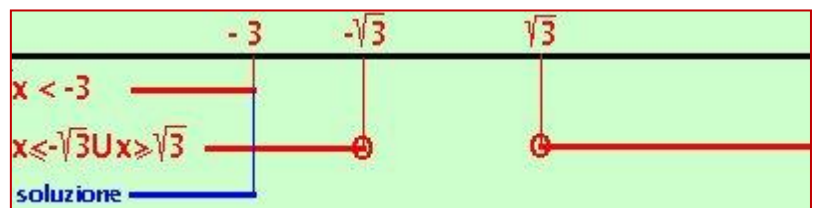
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -\sqrt{3} \quad x_2 = \sqrt{3}$$

Essendo $x^2 - 3 \geq 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici, quindi $x \leq -\sqrt{3} \cup x \geq \sqrt{3}$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove e' accettabile l'uguale li indico con un cerchietto. Abbiamo come soluzione $x < -3$



Adesso devo "cucire" le soluzioni dei due sistemi ed ottengo il risultato finale: le soluzioni della disequazione iniziale sono: $x < -2$.

$$2) \quad x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 4} =$$

Svolgimento

Risolvere la disequazione

Debbo risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ (x - 1)^2 \leq x^2 - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

- risolviamo il primo:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ (x - 1)^2 \leq x^2 - 4 \end{cases}$$

Sviluppiamo la seconda equazione

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 4 \end{cases}$$

porto tutti i termini prima del disuguale

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4 \leq 0 \end{cases}$$

sommo i termini simili

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ -2x + 5 \leq 0 \end{cases}$$

porto il termine noto dopo l'uguale

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ -2x \leq -5 \end{cases}$$

cambio di segno e di verso

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x \geq 5 \end{cases}$$

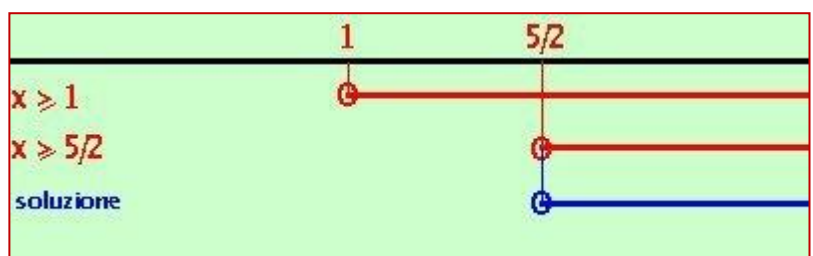
divido per 2 entrambe i termini e otteniamo:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x \geq 5/2 \end{cases}$$

La prima $x - 1 \geq 0$ e' verificata per $x \geq 1$

La seconda e' verificata per $x \geq 5/2$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove e' accettabile



l'uguale li indico con un cerchietto. Essendo un sistema prendo le soluzioni comuni

Abbiamo come soluzione $x \geq 5/2$

- risolviamo il secondo:

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

La prima $x - 1 < 0$ e' verificata per $x < 1$

La seconda $x^2 - 4 \geq 0$ e' verificata per $x \leq -2 \cup x \geq 2$

Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 4 \geq 0$$

considero l'equazione associata:

$$x^2 - 4 = 0$$

E' un'equazione pura

$$x^2 = 4$$

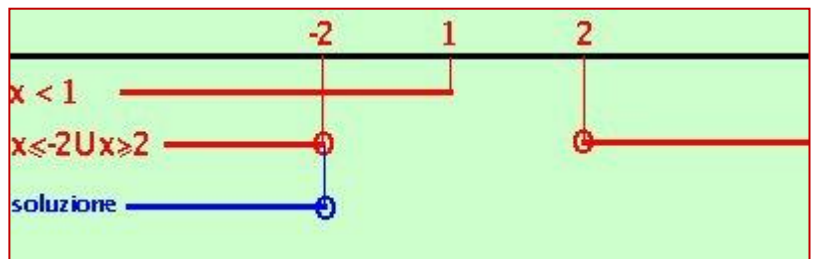
$$x = \pm\sqrt{4}$$

Ho quindi le due soluzioni

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$$

Essendo $x^2 - 4 \geq 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici, quindi: $x \leq -2 \cup x \geq 2$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove e' accettabile l'uguale li indico con un cerchietto. Abbiamo come soluzione $x \leq -2$



Adesso devo prendere le soluzioni

sia del primo che del secondo sistema ed ottengo il risultato finale: le soluzioni della disequazione iniziale sono

$$x \leq -2 \cup x \geq 5/2$$

c) Disequazioni piu' complesse

Quando abbiamo disequazioni piu' complesse con tre o piu' radicali si procede nel modo seguente:

1. Si spostano i radicali dalla parte della disequazione dove hanno il segno positivo (nella pagina seguente una giustificazione logica del procedimento)
2. Si risolve un sistema le cui disequazioni sono i radicandi posti ciascuno maggiore od uguale a zero e si trova l'intervallo in cui la disequazione e' possibile
3. Si procede come per le equazioni irrazionali con opportuni elevamenti a potenza per ridurre i radicali, sino ad ottenere un radicale ed un numero
4. Quello che abbiamo ottenuto e' una disequazione elementare del tipo gia' visto: va risolta
5. I risultati trovati vanno messi a sistema con l'intervallo in cui e' possibile la disequazione

Vediamo il metodo, punto per punto, su un esercizio:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} < \sqrt{x+3} =$$

Svolgimento:

1. Si spostano i radicali dalla parte della disequazione dove hanno il segno positivo

sposto il secondo radicale dopo il disuguale cambiandolo di segno:

$$\sqrt{x+1} < \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}$$

2. Si risolve un sistema le cui disequazioni sono i radicandi posti ciascuno maggiore od uguale a zero e si trova l'intervallo in cui la disequazione e' possibile

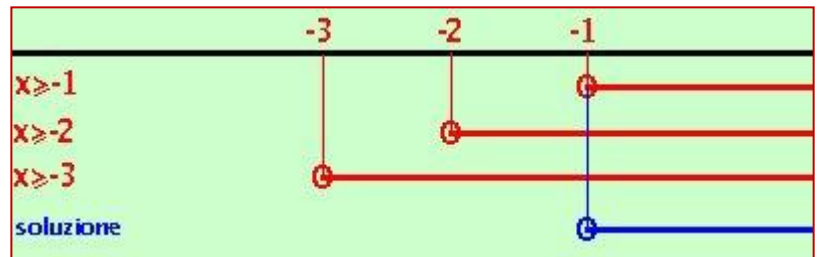
imposto il sistema:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$$

ottengo:

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -2 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove e' accettabile l'uguale li indico con un cerchietto. Abbiamo come soluzione: $x \geq -1$



3. Si procede come per le equazioni irrazionali con opportuni

elevamenti a potenza per ridurre i radicali, sino ad ottenere un radicale ed un numero

Sono tre radicali: elevo a quadrato da una parte e dall'altra

$$(\sqrt{x+1})^2 < (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3})^2$$

Ottengo:

$$x+1 < x+2+2\sqrt{(x+2)(x+3)}+x+3$$

Porto i termini fuori radice prima del disuguale e lascio la radice dopo:

$$x+1-x-2-x-3 < 2\sqrt{(x+2)(x+3)}$$

sommo, multiplico dentro radice ed ottengo:

$$-x-4 < 2\sqrt{x^2+5x+6}$$

4. Quello che abbiamo ottenuto e' una disequazione elementare del tipo gia' visto: va risolta

e' una disequazione irrazionale elementare del secondo tipo che abbiamo visto: risolviamola; devo risolvere i sistemi:

$$\begin{cases} -x-4 \geq 0 \\ (-x-4)^2 < 4(x^2+5x+6) \end{cases} \quad \begin{cases} -x-4 < 0 \\ 4(x^2+5x+6) \geq 0 \end{cases}$$

Risolviamo il primo:

$$\begin{cases} -x-4 \geq 0 \\ (-x-4)^2 < 4(x^2+5x+6) \end{cases}$$

Nella prima equazione cambio di segno e verso, nella seconda eseguo il quadrato e multiplico per 4

$$\begin{cases} x+4 \leq 0 \\ x^2+8x+16 < 4x^2+20x+24 \end{cases}$$

risolvo la prima e, nella seconda, porto tutti i termini prima del disuguale

$$\begin{cases} x \leq -4 \\ x^2+8x+16-4x^2-20x-24 < 0 \end{cases}$$

sommo i termini simili

$$\begin{cases} x \leq -4 \\ -3x-12x-8 < 0 \end{cases}$$

Nella seconda cambio di segno e verso e otteniamo:

$$\begin{cases} x \leq -4 \\ 3x^2+12x+8 > 0 \end{cases}$$

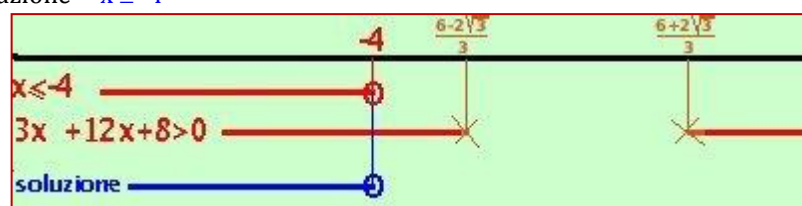
La seconda e' verificata per valori esterni all'intervallo

$$\frac{6-2\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

3 3

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove e' accettabile l'uguale li indico con un cerchietto. Essendo un sistema prendo le soluzioni comuni

Abbiamo come soluzione $x \leq -4$



Risolvi il secondo:

$$\begin{cases} -x - 4 < 0 \\ 4(x^2 + 5x + 6) \geq 0 \end{cases}$$

Divido la seconda per 4:

$$\begin{cases} -x - 4 < 0 \\ x^2 + 5x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

La prima $-x - 4 < 0$ è verificata per $x > -4$

La seconda $x^2 + 5x + 6 \geq 0$ è verificata per $x \leq -3$ U $x \geq -2$ [calcoli](#)

Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 + 5x + 6 \geq 0$$

considero l'equazione associata:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = 5$$

$$c = 6$$

sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} =$$

facciamo i calcoli dentro radice:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} =$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} =$$

adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il più :

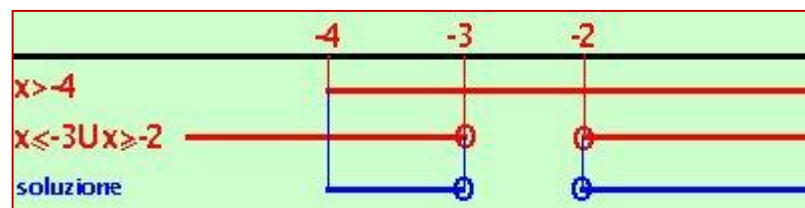
$$\frac{-5 - 1}{2} = -3 \quad \frac{-5 + 1}{2} = -2$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -2$$

Essendo $x^2 + 5x + 6 \geq 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici più i valori agli estremi dell'intervallo stesso, quindi

$$x \leq -3 \quad \text{U} \quad x \geq -2$$



Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove è accettabile l'uguale li indico con un cerchietto.

Abbiamo come soluzione

$$-4 < x \leq -3 \quad \text{U} \quad x \geq -2$$

Ora devo mettere assieme le soluzioni dei due sistemi ed ottengo

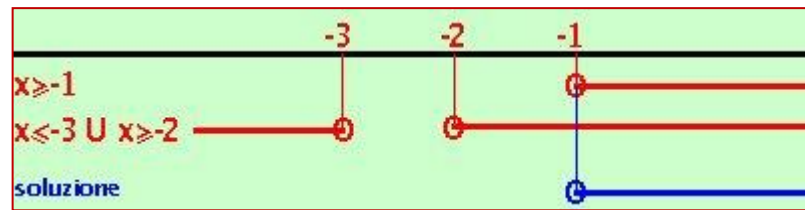
$$x \leq -3 \quad \text{U} \quad x \geq -2$$

5. **I risultati trovati vanno messi a sistema con l'intervallo in cui e' possibile la disequazione** Quindi faccio un sistema fra le condizioni di realta' delle radici e le soluzioni trovate sopra

$$x \geq -1$$

$$x \leq -3 \text{ U } x \geq -2$$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori



dove e' accettabile l'uguale li indico con un cerchietto.

Abbiamo come soluzione della disequazione iniziale

$$x \geq -1$$

d) Caso particolare

Conviene sempre spostare i radicali dalla parte dove hanno il segno positivo:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} > \sqrt{x+3}$$

Infatti in questa equazione supponiamo di non spostare niente e risolverla in modo normale: Dopo aver posto le condizioni di realta' delle radici non posso passare ad elevare al quadrato perche' non so il segno del termine che si trova prima del disuguale: infatti i due radicali sono positivi ma in mezzo c'e' il segno meno.

Per poter proseguire dovrò prima sviluppare la condizione aggiunta:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} > 0$$

Infatti solo aggiungendo questa condizione sara' possibile risolvere la disequazione in modo corretto.

La condizione e' essenziale, perche' siccome poi devo fare gli elevamenti a potenza, se il primo termine e' negativo quando lo elevo al quadrato diventa positivo e quindi mi verranno falsati i risultati

Allora, se possibile, senza stare a complicarci la vita, e' meglio spostare i radicali dove il loro segno e' positivo

Se pero' non e' possibile spostare i radicali (pensa di avere tre radicali da una parte ed uno dall'altra) allora dovrai aggiungere le opportune condizioni per il termine con il segno meno in mezzo, ma questo diventa un esercizio per specialisti (sviluppare piu' avanti).

9. Disequazioni irrazionali ad indice dispari

Quando l'indice del radicale e' dispari posso tranquillamente elevare a potenza in modo da far sparire i radicali, senza nessun problema.

Vediamo un piccolo esempio:

Risolvere la seguente disequazione:

$$\sqrt[3]{x+1} > 2$$

Elevo al cubo da una parte e dall'altra:

$$(\sqrt[3]{x+1})^3 > (2)^3$$

Otengo:

$$x+1 > 8$$

$$x > 8 - 1$$

ed ottengo come risultato finale

$$x > 7$$

G. Logaritmi

1. Utilita' dei logaritmi

Quando Nepero invento' i logaritmi i matematici contemporanei dissero che era stata loro regalata la meta' della vita: infatti l'occupazione principale dei matematici e soprattutto di quelli che si occupavano di astronomia ed astrologia (cioe' di quasi tutti) era quella di calcolare la posizione dei pianeti, nel presente, nel passato e nel futuro e l'espressione "calcoli astronomici" non era certo un modo di dire.

Oggi come oggi esistono i computer, e non ci si rende conto di quanto sia importante il fare calcoli rapidamente ed in modo preciso; quando invece ho cominciato ad insegnare (nomina in matematica finanziaria ed attuariale) ancora non c'erano nemmeno le calcolatrici tascabili e si usava il regolo calcolatore in legno; in quel periodo i logaritmi erano l'unico modo per poter fare certi calcoli quali ad esempio il calcolo del montante di un capitale impiegato per un certo numero di anni oppure l'interesse che ha permesso di formare una certa somma dopo un dato numero di anni.

Mi ricordo, all'inizio della mia carriera scolastica, che uno studio di un architetto mi propose addirittura, come secondo lavoro, di ripassare i loro calcoli per controllarne la precisione, naturalmente rifiutai, ma questo vi fa capire qual'era il bisogno di fare calcoli in modo rapido e preciso

I matematici possedevano le formule di prostaferesi che permettono di trasformare prodotti in somme e quindi di semplificare i calcoli, ma tali formule sono piuttosto complicate da applicare.

Con i logaritmi e' possibile trasformare prodotti in somme, quozienti in differenze, elevamenti a potenza in prodotti e calcoli di radici in quozienti, quindi tutte le operazioni vengono molto semplificate.

A questo aggiungiamo che i nostri sensi sono "logaritmici": se ad esempio ascoltiamo un suono e sentiamo poi un altro suono che ci sembra di intensita' doppia in effetti misurandolo ha intensita' quattro volte superiore, la stessa cosa se vediamo una luce; se vediamo poi un'altra luce che ci sembra 3 volte piu' forte e misuriamo vediamo che e' 9 volte piu' forte; cioe' i nostri sensi sono in scala logaritmica, cosa che ci permette di poter avere uno spettro di sensazioni molto piu' ampio di quello che avremmo se i nostri sensi fossero lineari. Utilizziamo i logaritmi nella vita di tutti i giorni, un esempio di logaritmo l'hai sicuramente notato dal gommista: quando ti misura la pressione di una gomma sul suo strumento la scala non e' lineare ma e' logaritmica; ma prova anche a guardare le scale sulla tua macchina fotografica qui sotto ti faccio un esempio di scala logaritmica, prova a pensare in quanti strumenti hai visto qualcosa del genere



2. Cos'e' il logaritmo

Come dice mio figlio Emanuele, quando uno fa le potenze e poi, come operazione inversa, fa le radici pensa di aver finito, invece

Invece, dice lui, ci sono anche i logaritmi che sono una delle cose piu' simpatiche della matematica

Consideriamo l'uguaglianza

$$2^3 = 8$$

In essa ci son tre quantita' cioe'

2 3 8

- Se non conosco **8** allora l'uguaglianza diventa

$$2^3 = x$$

e questa e' l'operazione di elevamento a potenza

- Se non conosco **2** allora l'uguaglianza diventa

$$x^3 = 8$$

cioe' devo trovare il numero che elevato alla terza vale 8 e questa e' l'operazione di estrazione di radice che scriveremo in modo equivalente

$$x =$$

- Se non conosco **3** allora l'uguaglianza diventa

$$2^x = 8$$

cioe' devo trovare l'esponente che messo al 2 mi dia 8 e questa e' l'operazione di logaritmo che scriveremo in modo equivalente

$$x = \log_2 8$$

si legge: **x e' uguale al logaritmo in base 2 di 8**

In pratica il logaritmo e' **un esponente**.

3. Definizione di logaritmo

Consideriamo le due uguaglianze equivalenti

$$3 = \log_2 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = 8$$

Possiamo leggerle nel seguente modo

3 e' il logaritmo in base 2 di 8 perche' 2 elevato alla terza mi da' 8;

se ora al posto di 2, 3 ed 8 mettiamo delle lettere a, c, b leggendo le eguaglianze otterremo la definizione di logaritmo:

$$c = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

c e' il logaritmo in base a di b perche' a elevato alla c mi da' b

o meglio:

Si dice *logaritmo* del numero b in base a quel numero c che dato come esponente ad a da' come risultato b:

$$c = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

Siccome a e' la base di una potenza dovra' sempre essere positiva altrimenti, se fosse negativa il valore della potenza sarebbe positivo o negativo a seconda che l'esponente sia un numero pari o dispari; per evitare guai considereremo sempre la base positiva

Esercizi sulla definizione di logaritmo:

Trovare il valore dei seguenti logaritmi:

- 1) **$x = \log_2 16$** soluzione:

Significa

$$2^x = 16$$

cioe' devo trovare quel numero che messo come esponente al 2 mi da' 16

Se non riesco a trovarlo mentalmente scompongo il numero 16

$$16 = 2^4$$

l'esponente vale 4 quindi

$$\log_2 16 = 4$$

- 2) **$x = \log_{10} 1000$** soluzione:

Significa

$$10^x = 1000$$

cioe' devo trovare quel numero che messo come esponente al 10 mi da' 1000

Se non riesco a trovarlo mentalmente scompongo il numero 1000

$$1000 = 2^3 \cdot 5^3 = 10^3$$

l'esponente vale 3 quindi

$$\log_{10} 1000 =$$

3) $x = \log_3 81$ soluzione:

Significa

$$3^x = 81$$

cioe' devo trovare quel numero che messo come esponente al 3 mi da' 81

Se non riesco a trovarlo mentalmente scompongo il numero 81

$$81 = 3^4$$

l'esponente vale 4 quindi

$$\log_3 81 = 4$$

4) $x = \log_5 125$ soluzione:

Significa

$$5^x = 125$$

cioe' devo trovare quel numero che messo come esponente al 5 mi da' 125

Se non riesco a trovarlo mentalmente scompongo il numero 125

$$125 = 5^3$$

l'esponente vale 3 quindi

$$\log_5 125 = 3$$

1

5) $x = \log_4 \frac{1}{64}$ soluzione:

64

Significa

1

$$4^x = \frac{1}{64}$$

64

cioe' devo trovare quel numero che messo come esponente al 4 mi da' 1/64 cioe' un esponente negativo

Se non riesco a trovarlo mentalmente scompongo il numero 64 e lo metto in forma di potenza di 4

$$64 = 2^6 = 4^3$$

l'esponente vale 3 ma siccome il numero e' sotto il segno di frazione l'esponente e' negativo e quindi vale -3

1

$$\log_4 \frac{1}{64} = -3$$

64

6) $x = \log_a 1$ soluzione:

Significa

$$a^x = 1$$

cioe' devo trovare quel numero che messo come esponente ad a mi da' come risultato 1

So che un numero elevato a potenza zero mi da' sempre 1 [ripassa la dimostrazione](#)

quindi

$$\log_a 1 = 0$$

Il logaritmo in qualunque base di 1 vale sempre zero

Ricorda pero' che la base deve sempre essere maggiore di zero e diversa da 1

7) $x = \log_a 0$ soluzione:

Significa

$$a^x = 0$$

cioe' devo trovare quel numero che messo come esponente ad a mi da' come risultato 0

Nessun numero, non nullo, elevato a potenza mi puo' dare come risultato zero, quindi

$$\log_a 0 = x \text{ non ha significato}$$

Il logaritmo in qualunque base di 0 non si puo' fare

Se il numero e' positivo anche se e' molto vicino a zero il logaritmo e' sempre possibile

4. Un po' di nomenclatura

Consideriamo la scrittura

$$c = \log_a b$$

a si chiama **base**

b e' l'**argomento** del logaritmo

Tutta l'espressione $\log_a b$ si chiama **logaritmo**

mentre l'espressione

$$a^x = b$$

in cui alla x si sostituisce il valore del logaritmo si chiama antilogaritmo

Come base di un logaritmo e' possibile prendere qualsunque numero positivo diverso da 1 (*Scheda n.L1*), ma fra le varie basi due sono fondamentali

- La base 10, i logaritmi con tale base sono detti di Briggs e di solito sono indicati senza mettere la base ma con la L di logaritmo maiuscola
 $\log_{10} b = \text{Log } b$
- La base e numero di Nepero, i logaritmi con tale base sono detti logaritmi naturali o neperiani e di solito vengono indicati in uno dei seguenti modi
 $\log_e b = \log b = \ln b$
Io di solito preferisco la notazione $\log b$, e usero' quasi sempre questa.

Scheda n. L1

Come abbiamo gia' detto il logaritmo e' l'esponente di una potenza e noi possiamo definire la potenza con un esponente variabile solamente quando la base e' un numero positivo

Se definissimo la potenza con la base negativa avremmo il valore che varia dal positivo al negativo al variare dell'esponente da pari a dispari

Inoltre e' banale prendere come base 1 perche' qualunque potenza con base 1 vale sempre 1

5. Valori fondamentali (per gli esercizi)

Veramente ora c'entrano poco, ma siccome sono valori che incontreremo molto spesso e' bene caratterizzarli subito:

Il logaritmo in qualunque base di 1 vale sempre zero

$$\log_a 1 = 0$$

deriva dalla proprieta' delle potenze che dice che ogni numero elevato a potenza zero vale 1

$$a^0 = 1$$

esempio

$$\log_2 1 = 0 \quad \log_{1/3} 1 = 0 \quad \text{Log } 1 = 0 \quad \log 1 = 0$$

Il logaritmo in base a di a vale sempre uno

$$\log_a a = 1$$

deriva dalla proprieta' delle potenze che dice che ogni numero elevato a potenza uno vale sempre lo stesso numero

$$a^1 = a$$

esempi

$$\log_2 2 = 1 \quad \log_{1/3} 1/3 = 1 \quad \text{Log } 10 = 1 \quad \log e = 1$$

Come conseguenza abbiamo che il logaritmo in base a di $1/a$ vale sempre meno uno

$$\log_a 1/a = -1$$

deriva dalla proprietà delle potenze che dice che ogni numero elevato a potenza meno uno vale il reciproco del numero stesso

$$a^{-1} = 1/a$$

esempi

$$\log_2 1/2 = -1 \quad \log_{1/3} 3 = -1 \quad \log 0,1 = -1 \quad \log 1/e = -1.$$

6. Possibili basi per i logaritmi

Se prendiamo la definizione di logaritmo

$$c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b$$

ed osserviamo la potenza $a^c = b$

Quali valori possiamo attribuire alla base a ?

- Non possiamo attribuire un valore negativo perché al variare dell'esponente da pari a dispari il valore della potenza salterebbe da valori positivi a valori negativi
- Non possiamo attribuire il valore zero perché zero elevato a qualunque numero diverso da zero vale sempre zero (invece $0^0 = 1$ per convenzione)
- Non possiamo attribuire il valore uno perché uno elevato a qualunque numero vale sempre uno

Possiamo suddividere le possibili basi per un logaritmo in due grandi gruppi:

- base maggiore di uno
- base compresa fra zero ed uno

a) Logaritmi a base maggiore di 1

Cerchiamo di fissare il problema con degli esempi numerici: consideriamo dei logaritmi a base 3

prima positivi

$$\log_3 3 = 1 \quad \text{perché } 3^1 = 3$$

$$\log_3 9 = 2 \quad \text{perché } 3^2 = 9$$

$$\log_3 27 = 3 \quad \text{perché } 3^3 = 27$$

.....

poi negativi

$$\log_3 1/3 = -1 \quad \text{perché } 3^{-1} = 1/3$$

$$\log_3 1/9 = -2 \quad \text{perché } 3^{-2} = 1/9$$

$$\log_3 1/27 = -3 \quad \text{perché } 3^{-3} = 1/27$$

.....

in mezzo avremo

$$\log_3 1 = 0 \quad \text{perché } 3^0 = 1$$

mettiamo in ordine secondo il valore dell'argomento

$$\log_3 1/27 = -3$$

$$\log_3 1/9 = -2$$

$$\log_3 1/3 = -1$$

$$\log_3 1 = 0$$

$$\log_3 3 = 1$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_3 27 = 3$$

Possiamo osservare che quando la base è 3

- quando l'argomento è minore di 1 il valore del logaritmo è negativo e diventa sempre più **piccolo** man mano che l'argomento si avvicina a zero
- quando l'argomento vale uno il logaritmo vale zero
- quando l'argomento è maggiore di uno il logaritmo è positivo e cresce al crescere dell'argomento

Come abbiamo preso la base 3 potevamo prendere 2, 4, 5, 6, ... Queste regole sono valide per tutte le basi maggiori di uno, ma torneremo ancora sull'argomento quando faremo il grafico della funzione logaritmo.

b) Logaritmi a base compresa fra 0 e 1

Anche qui cerchiamo di fissare il problema con degli esempi numerici: consideriamo dei logaritmi a base $1/3$

prima positivi

$$\log_{1/3} 1/3 = 1 \quad \text{perché } 1/3^1 = 1/3$$

$$\log_{1/3} 1/9 = 2 \quad \text{perché } 1/3^2 = 1/9$$

$$\log_{1/3} 1/27 = 3 \quad \text{perché } 1/3^3 = 1/27$$

.....

poi negativi

$$\log_{1/3} 3 = -1 \quad \text{perché } 1/3^{-1} = 3^1 = 3$$

$$\log_{1/3} 9 = -2 \quad \text{perché } 1/3^{-2} = 3^2 = 9$$

$$\log_{1/3} 27 = -3 \quad \text{perché } 1/3^{-3} = 3^3 = 27$$

.....

in mezzo avremo

$$\log_{1/3} 1 = 0 \quad \text{perché } 1/3^0 = 1$$

anche qui mettiamo in ordine secondo il valore dell'argomento

$$\log_{1/3} 1/27 = 3$$

$$\log_{1/3} 1/9 = 2$$

$$\log_{1/3} 1/3 = 1$$

$$\log_{1/3} 1 = 0$$

$$\log_{1/3} 3 = -1$$

$$\log_{1/3} 9 = -2$$

$$\log_{1/3} 27 = -3$$

Possiamo osservare che quando la base è $1/3$

- quando l'argomento è minore di 1 il valore del logaritmo è positivo e diventa sempre più grande man mano che l'argomento si avvicina a zero
- quando l'argomento vale uno il logaritmo vale zero
- quando l'argomento è maggiore di uno il logaritmo è negativo e diventa più **piccolo** al crescere dell'argomento

Come abbiamo preso la base $1/3$ potevamo prendere $1/2$, $1/4$, $1/5$, $1/6$, ... Queste regole sono valide per tutte le basi minori di uno, ma torneremo ancora sull'argomento quando faremo il grafico della funzione logaritmo.

7. Proprieta' dei logaritmi

Siccome il logaritmo e' l'esponente della potenza per esso saranno valide le regole viste per il calcolo delle potenze, naturalmente adattate al nostro logaritmo.

a) Logaritmo di un prodotto

Regola: Il logaritmo di un prodotto e' uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori
 $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Deriva dalla regola del prodotto di due potenze aventi la stessa base infatti, ricordando che il logaritmo e' l'esponente abbiamo

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

poniamo

$$x = \log_a b$$

$$y = \log_a c$$

allora per definizione di logaritmo abbiamo

$$a^x = a^{\log_a b} = b$$

$$a^y = a^{\log_a c} = c$$

moltiplicando fra loro le due relazioni otteniamo

$$a^x \cdot a^y = b \cdot c$$

e, per la regola delle potenze

$$a^{x+y} = b \cdot c$$

ma allora per la definizione di logaritmo si ha

$$x + y = \log_a(b \cdot c)$$

quindi sostituendo ad x ed y i loro valori avremo la formula finale

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$$

Quindi se dobbiamo fare un prodotto piuttosto complicato possiamo trasformare i fattori in logaritmi, farne la somma e poi fare l'antilogaritmo per trovarne il risultato

Facciamo un esempio molto banale, tanto per vedere il metodo: useremo i logaritmi in base 2 anche se, di solito, per questi calcoli si usano i logaritmi decimali o di Briggs cioe' a base 10

Voglio calcolare

$16 \cdot 64 =$ Trasformo in logaritmi, ad esempio in base 2

$$\log_2 16 = 4 \quad \log_2 64 = 6$$

faccio la somma

$$4 + 6 = 10$$

questo e' il logaritmo del risultato, per trovare il risultato devo metterlo come esponente alla base

$$2^{10} = 1024$$

quindi

$$16 \cdot 64 = 1024.$$

b) Logaritmo di un quoziente

Regola: Il logaritmo di un quoziente e' uguale alla differenza dei logaritmi dei singoli fattori

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Deriva dalla regola del quoziente di due potenze aventi la stessa base infatti, ricordando che il logaritmo e' l'esponente abbiamo

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\begin{aligned} x &= \log_a b \\ y &= \log_a c \end{aligned}$$

allora per definizione di logaritmo abbiamo

$$\begin{aligned} a^x &= a^{\log_a b} = b \\ a^y &= a^{\log_a c} = c \end{aligned}$$

dividendo fra loro le due relazioni otteniamo

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c}$$

e, per la regola del quoziente di due potenze

$$a^{x-y} = \frac{b}{c}$$

ma allora per la definizione di logaritmo si ha

$$x - y = \log_a \left(\frac{b}{c} \right)$$

quindi sostituendo ad x ed y i loro valori avremo la formula finale

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

una conseguenza notevole e che useremo spesso e'

$$-\log_a b = \log_a \frac{1}{b}$$

Quindi se dobbiamo fare un quoziente piuttosto complicato possiamo trasformare i fattori in logaritmi, farne la differenza e poi fare l'antilogaritmo per trovarne il risultato. Anche qui facciamo un esempio molto banale, tanto per vedere il metodo: useremo i

logaritmo in base 2 anche se, di solito, per questi calcoli si usano i logaritmi decimali o di Briggs cioè a base 10

Voglio calcolare

$1024:64 =$ Trasformo in logaritmi, nel nostro caso in base 2

$$\log_2 1024 = 10 \quad \log_2 64 = 6$$

faccio la differenza

$$10 - 6 = 4$$

questo è il logaritmo del risultato, per trovare il risultato devo metterlo come esponente alla base

$$2^4 = 16$$

quindi

$$1024:64 = 16$$

c) Logaritmo di una potenza

Regola: Il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base (la base è riferita alla potenza, non al logaritmo)

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

Deriva dalla regola della potenza di una potenza

infatti, ricordando che il logaritmo e l'esponente abbiamo

$$(a^x)^n = a^{nx}$$

poniamo

$$x = \log_a b$$

significa

$$a^x = b$$

elevo entrambe i membri a potenza n

$$(a^x)^n = b^n$$

cioè

$$a^{nx} = b^n$$

Per definizione di logaritmo posso scrivere la relazione precedente come

$$nx = \log_a b^n$$

ma siccome $x = \log_a b$

$$n \log_a b = \log_a b^n$$

come volevamo

Quindi se dobbiamo fare una potenza possiamo trasformare la base in logaritmo, moltiplicare il risultato per la potenza e poi fare l'antilogaritmo per trovarne il risultato

Sembra complicato, ma prova ad esempio a fare questa potenza senza usare i logaritmi

$$(1,015)^{30} =$$

Guarda che è un problema pratico: è il calcolo del montante di una lira impiegata per 30 anni all'interesse composto dell'1,5%

d) Logaritmo di una radice

Regola: Il logaritmo di una radice è uguale al prodotto dell'inverso dell'indice per il logaritmo della radicando

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Deriva dal fatto di poter scrivere una radice come una potenza cioe'

$$\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$$

Quindi se dobbiamo fare una radice possiamo trasformare la base in logaritmo, moltiplicare il risultato per l'inverso dell'indice e poi fare l'antilogaritmo per trovarne il risultato

Vediamo un esempio banale che potrei risolvere anche in altro modo

$$\sqrt[5]{1024} =$$

siccome 1024 e' una potenza del 2 uso i logaritmi in base 2
passo al logaritmo

$$\log_2 \sqrt[5]{1024} = \frac{1}{5} \log_2 1024 = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$$

ora passo all'antilogaritmo

$$2^2 = 4$$

cioe'

$$\sqrt[5]{1024} = 4$$

e) Esercizio sulla proprietà dei logaritmi

In questa prima stesura vediamo un esercizio che ci mostri come applicare le proprietà dei logaritmi; in seguito amplieremo il numero degli esercizi (fare un link qui)

Utilizzando le proprietà dei logaritmi calcolare il valore dell'espressione:

$$\sqrt[3]{\frac{2^4 \sqrt[4]{8 \cdot (0,125)^4}}{0,5 \cdot \sqrt[4]{(0,5) \cdot (0,25)^6}}}$$

i numeri sono tutti potenze di 2 quindi trasformiamo in logaritmo in base 2

$$\log_2 \sqrt[3]{\frac{2^4 \sqrt[4]{8 \cdot (0,125)^4}}{0,5 \cdot \sqrt[4]{(0,5) \cdot (0,25)^6}}}$$

La prima operazione che incontriamo con il logaritmo e' la radice: applico la regola del logaritmo di una radice

$$= \frac{1}{3} \log_2 \frac{2^4 \sqrt[4]{8 \cdot (0,125)^4}}{0,5 \cdot \sqrt[4]{(0,5) \cdot (0,25)^6}}$$

Ora ho la frazione: applico la regola del logaritmo di un quoziente:

$$= \frac{1}{3} \left\{ \log_2 \left[2^4 \sqrt[4]{8 \cdot (0,125)^4} \right] - \log_2 \left[0,5 \cdot \sqrt[4]{(0,5) \cdot (0,25)^6} \right] \right\}$$

Dentro le parentesi quadre ho dei prodotti: applico la regola del logaritmo di un prodotto

$$= \frac{1}{3} \left[\log_2 2 + \log_2 \sqrt[4]{8} + \log_2 (0,125)^4 - \log_2 0,5 - \log_2 \sqrt[4]{(0,5)} - \log_2 (0,25)^6 \right]$$

Notiamo che

$$0,125 = \frac{1}{8} = 2^{-3} \quad 0,5 = \frac{1}{2} = 2^{-1} \quad 0,25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

otteniamo quindi:

$$= \frac{1}{3} \left[\log_2 2 + \log_2 \sqrt[4]{8} + \log_2 \left(\frac{1}{8} \right)^4 - \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) - \log_2 \sqrt[4]{\frac{1}{2}} - \log_2 \left(\frac{1}{4} \right)^6 \right]$$

ed applicando le regole sulle potenze e sulle radici:

$$= \frac{1}{3} \left[\log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 8 + 4 \log_2 \frac{1}{8} - \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{2} - 6 \log_2 \frac{1}{4} \right]$$

sostituiamo ai logaritmi i loro valori

$$= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{4} \cdot 3 + 4 \cdot (-3) - (-1) - \frac{1}{4} \cdot (-1) - 6 \cdot (-2) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{4} - 12 + 1 + \frac{1}{4} + 12 \right) =$$

m.c.m. dentro parentesi

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4 + 3 - 48 + 4 + 1 + 48}{4} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{4} = 1$$

ora facciamo l'antilogaritmo calcolando la potenza a base 2 con esponente il numero trovato

$$2^1 = 2$$

quindi

$$\sqrt[3]{\frac{2^4 \sqrt[4]{8} \cdot (0,125)^4}{0,5 \cdot \sqrt[4]{(0,5) \cdot (0,25)^6}}} = 2$$

8. Cambiamento di base

Talvolta puo' essere utile cambiare la base del logaritmo, qui vediamo come e' possibile fare

Regola: Il logaritmo di un numero positivo C rispetto ad una nuova base b e' uguale al rapporto fra il logaritmo di C in base b e il logaritmo di a in base b

$$\log_a C = \frac{\log_b C}{\log_b a}$$

La formula viene usata piuttosto raramente nelle scuole secondarie ed ha invece piu' interesse per quanto riguarda l'universita' anche perche' permette di ottenere alcune formule particolarmente utili nelle applicazioni (da linkare qui in seconda stesura).

La dimostrazione di solito viene saltata, io la metto comunque

Dimostrazione: infatti se consideriamo:

$$x = \log_a C$$

equivale a dire

$$a^x = C$$

applichiamo il logaritmo in base b ad entrambe i termini $\log_b a^x = \log_b C$

Per la regola della potenza vale

$$x \log_b a = \log_b C$$

ricavo x

$$\log_b C$$

$$x = \frac{\log_b C}{\log_b a}$$

$$\log_b a$$

e ricordando che x e' $\log_a C$ ottengo la formula finale

$$\log_b C$$

$$\log_a C = \frac{\log_b C}{\log_b a}$$

$$\log_b a$$

9. Grafico della funzione logaritmo

Vediamo adesso il grafico della funzione

$$y = \log_a x$$

dobbiamo distinguere i due casi

- la base a e' maggiore di 1
- la base a e' compresa fra 0 ed 1

E' importante farlo perche', per poter risolvere disequazioni logaritmiche dovremo avere ben chiare entrambe le possibilita'.

a) Grafico della funzione logaritmica quando la base a e' maggiore di 1

Costruiamo il grafico considerando la base 2: infatti quando la base e' maggiore di 1 tutte le curve ottenute con qualunque base hanno le stesse caratteristiche: in fondo alla pagina hai un esempio

Voglio costruire il grafico della funzione

$$y = \log_2 x$$

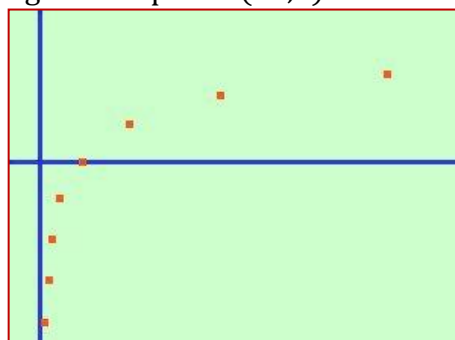
lo costruiamo per punti: diamo dei valori alla x ed otteniamo la y; per farla piu' semplice consideriamola nella formula equivalente

$$2^y = x$$

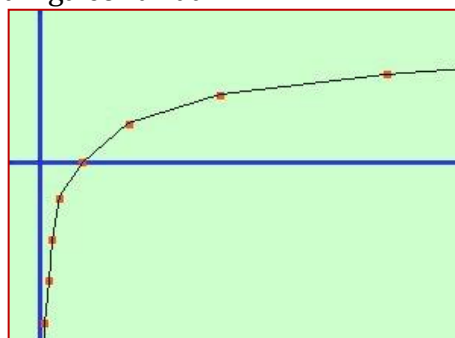
In pratica do' dei valori ad y e leggo i valori di x, pero' poi considero i punti con le coordinate (x,y); quindi prima la x e poi la y

x	y	Calcoli
16	4	$2^y = x$ sostituisco ad y il valore 4 ed ottengo $x = 2^4 = 16$ quindi ho il punto di coordinate (16, 4)
8	3	$2^y = x$ sostituisco ad y il valore 3 ed ottengo $x = 2^3 = 8$ quindi ho il punto di coordinate (8, 3)
4	2	$2^y = x$ sostituisco ad y il valore 2 ed ottengo $x = 2^2 = 4$ quindi ho il punto di coordinate (4, 2)
2	1	$2^y = x$ sostituisco ad y il valore 1 ed ottengo $x = 2^1 = 2$ quindi ho il punto di coordinate (2, 1)
1	0	$2^y = x$ sostituisco ad y il valore 0 ed ottengo $x = 2^0 = 1$ quindi ho il punto di coordinate (1, 0)
1/2	-1	$2^y = x$ sostituisco ad y il valore -1 ed ottengo $x = 2^{-1} = 1/2$ quindi ho il punto di coordinate (1/2, -1)
1/4	-2	$2^y = x$ sostituisco ad y il valore -2 ed ottengo $x = 2^{-2} = 1/4$ quindi ho il punto di coordinate (1/4, -2)
1/8	-3	$2^y = x$ sostituisco ad y il valore -3 ed ottengo $x = 2^{-3} = 1/8$ quindi ho il punto di coordinate (1/8, -3)
1/16	-4	$2^y = x$ sostituisco ad y il valore -4 ed ottengo $x = 2^{-4} = 1/16$ quindi ho il punto di coordinate (1/16, -4)

ora metto i punti trovati in un grafico il punto (16,4) non e' stato messo

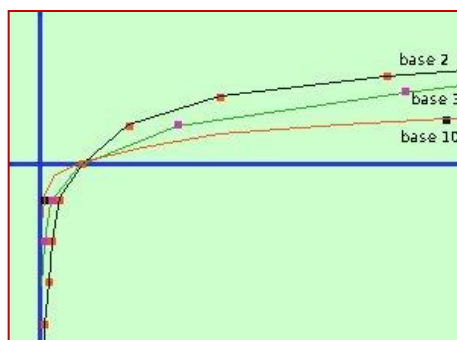


ed infine li congiungo con una riga continua



Conclusioni: se la base e' maggiore di 1 il logaritmo inizia nell'origine da meno infinito, sale rapidamente sino ad incontrare in 1 l'asse delle x e poi cresce lentamente verso piu' infinito (il logaritmo e' la curva che tende ad infinito meno rapidamente di tutte le altre curve)

Il tipo di grafico che abbiamo trovato e' lo stesso per tutte le basi maggiori di 1: guarda il confronto fra i grafici di alcune basi



b) Grafico della funzione logaritmica quando la base a è compresa fra 0 ed 1

Costruiamo il grafico considerando la base $1/2$: infatti quando la base è compresa tra 0 ed 1 tutte le curve ottenute con qualunque base hanno le stesse caratteristiche: in fondo alla pagina hai un esempio.

Voglio costruire il grafico della funzione:

$$y = \log_{1/2} x$$

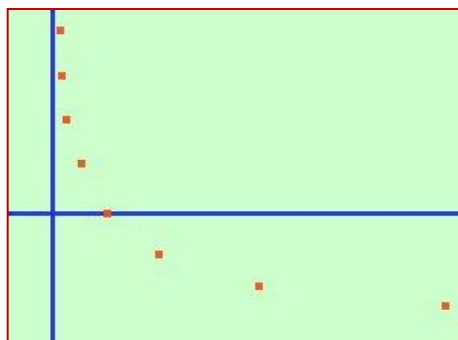
Lo costruiamo per punti: diamo dei valori alla x ed otteniamo la y ; per farla più semplice consideriamola nella formula equivalente:

$$(1/2)^y = x$$

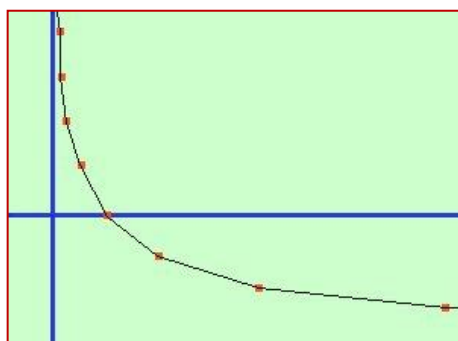
In pratica do' dei valori ad y e leggo i valori di x , però poi considero i punti con le coordinate (x,y) ; quindi prima la x e poi la y :

x	y	Calcoli
1/16	4	$(1/2)^y = x$ sostituisco ad y il valore 4 ed ottengo $x = (1/2)^4 = 1/16$ quindi ho il punto di coordinate $(1/16, 4)$
1/8	3	$(1/2)^y = x$ sostituisco ad y il valore 3 ed ottengo $x = (1/2)^3 = 1/8$ quindi ho il punto di coordinate $(1/8, 3)$
1/4	2	$(1/2)^y = x$ sostituisco ad y il valore 2 ed ottengo $x = (1/2)^2 = 1/4$ quindi ho il punto di coordinate $(1/4, 2)$
1/2	1	$(1/2)^y = x$ sostituisco ad y il valore 1 ed ottengo $x = (1/2)^1 = 1/2$ quindi ho il punto di coordinate $(1/2, 1)$
1	0	$(1/2)^y = x$ sostituisco ad y il valore 0 ed ottengo $x = (1/2)^0 = 1$ quindi ho il punto di coordinate $(1, 0)$
2	-1	$(1/2)^y = x$ sostituisco ad y il valore -1 ed ottengo $x = (1/2)^{-1} = 2^1 = 2$ quindi ho il punto di coordinate $(2, -1)$
4	-2	$(1/2)^y = x$ sostituisco ad y il valore -2 ed ottengo $x = (1/2)^{-2} = 2^2 = 4$ quindi ho il punto di coordinate $(4, -2)$
8	-3	$(1/2)^y = x$ sostituisco ad y il valore -3 ed ottengo $x = (1/2)^{-3} = 2^3 = 8$ quindi ho il punto di coordinate $(8, -3)$
16	-4	$(1/2)^y = x$ sostituisco ad y il valore -4 ed ottengo $x = (1/2)^{-4} = 2^4 = 16$ quindi ho il punto di coordinate $(16, -4)$

Ora metto i punti trovati in un grafico il punto $(16, -4)$ non è stato messo:

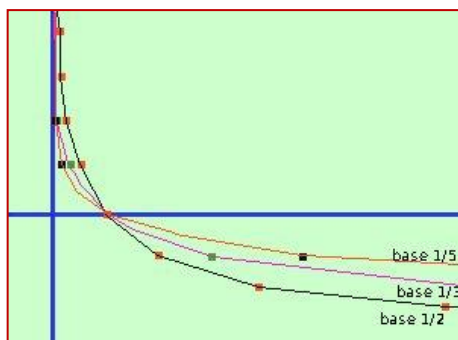


ed infine li congiungo con una riga continua:



Conclusioni: se la base e' compresa fra 0 ed 1 il logaritmo inizia nell'origine da piu' infinito, scende rapidamente sino ad incontrare in 1 l'asse delle x e poi diminuisce lentamente verso meno infinito.

Il tipo di grafico che abbiamo trovato e' lo stesso per tutte le basi comprese fra 0 ed 1: guarda il confronto fra i grafici di alcune basi:



10. Equazioni logaritmiche

Sono equazioni in cui la x compare nell'argomento del logaritmo. Per risolverle si cerca di ottenere un solo logaritmo sia prima che dopo l'uguale in modo da poter uguagliare gli argomenti; pero', uguagliando gli argomenti si potrebbero aggiungere soluzioni non possibili: infatti l'argomento del logaritmo deve sempre essere maggiore di zero. Per risolvere il problema esistono due metodi:

- Primo metodo: prima di iniziare a risolvere le equazioni si fa un sistema ponendo tutti gli argomenti maggiori di zero, si risolve il sistema e si trova l'intervallo in cui le soluzioni sono valide.

Successivamente si va a risolvere l'equazione logaritmica e, una volta trovate le soluzioni, si controlla che cadano entro l'intervallo di validità

- Secondo metodo si risolve l'equazione e quindi si sostituiscono le soluzioni una alla volta nell'equazione iniziale per controllare se i logaritmi sono validi.

Il secondo metodo è forse più semplice ed intuitivo, ma il primo metodo ti predispone il discorso sulla risoluzione delle disequazioni logaritmiche.

a) Esercizi sulle equazioni logaritmiche

Gli esercizi sono risolti con entrambe i metodi: scegli il metodo che ti ha insegnato il tuo Professore.

Ti ricordo che con **log x** intendiamo il logaritmo in base **e** e con **Log x** il logaritmo in base **10**

Esercizio 1) $\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4$

Metodo del sistema:

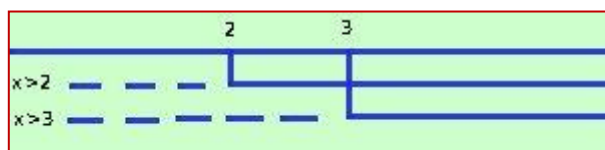
Siccome il logaritmo è definito solamente se l'argomento è maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto le condizioni:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

risolvo

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases}$$

Essendo un sistema devo prendere l'intervallo dove sono valide contemporaneamente le disequazioni cioè:



$$x > 3$$

Adesso passo a risolvere l'equazione:

$$\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4$$

Per la regola del **logaritmo di un quoziente** posso scrivere:

$$\log \frac{x-2}{x-3} = \log 4$$

cioè, uguagliando gli argomenti:

$$\frac{x-2}{x-3} = 4$$

Supponendo x diverso da 3 (sovrabbondante perché $x = 3$ era già escluso dalle condizioni iniziali) faccio il m.c.m.:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{4(x-3)}{x-3}$$

Tolgo i denominatori:

$$x-2 = 4(x-3)$$

Calcolo

$$x-2 = 4x-12$$

$$x-4x = 2-12$$

$$-3x = -10$$

$$x = 10/3$$

Ora devo controllare che la soluzione cada nell'intervallo di definizione: $10/3$ è maggiore di 3 quindi la soluzione:

$$x = \frac{10}{3}$$

è accettabile.

In qualche scuola ho visto anche risolverlo con un sistema in questo modo:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ \log(x-2) - \log(x-3) = \log 4 \end{cases}$$

Formalmente è più giusto ma come svolgimento è la stessa cosa

Metodo del controllo delle soluzioni:

Per la regola del **logaritmo di un quoziente** posso scrivere:

$$\log \frac{x-2}{x-3} = \log 4$$

cioe', uguagliando gli argomenti:

$$\frac{x-2}{x-3} = 4$$

Supponendo x diverso da 3 (sovrabbondante perche' $x = 3$ era gia' escluso dalle condizioni iniziali) faccio il m.c.m.:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{4(x-3)}{x-3}$$

Tolgo i denominatori:

$$x-2 = 4(x-3)$$

Calcolo:

$$x-2 = 4x-12$$

$$x-4x = 2-12$$

$$-3x = -10$$

$$x = 10/3$$

Ora devo controllare se la soluzione e' accettabile, per farlo sostituisco il valore $10/3$ alla x nei logaritmi dell'equazione di partenza e controllo che gli argomenti siano positivi

Sostituisco in $\log(x-2)$

$$\log(10/3 - 2) = \log 4/3 \text{ l'argomento e' maggiore di zero.}$$

Sostituisco in $\log(x-3)$

$$\log(10/3 - 3) = \log 1/3 \text{ l'argomento e' maggiore di zero.}$$

Quindi:

$$x = \frac{10}{3}$$

E' accettabile.

Esercizio 2) $\log(x+1) + \log(x-1) = 0$ **Metodo del sistema:**

Siccome il logaritmo e' definito solamente se l'argomento e' maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto le condizioni:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$$

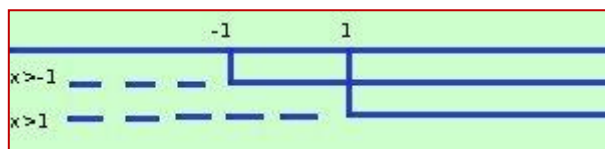
$$\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases}$$

Risolvo:

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases}$$

Essendo un sistema devo prendere l'intervallo dove sono valide contemporaneamente le disequazioni cioe':



$$x > 1$$

Adesso passo a risolvere l'equazione:

$$\log(x+1) + \log(x-1) = 0$$

Per la regola del **logaritmo di un prodotto** posso scrivere:

$$\log(x-1)(x+1) = 0$$

Calcolo prima dell'uguale e, ricordando che zero e' il logaritmo di 1:

$$\log(x^2-1) = \log 1$$

Cioe', uguagliando gli argomenti:

$$x^2-1 = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Ora devo controllare se le soluzioni cadono nell'intervallo di definizione:

- la soluzione $x = -\sqrt{2}$ e' esterna all'intervallo di definizione perche' e' minore di 1 e quindi non e' accettabile
- la soluzione $x = +\sqrt{2}$ e' interna all'intervallo di definizione perche' e' maggiore di 1 e quindi e' accettabile

cioe' $x = +\sqrt{2}$ e' accettabile.

Metodo del controllo delle soluzioni:

Per la regola del logaritmo di un prodotto posso scrivere:

$$\log(x-1)(x+1) = 0$$

Calcolo prima dell'uguale e, ricordando che zero e' il logaritmo di 1:

$$\log(x^2-1) = \log 1$$

cioe', uguagliando gli argomenti:

$$x^2-1 = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Ora devo controllare se le soluzioni sono accettabili o meno sostituendole alle x nei logaritmi dell'equazione di partenza e controllando se cadono nell'intervallo di definizione:

- Sostituisco $x = -\sqrt{2}$
 $\log(x+1) = \log(-\sqrt{2} + 1)$
 Essendo l'argomento minore di zero la soluzione non e' accettabile.
 (non serve provare l'altro logaritmo perche' basta che uno solo non sia valido e non e' valida tutta l'equazione)
- Sostituisco $x = \sqrt{2}$
 $\log(x+1) = \log(\sqrt{2} + 1)$ argomento maggiore di zero
 $\log(x-1) = \log(\sqrt{2} - 1)$ argomento maggiore di zero
 Essendo l'argomento maggiore di zero la soluzione e' accettabile,
 cioe' $x = +\sqrt{2}$ e' accettabile.

Esercizio 3) $\log_2(x+1) = \log_4(2x+5)$ **Metodo del sistema:**

Siccome il logaritmo e' definito solamente se l'argomento e' maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto le condizioni:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2x + 5 > 0 \end{cases}$$

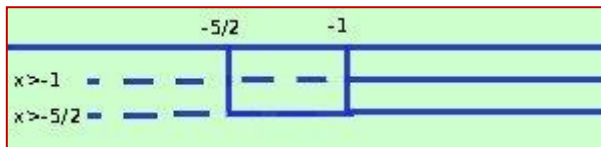
$$\begin{cases} x > -1 \\ x > -5/2 \end{cases}$$

Risolvo:

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > -5/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > -5/2 \end{cases}$$

Essendo un sistema devo prendere l'intervallo dove sono valide contemporaneamente le disequazioni cioe':



$$x > -1$$

Adesso passo a risolvere l'equazione

$$\log_2(x+1) = \log_4(2x+5)$$

Siccome i logaritmi hanno base diversa dovro' applicare la regola del cambiamento di base. Conviene trasformare il secondo logaritmo da base 4 in base 2.

Applico la regola:

$$\log_4(2x+5) = \frac{\log_2(2x+5)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(2x+5)}{2}$$

Quindi posso scrivere:

$$\log_2(x+1) = 1/2 \log_2(2x+5)$$

e ricordando la regola del logaritmo di un radicale:

$$\log_2(x+1) = \log_2 \sqrt{2x+5}$$

cioe', uguagliando gli argomenti:

$$(x+1) = \sqrt{2x+5}$$

E' un'equazione irrazionale; elevo al quadrato da entrambe le parti:

$$(x+1)^2 = 2x+5$$

Sviluppo il quadrato:

$$x^2 + 2x + 1 = 2x + 5$$

$$x^2 + 2x + 1 - 2x - 5 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

Otengo le soluzioni:

$$x = 2 \quad x = -2$$

Per l'equazione irrazionale dovrei vedere se le soluzioni sono **accettabili**, pero' ho visto sempre che corrisponde all'accettabilita' della soluzione dell'equazione logaritmica.

Per l'equazione logaritmica controllo che le soluzioni siano comprese nell'intervallo di definizione $x > -1$.

La soluzione $x = 2$ e' accettabile perche' maggiore di -1.

La soluzione $x = -2$ non e' accettabile perche' minore di -1.

Metodo del controllo delle soluzioni:

Siccome i logaritmi hanno base diversa dovro' applicare la regola del **cambiamento di base**. Conviene trasformare il secondo logaritmo da base 4 in base 2.

Applico la regola:

$$\log_4(2x+5) = \frac{\log_2(2x+5)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(2x+5)}{2}$$

Quindi posso scrivere:

$$\log_2(x+1) = 1/2 \log_2(2x+5)$$

e ricordando la regola del **logaritmo di un radicale**:

$$\log_2(x+1) = \log_2 \sqrt{(2x+5)}$$

cioe', uguagliando gli argomenti:

$$(x+1) = \sqrt{(2x+5)}$$

E' un'equazione irrazionale; elevo al quadrato da entrambe le parti:

$$(x+1)^2 = 2x+5$$

Sviluppo il quadrato:

$$x^2 + 2x + 1 = 2x+5$$

$$x^2 + 2x + 1 - 2x - 5 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

Otengo le soluzioni:

$$x = 2 \quad x = -2$$

Per l'equazione irrazionale dovrei vedere se le soluzioni sono **accettabili**; pero' ho visto che corrisponde all'accettabilita' della soluzione dell'equazione logaritmica.

Ora devo controllare se le soluzioni sono accettabili, per farlo sostituisco i valori alla x nei logaritmi dell'equazione di partenza e controllo che gli argomenti siano positivi:

- Soluzione $x = -2$
 $\log_2(x+1) = \log_2(-2+1) = \log_2(-1)$
 Essendo l'argomento negativo la soluzione $x = -2$ non e' accettabile
 (non serve provare l'altro logaritmo perche' basta che uno solo non sia valido e non e' valida tutta l'equazione).
- Soluzione $x = 2$
 $\log_2(x+1) = \log_2(2+1) = \log_2 3$
 $\log_4(2x+5) = \log_4[2(2)+5] = \log_4 9$
 Essendo gli argomenti positivi la soluzione $x = 2$ e' accettabile.

Esercizio 4 : $\log_3 x^4 + \log_3 x^3 + \log_3 x^2 + \log_3 x = 10$

Metodo del sistema:

Siccome il logaritmo e' definito solamente se l'argomento e' maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto la condizione:

$$\begin{cases} x^4 > 0 \\ x^3 > 0 \\ x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Risolve:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Essendo un sistema devo prendere l'intervallo dove sono valide contemporaneamente le disequazioni cioe':

	0	
$x^4 > 0$		
$x^3 > 0$		
$x^2 > 0$		
$x > 0$		

$x > 0$

Adesso passo a risolvere l'equazione:

Per la regola del **logaritmo di una potenza** posso scrivere:

$$4\log_3 x + 3\log_3 x + 2\log_3 x + \log_3 x = 10$$

Posso sommare con le regole dei **monomi**:

$$4a + 3a + 2a + a = 10a$$

infatti qui al posto della lettera a ho $\log_3 x$

Quindi ottengo:

$$4\log_3 x + 3\log_3 x + 2\log_3 x + \log_3 x = 10\log_3$$

$$10\log_3 x = 10$$

Semplifico per 10:

$$\log_3 x = 1$$

So che $1 = \log_3 3$, perché 3 elevato ad 1 dà 3, quindi:

$$\log_3 x = \log_3 3$$

Eguaglio gli argomenti:

$$x = 3$$

Essendo 3 maggiore di zero, la soluzione è accettabile.

Metodo del controllo delle soluzioni:

Per la regola del **logaritmo di una potenza** posso scrivere:

$$4\log_3 x + 3\log_3 x + 2\log_3 x + \log_3 x = 10$$

cioè, **sommando**:

$$10\log_3 x = 10$$

Semplifico per 10:

$$\log_3 x = 1$$

So che $1 = \log_3 3$, perché 3 elevato ad 1 dà 3, quindi:

$$\log_3 x = \log_3 3$$

Eguaglio gli argomenti:

$$x = 3$$

Ora vado a sostituire 3 alla x e controllo che gli argomenti dei vari logaritmi siano maggiori di zero:

- $\log_3 x^4 = \log_3 3^4 = \log_3 81$ $81 > 0$
- $\log_3 x^3 = \log_3 3^3 = \log_3 27$ $27 > 0$
- $\log_3 x^2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$ $9 > 0$
- $\log_3 x = \log_3 3$ $3 > 0$

La soluzione $x = 3$ è accettabile.

Esercizio 5: $\log_2 \sqrt{4x^2 - 3x + 4} - \log_2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 1$

Metodo del sistema:

Siccome il logaritmo è definito solamente se l'argomento è maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto le condizioni:

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2 - 3x + 4} > 0 \\ \sqrt{x^2 + x + 1} > 0 \end{cases}$$

e, siccome la radice è definita positiva, possiamo risolvere:

$$\begin{cases} 4x^2 - 3x + 4 > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$$

Trovo che entrambe i trinomi sono positivi per ogni valore di x **calcoli** e quindi ogni valore trovato sarà accettabile.

Adesso passo a risolvere l'equazione:

$$\log_2 \sqrt{4x^2 - 3x + 4} - \log_2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 1$$

Per la regola del **logaritmo di una radice** posso scrivere:

$$\frac{1}{2} \log_2 (4x^2 - 3x + 4) - \frac{1}{2} \log_2 (x^2 + x + 1) = 1$$

Moltiplico tutti i termini per 2 (equivale a fare il m.c.m. ed eliminare i denominatori):

$$\log_2(4x^2 - 3x + 4) - \log_2(x^2 + x + 1) = 2$$

Ora applico la regola del [logaritmo di un quoziente](#),

inoltre so che $2 = \log_2 4$:

$$\log_2 \frac{4x^2 - 3x + 4}{x^2 + x + 1} = \log_2 4$$

cioè, uguagliando gli argomenti:

$$\frac{4x^2 - 3x + 4}{x^2 + x + 1} = 4$$

Faccio il m.c.m. Non devo porre condizioni perché il termine al denominatore è sempre positivo, come visto [prima](#):

$$\frac{4x^2 - 3x + 4}{x^2 + x + 1} = \frac{4(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

Tolgo i denominatori:

$$4x^2 - 3x + 4 = 4(x^2 + x + 1)$$

Calcolo:

$$4x^2 - 3x + 4 = 4x^2 + 4x + 4$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 4x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$-7x = 0$$

$$x = 0$$

Siccome erano accettabili tutti i valori $x = 0$ è accettabile.

Metodo del controllo delle soluzioni:

Per la regola del [logaritmo di una radice](#) posso scrivere

$$\frac{1}{2} \log_2(4x^2 - 3x + 4) - \frac{1}{2} \log_2(x^2 + x + 1) = 1$$

Moltiplico tutti i termini per 2 (equivale a fare il m.c.m. ed eliminare i denominatori):

$$\log_2(4x^2 - 3x + 4) - \log_2(x^2 + x + 1) = 2$$

Ora applico la regola del [logaritmo di un quoziente](#),

inoltre so che $2 = \log_2 4$:

$$\log_2 \frac{4x^2 - 3x + 4}{x^2 + x + 1} = \log_2 4$$

cioè, uguagliando gli argomenti:

$$\frac{4x^2 - 3x + 4}{x^2 + x + 1} = 4$$

faccio il m.c.m. Non devo porre condizioni perché il termine al denominatore è sempre positivo, come visto [prima](#):

$$\frac{4x^2 - 3x + 4}{x^2 + x + 1} = \frac{4(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

Tolgo i denominatori:

$$4x^2 - 3x + 4 = 4(x^2 + x + 1)$$

Calcolo:

$$4x^2 - 3x + 4 = 4x^2 + 4x + 4$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 4x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$-7x = 0$$

$$x = 0$$

Ora sostituisco $x=0$ negli argomenti dei logaritmi di partenza

$$\log_2 \sqrt{(4 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 4)} = \log_2 \sqrt{4} = \log_2 2 \quad 2 > 0$$

$$\log_2 \sqrt{(0^2 + 0 + 1)} = \log_2 \sqrt{1} = \log_2 1 \quad 1 > 0$$

$x = 0$ è accettabile.

Esercizio 6: $(\log x^2)^2 - 2 \log x^3 + 2 = 0$

Metodo del sistema:

Stavolta, prima di procedere alla soluzione, conviene cercare di rendere l'equazione più semplice.

Come prima cosa estraiamo dal primo quadrato la potenza 2 interna e dal secondo la potenza 3 (regola del [logaritmo di una potenza](#)):

$$(2 \log x)^2 - 2 \cdot 3 \log x + 2 = 0$$

Ora porto il 2 fuori del quadrato; diventa 4:

$$4(\log x)^2 - 6 \log x + 2 = 0$$

Siccome il logaritmo è definito solamente se l'argomento è maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto la condizione:

$$x > 0$$

Adesso passo a risolvere l'equazione.

Osservo che il logaritmo compare a potenza 1 ed a potenza 2 quindi è come se fosse un'equazione di secondo grado per meglio evidenziarlo pongo:

$$\text{Log } x = y$$

Otengo:

$$4y^2 - 6y + 2 = 0$$

Divido per 2 per renderla piu' semplice:

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$

Applico la formula risolutiva:

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(9 - 4(2)(1))}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Otengo le soluzioni:

$$y_1 = 1 \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

Ora devo risolvere le equazioni:

$$\text{Log } x = 1 \quad \text{Log } x = \frac{1}{2}$$

- Risolvo la prima.
Siccome ho la L maiuscola il logaritmo e' in base 10 e posso scrivere ricordando che $1 = \text{Log } 10$:
 $\text{Log } x = \text{Log } 10$
cioe' eguagliando gli argomenti:
 $x = 10$ che essendo maggiore di zero e' accettabile.
- Risolvo la seconda:
 $\text{Log } x = \frac{1}{2}$
Moltiplico per 2 entrambe i termini:
 $2 \text{Log } x = 1$
Porto il 2 all'interno dell'argomento e trasformo in logaritmo il termine dopo l'uguale:
 $\text{Log } x^2 = \text{Log } 10$
cioe' eguagliando gli argomenti:
 $x^2 = 10$
Otengo le soluzioni:
 $x = -\sqrt{10} \quad x = \sqrt{10}$
di queste solo la seconda, essendo maggiore di zero, e' accettabile.

Metodo del controllo delle soluzioni:

Stavolta, prima di procedere alla soluzione, conviene cercare di rendere l'equazione piu' semplice.

Come prima cosa estraiamo dal primo quadrato la potenza 2 interna e dal secondo la potenza 3 (regola del logaritmo di una potenza):

$$(2\text{Log } x)^2 - 2 \cdot 3 \text{Log } x + 2 = 0$$

Ora porto il 2 fuori del quadrato: diventa 4:

$$4(\text{Log } x)^2 - 6 \text{Log } x + 2 = 0$$

Osservo che il logaritmo compare a potenza 1 ed a potenza 2 quindi e' come se fosse un'equazione di secondo grado per meglio evidenziarlo pongo:

$$\text{Log } x = y$$

Otengo:

$$4y^2 - 6y + 2 = 0$$

Divido per 2 per renderla piu' semplice:

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$

Applico la formula risolutiva:

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Otengo le soluzioni:

$$y_1 = 1 \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

Ora devo risolvere le equazioni:

$$\text{Log } x = 1 \quad \text{Log } x = \frac{1}{2}$$

- Risolvo la prima.
Siccome ho la L maiuscola il logaritmo e' in base 10 e posso scrivere ricordando che $1 = \text{Log } 10$:
 $\text{Log } x = \text{Log } 10$
cioe' eguagliando gli argomenti:
 $x = 10$
- Risolvo la seconda:
 $\text{Log } x = \frac{1}{2}$
Moltiplico per 2 entrambe i termini:
 $2 \text{Log } x = 1$
Porto il 2 all'interno dell'argomento e trasformo in logaritmo il termine dopo l'uguale:

$$\log x^2 = \log 10$$

cioè' eguagliando gli argomenti:

$$x^2 = 10$$

Otengo le soluzioni:

$$x = -\sqrt{10} \quad x = \sqrt{10}$$

Ora devo controllare se le tre soluzioni sono accettabili siccome l'argomento è x ed x^2 dovrà essere $x > 0$ e la soluzione sarà accettabile se positiva, quindi sono accettabili le soluzioni:

$$x = 10 \quad x = \sqrt{10}$$

11. Disequazioni logaritmiche

Per poterle risolvere bene devi conoscere **perfettamente** il grafico della funzione logaritmo sia con base maggiore di 1 che con base compresa fra 0 ed 1.

Per risolverle devi sempre porre le condizioni che l'argomento del logaritmo sia maggiore di zero.

Distinguiamole in due gruppi:

- disequazioni con logaritmi a base maggiore di 1
- disequazioni con logaritmi a base compresa fra 0 ed 1

a) Disequazioni con logaritmi con base maggiore di 1

Se la base è maggiore di 1 il grafico della funzione è quello riportato qui a fianco.

Per risolvere cercheremo sempre di arrivare ad una delle due forme:

- $\log_a(\text{espressione}) > 0$

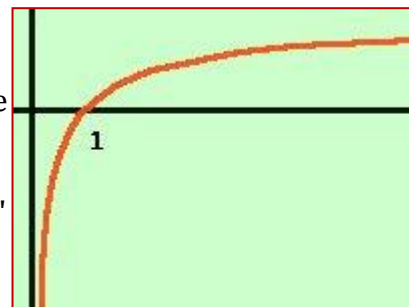
Il logaritmo è maggiore di zero quando l'argomento è maggiore di uno quindi possiamo scrivere in modo equivalente

$$\text{espressione} > 1$$

- $\log_a(\text{espressione}) < 0$

Il logaritmo è minore di zero quando l'argomento è compreso fra zero ed uno quindi possiamo scrivere in modo equivalente

$$\begin{cases} \text{espressione} > 0 \\ \text{espressione} < 1 \end{cases}$$



Vediamo ora alcuni esercizi che ti chiariranno meglio il metodo.

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche.

Esercizio 1) $\log_2 x > 1 - \log_2(x-1)$

Svolgimento:

Come prima cosa poniamo la condizione che gli argomenti dei logaritmi siano positivi:

$$x > 0$$

$$x - 1 > 0$$

Trasformiamola ora nella forma:

$$\log_2(\text{espressione}) > 0$$

Porto tutti i termini prima del maggiore:

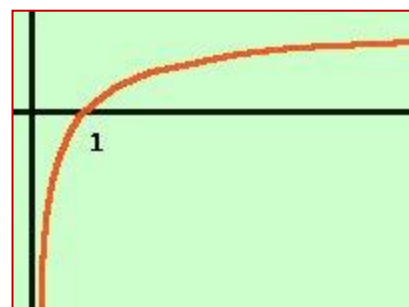
$$\log_2 x - 1 + \log_2(x-1) > 0$$

ricordo che $1 = \log_2 2$

$$\log_2 x - \log_2 2 + \log_2(x-1) > 0$$

e, per i teoremi sui logaritmi, posso scrivere:

$$\log_2 \frac{x(x-1)}{2} > 0$$



Confrontando con il grafico della funzione logaritmo qui a destra vedo che essendo il logaritmo maggiore di zero (sopra l'asse delle x) devo porre l'argomento maggiore di 1:

$$\frac{x(x-1)}{2} > 1$$

cioè facendo il minimo comune multiplo:

$$x(x-1) > 2$$

e, facendo i calcoli:

$$x^2 - x > 2$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

Mettendo assieme questa relazione con le condizioni per la realtà dei logaritmi devo risolvere il sistema. Si potrebbe anche risolvere "a pezzi"; prima le condizioni di realtà poi quest'ultima disequazione, ma, secondo me, è più conveniente il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases}$$

Calcoli:

Risolviamo la terza disequazione:

$$x^2 - x - 2 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Otengo le soluzioni $x = -1$ $x = 2$

Essendo soluzioni dell'equazione associata, per risolvere la disequazione devo prendere i valori **esterni** all'intervallo delle radici ed ottengo:

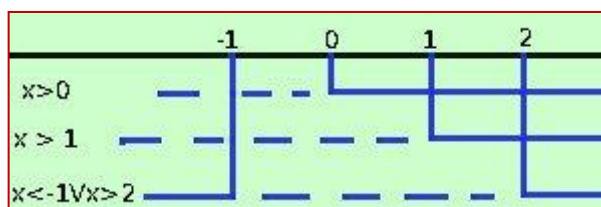
$$x < -1 \vee x > 2$$

Otengo:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ x < -1 \vee x > 2 \end{cases}$$

Riporto i dati su un grafico e prendo i valori comuni a tutte le disequazioni.

Indico i valori accettabili con una linea continua ed indico i non accettabili con una linea tratteggiata:



Otengo quindi: $x > 2$

Esercizio 2) $\log(x^2 - 5x + 6) < \log(x-4)$

Svolgimento:

Risolvere la disequazione logaritmica.

Come prima cosa poniamo la condizione che gli argomenti dei logaritmi siano positivi:

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$x - 4 > 0$$

che equivalgono a

$$\begin{cases} x < 2 \vee x > 3 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$x > 4$$

Ecco i calcoli:

Risolviamo la terza disequazione:

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Otengo le soluzioni $x = 2$ $x = 3$

Essendo soluzioni dell'equazione associata, per risolvere la disequazione devo

prendere i valori **esterni** all'intervallo delle radici ed ottengo:

$$x < 2 \vee x > 3$$

Siccome la base non e' indicata devo supporre che il logaritmo sia a base e cioe' a base maggiore di 1.

Trasformiamo ora la disequazione nella forma:

$$\log(\text{espressione}) < 0$$

Porto tutti i termini prima del maggiore:

$$\log(x^2 - 5x + 6) - \log(x-4) < 0$$

e, per i teoremi sui logaritmi, posso scrivere:

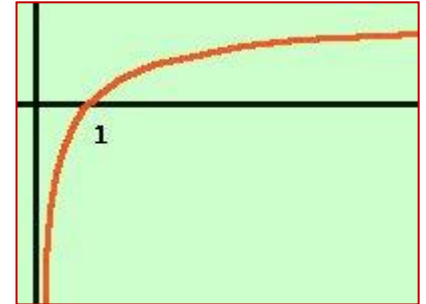
$$\log \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 0$$

Confrontando con il grafico della funzione logaritmo qui a destra vedo che essendo il logaritmo minore di zero (sotto l'asse delle x) devo supporre l'argomento compreso fra 0 ed 1

$$0 < \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 1$$

Sono due disequazioni; devo risolvere:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} > 0 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 1 \end{cases}$$



Ecco i calcoli:

Devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} > 0 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 1 \end{cases}$$

Risolvero separatamente le due disequazioni poi metto a sistema i risultati

Risolvero la prima:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} > 0$$

E' una frazione maggiore di zero; pongo numeratore e denominatore maggiori di zero e considero gli intervalli dove i segni sono concordi.

Se hai bisogno di un ripasso

Numeratore: $x^2 - 5x + 6 > 0$

Denominatore: $x - 4 > 0$

ottengo

Numeratore positivo: $x < 2 \vee x > 3$

Denominatore positivo: $x > 4$

Risolviamo la disequazione:

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(25 - 4 \cdot 1 \cdot 6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{(25 - 24)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Ottengo le soluzioni: $x = 2$ $x = 3$

Essendo soluzioni dell'equazione associata, per risolvere la disequazione devo prendere i valori **esterni** all'intervallo delle radici ed ottengo:

$$x < 2 \vee x > 3.$$

Faccio il grafico.

Indico i valori positivi con una linea continua ed indico i negativi con una linea tratteggiata. Per sapere il segno della frazione controllo i segni con la regola del **prodotto** (ti ricordo che il quoziente e' un prodotto visto alla rovescia e che la regola dei segni e' la stessa per il prodotto ed il quoziente):

	2	3	4
Num > 0	—	—	—
Den > 0	—	—	—
Frazione	—	+	+

Siccome cerco dove la frazione e' maggiore di zero ho come risultato:

$$2 < x < 3 \vee x > 4$$

Risolve la seconda:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 1$$

cioe' spostando 1 prima dell'uguale:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} - 1 < 0$$

Ora posso fare il minimo comune multiplo prima dell'uguale:

$$\frac{x^2 - 5x + 6 - (x - 4)}{x - 4} < 0$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6 - x + 4}{x - 4} < 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 10}{x - 4} < 0$$

e' una frazione minore di zero: pongo numeratore e denominatore maggiori di zero e considero gli intervalli dove i segni sono discordi.

Se hai bisogno di un ripasso

Numeratore: $x^2 - 6x + 10 > 0$

Denominatore: $x - 4 > 0$

ottengo

Numeratore positivo: sempre positivo

Denominatore positivo: $x > 4$

Risolviamo la disequazione:

$$x^2 - 6x + 10 > 0$$

considero l'equazione associata:

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - (1)(10)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-1}}{2}$$

Essendo il discriminante minore di zero l'equazione non ha soluzioni reali quindi la disequazione associata e' sempre **positiva**.

Sempre verificata.

Faccio il grafico.

Ripeto ancora (poi non lo diro' piu') che indico i valori positivi con una linea continua ed indico i negativi con una linea tratteggiata: Per sapere il segno della frazione controllo i segni con la regola del **prodotto** (la regola dei segni e' la stessa per il prodotto ed il quoziente):



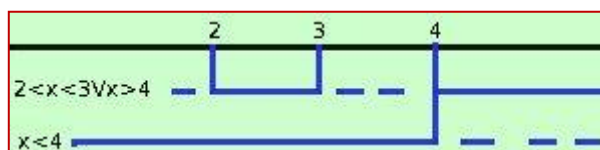
Siccome cerco dove la frazione e' minore di zero ho come risultato:

$$x < 4$$

Ora metto a sistema i due risultati:

$$\begin{cases} 2 < x < 3 \vee x > 4 \\ x < 4 \end{cases}$$

Faccio il grafico (e' un sistema quindi devo prendere le soluzioni comuni ad entrambe le disequazioni):



Ottengo come risultato:

$$2 < x < 3$$

Otengo come risultato:

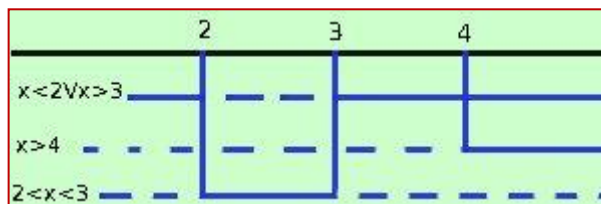
$$2 < x < 3$$

Mettendo assieme questa relazione con le condizioni per la realt  dei logaritmi ho il sistema:

$$\begin{cases} x < 2 \vee x > 3 \\ x > 4 \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

Riporto i dati su un grafico, e prendo i valori comuni a tutte le disequazioni.

Indico i valori accettabili con una linea continua ed indico i non accettabili con una linea tratteggiata:



Non esistono valori comuni quindi ottengo che non esistono soluzioni .

"Hem lavrà tant per sensa gnent" Come diceva un mio alunno in dialetto

Traduzione: "Abbiamo lavorato tanto per niente".

Esercizio3) $\log_3(2-x) < \log_3(2+x) - \log_3 x + 1$ Svolgimento

Risolvere la disequazione logaritmica.

Come prima cosa poniamo le condizioni che gli argomenti dei logaritmi siano positivi: devono valere le condizioni:

$$2 - x > 0$$

$$2 + x > 0$$

$$x > 0$$

cio , sviluppando:

$$x < 2$$

$$x > -2$$

$$x > 0$$

Trasformiamola ora nella forma:

$$\log_3(\text{espressione}) < 0$$

Porto tutti i termini prima del minore:

$$\log_3(2-x) - \log_3(2+x) + \log_3 x - 1 < 0$$

ricordo che $1 = \log_3 3$

$$\log_3(2-x) - \log_3(2+x) + \log_3 x - \log_3 3 < 0$$

e, per i teoremi sui logaritmi, posso scrivere:

$$\log_3 \frac{x(2-x)}{3(2+x)} < 0$$

Confrontando con il grafico della funzione logaritmo qui a destra vedo

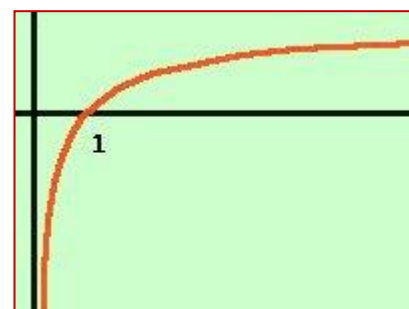
che essendo il logaritmo minore di zero (sotto l'asse delle x) devo

supporre l'argomento compreso fra 0 ed 1:

$$0 < \frac{x(2-x)}{3(2+x)} < 1$$

Sono due disequazioni: devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x(2-x)}{3(2+x)} > 0 \\ \frac{x(2-x)}{3(2+x)} < 1 \end{cases}$$



Ecco i calcoli:

Devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x(2-x)}{3(2+x)} > 0 \\ \frac{x(2-x)}{3(2+x)} < 1 \end{cases}$$

Risolvero separatamente le due disequazioni poi metto a sistema i risultati.

Risolvero la prima:

$$\frac{x(2-x)}{3(2+x)} > 0$$

E' un prodotto e quoziente di termini: pongo ogni termine maggiore di zero e considero gli intervalli dove il calcolo dei segni mi da' un risultato positivo; 3 posso trascurarlo perche' certamente positivo:

$$1^{\circ} \text{ termine: } x > 0$$

$$2^{\circ} \text{ termine: } 2 - x > 0$$

$$3^{\circ} \text{ termine: } x + 2 > 0$$

Otengo:

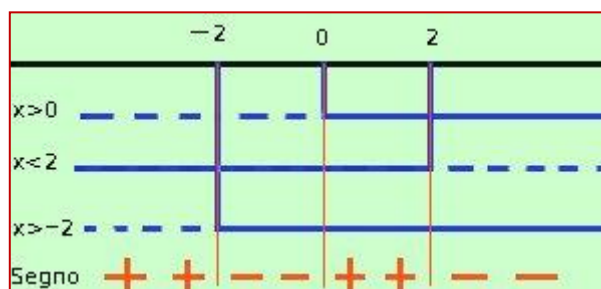
$$1^{\circ} \text{ termine positivo: } x > 0$$

$$2^{\circ} \text{ termine positivo: } x < 2$$

$$3^{\circ} \text{ termine positivo: } x > -2$$

Faccio il grafico.

Indico i valori positivi con una linea continua ed indico i negativi con una linea tratteggiata: Per sapere il segno del totale controllo i segni con la regola del **prodotto** (ti ricordo che il quoziente e' un prodotto visto alla rovescia e che la regola dei segni e' la stessa per il prodotto ed il quoziente):



Siccome cerco dove la frazione e' maggiore di zero ho come risultato:

$$x < -2 \vee 0 < x < 2$$

Risolve la seconda:

$$\frac{x(2-x)}{3(2+x)} < 1$$

cioe' spostando 1 prima dell'uguale:

$$\frac{x(2-x)}{3(2+x)} - 1 < 0$$

Ora posso fare il minimo comune multiplo prima dell'uguale:

$$\frac{2x - x^2 - 3(2+x)}{3(2+x)} < 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x - 6 - 3x}{3(2+x)} < 0$$

$$\frac{-x^2 - x - 6}{3(2+x)} < 0$$

Cambio di segno il numeratore e di verso l'equazione:

$$\frac{-x^2 - x - 6}{3(2+x)} > 0$$

E' una frazione maggiore di zero: pongo numeratore e denominatore maggiori di zero e considero gli intervalli dove i segni sono concordi:

$$\text{Numeratore: } x^2 + x + 6 > 0$$

$$\text{Denominatore: } 2 + x > 0 \text{ posso trascurare il 3 perche' certamente positivo:}$$

Otengo:

$$\text{Numeratore positivo: sempre positivo}$$

$$\text{Denominatore positivo: } x > -2$$

Faccio il grafico.

Risolvi la disequazione:

$$x^2 + x + 6 > 0$$

considero l'equazione associata:

$$x^2 + x + 6 = 0$$

applico la formula risolutiva (ridotta):

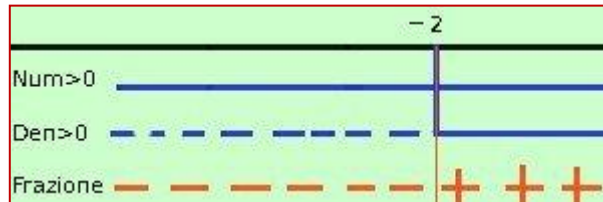
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-24}}{2}$$

Essendo il discriminante minore di zero l'equazione non ha soluzioni reali quindi la disequazione associata e' sempre **positiva**

Sempre verificata.

Faccio il grafico.

Ripeto ancora (poi non lo diro' piu') che indico i valori positivi con una linea continua ed indico i negativi con una linea tratteggiata: Per sapere il segno della frazione controllo i segni con la regola del **prodotto** (la regola dei segni e' la stessa per il prodotto ed il quoziente):



Siccome cerco dove la frazione e' maggiore di zero ho come risultato:

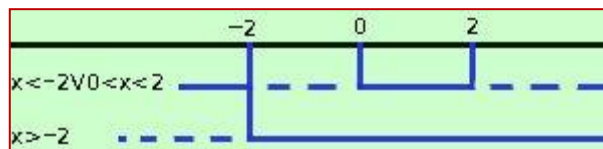
$$x > -2$$

Ora metto a sistema i due risultati:

$$\begin{cases} x < -2 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$x > -2$$

Faccio il grafico (e' un sistema quindi devo prendere le soluzioni comuni ad entrambe le disequazioni):



Otengo come risultato:

$$2 < x < 3$$

Otengo come risultato:

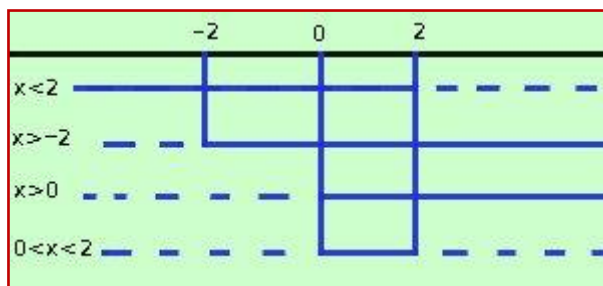
$$0 < x < 2$$

Mettendo assieme questa relazione con le condizioni per la realta' dei logaritmi ho il sistema:

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -2 \\ x > 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

Riporto i dati su un grafico, e prendo i valori comuni a tutte le disequazioni

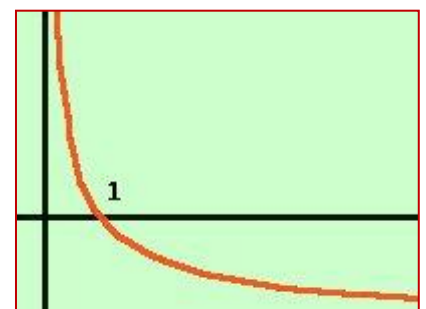
indico i valori accettabili con una linea continua ed indico i non accettabili con una linea tratteggiata:



Otengo quindi $0 < x < 2$

b) Disequazioni con logaritmi con base minore di 1

Se la base e' minore di 1 il grafico della funzione e' quello



riportato qui a fianco.

Per risolvere cercheremo sempre di arrivare ad una delle due forme:

- $\log_a(\text{espressione}) > 0$

Il logaritmo e' maggiore di zero quando l'argomento e' compreso fra zero ed uno quindi possiamo scrivere in modo equivalente:

$$\begin{cases} \text{espressione} > 0 \\ \text{espressione} < 1 \end{cases}$$

- $\log_a(\text{espressione}) < 0$

Il logaritmo e' minore di zero quando l'argomento e' maggiore di uno quindi possiamo scrivere in modo equivalente:

$$\text{espressione} > 1$$

Vediamo ora alcuni esercizi che ti chiariranno meglio il metodo.

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

1) $\log_{1/4}(x^2 - 4) < 0$

Svolgimento:

Iniziamo con una disequazione molto semplice.

Risolvere la seguente disequazione logaritmica:

$$\log_{1/4}(x^2 - 4) < 0$$

Come prima cosa poniamo la condizione che l'argomento del logaritmo sia positivo:

$$x^2 - 4 > 0$$

che equivale a:

$$x < -2 \vee x > 2 \quad \text{Ecco i calcoli:}$$

Devo risolvere la disequazione:

$$x^2 - 4 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 4 = 0$$

E' un'equazione pura:

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Essendo soluzioni dell'equazione associata, per risolvere la disequazione devo prendere i valori esterni all'intervallo delle radici ed ottengo:

$$x < -2 \vee x > 2$$

La disequazione e' gia' nella forma:

$$\log_{1/4}(\text{espressione}) < 0$$

Confrontando con il grafico della funzione logaritmo qui a destra vedo che essendo il logaritmo minore di zero (sotto l'asse delle x) devo porre l'argomento maggiore di 1:

$$x^2 - 4 > 1$$

cioe' :

$$x^2 > 5$$

che equivale a:

$$x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5} \quad \text{Ecco i calcoli:}$$

Devo risolvere la disequazione:

$$x^2 > 5$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 5 = 0$$

E' un'equazione pura:

$$x^2 = 5$$

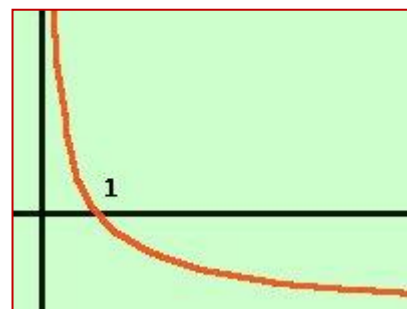
$$x = \pm\sqrt{5}$$

essendo soluzioni dell'equazione associata, per risolvere la disequazione devo prendere i valori esterni all'intervallo delle radici ed ottengo

$$x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$$

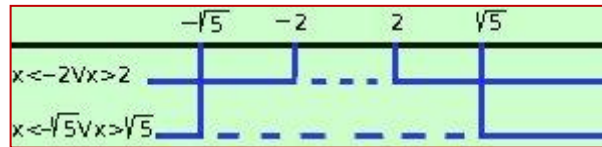
Mettendo assieme questa relazione con la condizione per la realta' del logaritmo devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x < -2 \vee x > 2 \\ x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5} \end{cases}$$



Riporto i dati su un grafico e prendo i valori comuni alle due disequazioni.

indico i valori accettabili con una linea continua ed indico i non accettabili con una linea tratteggiata:



Otengo quindi $x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$.

2) $\log_{1/2}(x^2 - x) > \log_{1/2}(x+1)$

Svolgimento:

Risolvere la seguente disequazione logaritmica:

$$\log_{1/2}(x^2 - x) > \log_{1/2}(x+1)$$

Come prima cosa poniamo la condizione che gli argomenti dei logaritmi siano positivi

$$x^2 - x > 0$$

$$x + 1 > 0$$

che equivalgono a

$$x < 0 \vee x > 1$$

$$x > -1$$

Trasformiamola disequazione nella forma :

$$\log_{1/2}(\text{espressione}) > 0$$

Porto tutti i termini prima del maggiore:

$$\log_{1/2}(x^2 - x) - \log_{1/2}(x+1) > 0$$

e, per i teoremi sui logaritmi, posso scrivere:

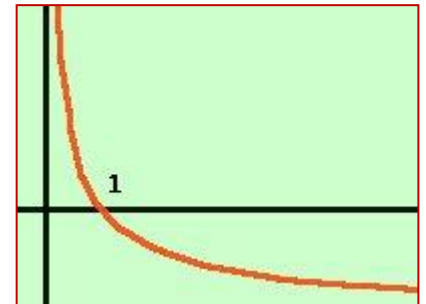
$$\log_{1/2} \frac{x^2 - x}{x + 1} > 0$$

Confrontando con il grafico della funzione logaritmo qui a destra vedo che essendo il logaritmo maggiore di zero (sopra l'asse delle x) devo porre l'argomento compreso fra zero ed 1 :

$$0 < \frac{x^2 - x}{x + 1} < 1$$

Sono due disequazioni: devo risolvere:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - x}{x + 1} > 0 \\ \frac{x^2 - x}{x + 1} < 1 \end{cases}$$



Ecco i calcoli:

Devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - x}{x + 1} > 0 \\ \frac{x^2 - x}{x + 1} < 1 \end{cases}$$

Risolvero separatamente le due disequazioni poi metto a sistema i risultati.

Risolvero la prima:

$$\frac{x^2 - x}{x + 1} > 0$$

E' una frazione maggiore di zero: pongo numeratore e denominatore maggiori di zero e considero gli intervalli dove i segni sono concordi:

Numeratore: $x^2 - x > 0$

Denominatore: $x + 1 > 0$

ottengo

Numeratore positivo: $x < 0 \vee x > 1$

Denominatore positivo: $x > -1$

Ecco i calcoli:

Devo risolvere la disequazione

$$x^2 - x > 0$$

Considero l'equazione associata

$$x^2 - x = 0$$

E' un'equazione spuria

$$x(x-1) = 0$$

ottengo le soluzioni

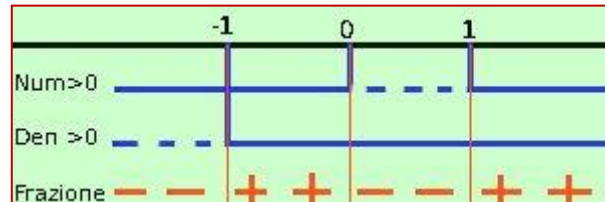
$$x = 0 \quad x = 1$$

essendo soluzioni dell'equazione associata, per risolvere la disequazione devo prendere i valori **esterni** all'intervallo delle radici ed ottengo

$$x < 0 \vee x > 1$$

Faccio il grafico.

Indico i valori positivi con una linea continua ed indico i negativi con una linea tratteggiata: Per sapere il segno della frazione controllo i segni con la regola del **prodotto** (la regola dei segni e' la stessa per il prodotto ed il quoziente):



Siccome cerco dove la frazione e' maggiore di zero ho come risultato:

$$-1 < x < 0 \vee x > 1$$

Risolve la seconda:

$$\frac{x^2 - x}{x + 1} < 1$$

cioe' spostando 1 prima dell'uguale:

$$\frac{x^2 - x}{x + 1} - 1 < 0$$

Ora posso fare il minimo comune multiplo prima dell'uguale:

$$\frac{x^2 - x - (x + 1)}{x + 1} < 0$$

$$\frac{x^2 - x - x - 1}{x + 1} < 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1} < 0$$

e' una frazione minore di zero; pongo numeratore e denominatore maggiori di zero e considero gli intervalli dove i segni sono discordi:

Se hai bisogno di un ripasso

Numeratore: $x^2 - x - 1 > 0$

Denominatore: $x + 1 > 0$

Otengo:

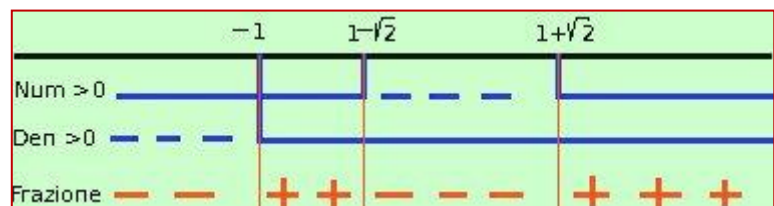
Numeratore positivo: $x < 1 - \sqrt{2} \vee x > 1 + \sqrt{2}$

Denominatore positivo: $x > -1$

Faccio il grafico.

indico i valori positivi con una linea continua ed indico i negativi con una linea tratteggiata: Per sapere il segno della frazione controllo i segni con la regola del **prodotto** (la regola dei segni e' la stessa per il prodotto ed il quoziente)

$\sqrt{2}$ vale circa 1,4 quindi $1 + \sqrt{2} = 2,4$ $1 - \sqrt{2} = -0,4$:

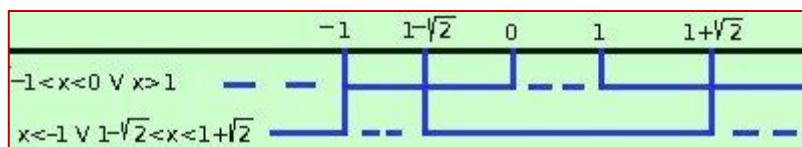


Ora metto a sistema i due risultati:

$$-1 < x < 0 \vee x > 1$$

$$x < -1 \vee 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$$

Faccio il grafico (e' un sistema quindi devo prendere le soluzioni comuni ad entrambe le disequazioni)



Otengo come risultato:

$$1-\sqrt{2} < x < 0 \vee 1 < x < 1+\sqrt{2}$$

Otengo come risultato:

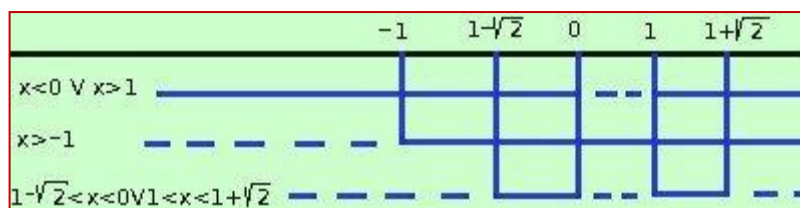
$$1-\sqrt{2} < x < 0 \vee 1 < x < 1+\sqrt{2}$$

Mettendo assieme questa relazione con le condizioni per la realta' dei logaritmi ho il sistema:

$$\begin{cases} x < 0 \vee x > 1 \\ x > -1 \\ 1-\sqrt{2} < x < 0 \vee 1 < x < 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Riporto i dati su un grafico, e prendo i valori comuni a tutte le disequazioni.

Indico i valori accettabili con una linea continua ed indico i non accettabili con una linea tratteggiata:



Otengo quindi $1-\sqrt{2} < x < 0 \vee 1 < x < 1+\sqrt{2}$.

3) $\log_{1/3}(3-x) > \log_{1/3}(2x+6)$

Svolgimento:

Risolvere la seguente disequazione logaritmica:

$$\log_{1/3}(3-x) > \log_{1/3}(2x+6)$$

Come prima cosa poniamo la condizione che gli argomenti dei logaritmi siano positivi:

$$3-x > 0$$

$$2x+6 > 0$$

che equivalgono a:

$$x < 3$$

$$x > -3$$

Trasformiamola disequazione nella forma:

$$\log_{1/3}(\text{espressione}) > 0$$

Porto tutti i termini prima del maggiore:

$$\log_{1/3}(3-x) - \log_{1/3}(2x+6) > 0$$

e, per i teoremi sui logaritmi, posso scrivere:

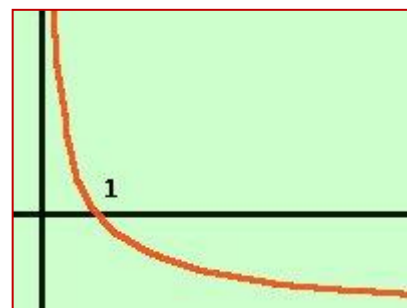
$$\log_{1/3} \frac{3-x}{2x+6} > 0$$

Confrontando con il grafico della funzione logaritmo qui a destra vedo che essendo il logaritmo maggiore di zero (sopra l'asse delle x) devo porre l'argomento compreso fra zero ed 1:

$$0 < \frac{3-x}{2x+6} < 1$$

Sono due disequazioni: devo risolvere:

$$\begin{cases} \frac{3-x}{2x+6} > 0 \\ \frac{3-x}{2x+6} < 1 \end{cases}$$



Ecco i calcoli:

Devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{3-x}{2x+6} > 0 \\ \frac{3-x}{2x+6} < 1 \end{cases}$$

Risolvero separatamente le due disequazioni poi metto a sistema i risultati

Risolvero la prima:

$$\frac{3-x}{2x+6} > 0$$

E' una frazione maggiore di zero: pongo numeratore e denominatore maggiori di zero e considero gli intervalli dove i segni sono concordi.

Se hai bisogno di un ripasso

Numeratore: $3 - x > 0$

Denominatore: $2x + 6 > 0$

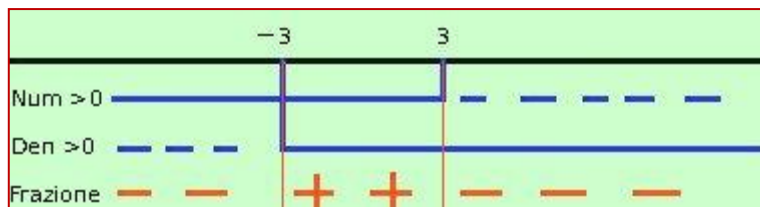
ottengo:

Numeratore positivo: $x < 3$

Denominatore positivo: $x > -3$

Faccio il grafico.

Indico i valori positivi con una linea continua ed indico i negativi con una linea tratteggiata: Per sapere il segno della frazione controllo i segni con la regola del **prodotto** (la regola dei segni e' la stessa per il prodotto ed il quoziente):



Siccome cerco dove la frazione e' maggiore di zero ho come risultato:

$$-3 < x < 3$$

Risolvero la seconda:

$$\frac{3-x}{2x+6} < 1$$

cioe' spostando 1 prima dell'uguale:

$$\frac{3-x}{2x+6} - 1 < 0$$

ora posso fare il minimo comune multiplo prima dell'uguale:

$$\frac{3-x-(2x+6)}{2x+6} < 0$$

$$\frac{3-x-2x-6}{2x+6} < 0$$

$$\frac{-3x-3}{2x+6} < 0$$

Conviene cambiare di segno il numeratore e di verso la disequazione; ottengo:

$$\frac{3x+3}{2x+6} > 0$$

e' una frazione maggiore di zero: pongo numeratore e denominatore maggiori di zero e considero gli intervalli dove i segni sono concordi.

Se hai bisogno di un ripasso

Numeratore: $3x + 3 > 0$

Denominatore: $2x + 6 > 0$

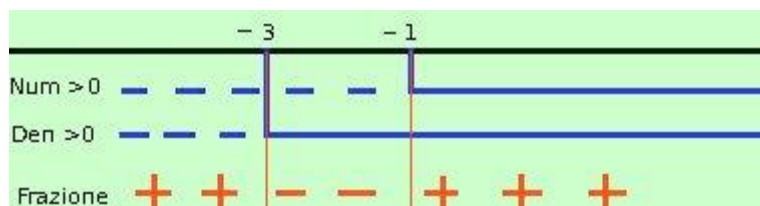
Ottengo:

Numeratore positivo: $x > -1$

Denominatore positivo: $x > -3$

Faccio il grafico

indico i valori positivi con una linea continua ed indico i negativi con una linea tratteggiata: Per sapere il segno della frazione controllo i segni con la regola del **prodotto** (la regola dei segni e' la stessa per il prodotto ed il quoziente):

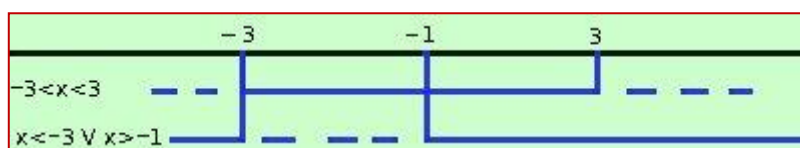


Siccome cerco dove la frazione e' maggiore di zero ho come risultato:
 $x < -3 \vee x > -1$

Ora metto a sistema i due risultati:

$$\begin{cases} -3 < x < 3 \\ x < -3 \vee x > -1 \end{cases}$$

Faccio il grafico (e' un sistema quindi devo prendere le soluzioni comuni ad entrambe le disequazioni):



Otengo come risultato:
 $-1 < x < 3$

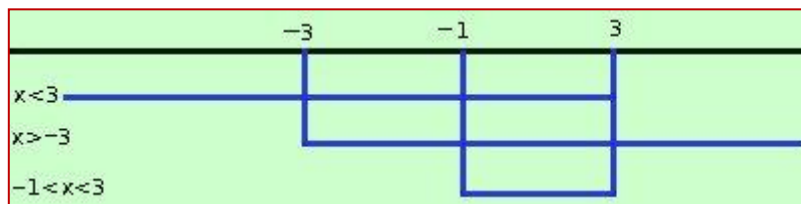
Otengo come risultato:

$$-1 < x < 3$$

Mettendo assieme questa relazione con le condizioni per la realta' dei logaritmi ho il sistema:

$$\begin{cases} x < 3 \\ x > -3 \\ -1 < x < 3 \end{cases}$$

Riporto i dati su un grafico, e prendo i valori comuni a tutte le disequazioni
indico i valori accettabili con una linea continua:



Otengo quindi $-1 < x < 3$

H. Esponenziali

1. Funzione esponenziale

Se consideriamo la funzione logaritmo:

$$y = \log_a x$$

e ne consideriamo la funzione *inversa* scambiando la x con la y:

$$x = \log_a y$$

e, per *definizione di logaritmo*, esplicitando la y posso scrivere:

$$y = a^x$$

Chiameremo la funzione cosi' trovata **Funzione esponenziale**.

2. Grafico della funzione esponenziale

Vediamo adesso il grafico della funzione:

$$y = a^x$$

Prima notiamo che la base deve sempre essere **maggiore di zero**.

Dobbiamo distinguere i due casi:

- la base a e' maggiore di 1
- la base a e' compresa fra 0 ed 1

a) Grafico della funzione esponenziale quando la base a e' maggiore di 1

Costruiamo il grafico considerando la base 2: infatti quando la base e' maggiore di 1 tutte le curve ottenute con qualunque base hanno le stesse caratteristiche.

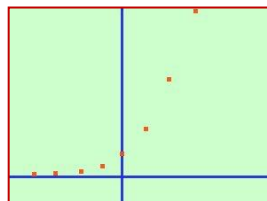
Voglio costruire il grafico della funzione:

$$y = 2^x$$

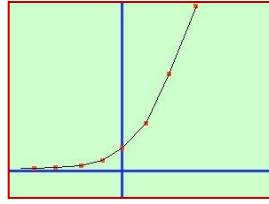
lo costruiamo per punti: diamo dei valori alla x ed otteniamo la y :

x	y
4	16
3	8
2	4
1	2
0	1
-1	1/2
-2	1/4
-3	1/8
-4	1/16

Ora metto i punti trovati in un grafico il punto (4,16) non e' stato messo:



ed infine li congiungo con una riga continua:



Conclusioni: se la base e è maggiore di 1 l'esponenziale inizia dal valore zero in meno infinito, sale lentamente finché per $x=0$ incontra in 1 l'asse delle y e poi cresce rapidamente verso più infinito (l'esponenziale e è la curva che tende a più infinito più rapidamente di **tutte** le altre curve).

Particolarmente importante è la **funzione esponenziale** quando la base è il numero di Nepero e :

$$y = e^x$$

b) Grafico della funzione esponenziale quando la base a è compresa fra 0 ed 1

Costruiamo il grafico considerando la base $1/2$: infatti quando la base a è compresa tra 0 ed 1 tutte le curve esponenziali ottenute con qualunque base hanno le stesse caratteristiche.

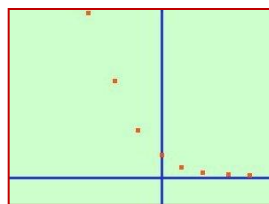
Voglio costruire il grafico della funzione:

$$y = 1/2^x$$

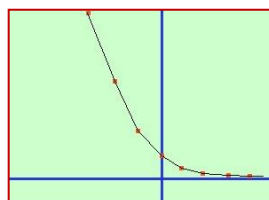
Lo costruiamo per punti: diamo dei valori alla x ed otteniamo la y :

x		y
4		$1/16$
3		$1/8$
2		$1/4$
1		$1/2$
0		1
-1		2
-2		4
-3		8
-4		16

Ora metto i punti trovati in un grafico il punto $(-4,16)$ non è stato messo:



ed infine li congiungo con una riga continua:



Sarà comunque una curva poco usata.

3. Equazioni esponenziali

Sono equazioni in cui la x compare all'esponente della potenza.

Per risolverle si cerca di ottenere una potenza sia prima che dopo l'uguale, con la stessa base in modo da poter uguagliare gli argomenti:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Se non è possibile farlo si cerca di trasformarla in equazione logaritmica in modo da poter operare un cambiamento di base.

Vediamo qualche esempio.

Risolvere le seguenti equazioni.

1) $2^{x^2-5x+6} = 1$ **Svolgimento:**

Risolvere la seguente equazione esponenziale:

$$2^{x^2-5x+6} = 1$$

Per la regola delle **potenze ad esponente zero** posso scrivere:

$$2^{x^2-5x+6} = 2^0$$

cioè, uguagliando gli esponenti:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

Otengo due soluzioni:

$$x = 2 \quad x = 3$$

2) $4^{2-x} \cdot 2^{x+1} = 16$ **Svolgimento**

Risolvere la seguente equazione esponenziale:

$$4^{2-x} \cdot 2^{x+1} = 16$$

Come prima cosa cerchiamo di fare tutte potenze con la stessa base:

$$2^{2(2-x)} \cdot 2^{x+1} = 2^4$$

cioè:

$$2^{4-2x} \cdot 2^{x+1} = 2^4$$

Per la regola del **prodotto di potenze** posso scrivere:

$$2^{4-2x+x+1} = 2^4$$

$$2^{5-x} = 2^4$$

ed eguagliando gli esponenti:

$$5 - x = 4$$

$$-x = -1$$

ed ottengo la soluzione:

$$x = 1$$

3) $3^{x+1} - 2^x = 2^{x+2} - 3^{x-1}$ **Svolgimento:**

Risolvere la seguente equazione esponenziale:

$$3^{x+1} - 2^x = 2^{x+2} - 3^{x-1}$$

Separo la basi 3 dalle basi 2:

$$3^{x+1} + 3^{x-1} = 2^{x+2} + 2^x$$

Ora cerco di mettere tutti alla stessa **potenza**:

$$3 \cdot 3^x + \frac{1}{3} \cdot 3^x = 4 \cdot 2^x + 2^x$$

Ora raccolgo a fattor comune le potenze:

$$\left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot 3^x = (4 + 1) \cdot 2^x$$

$$\frac{10}{3} \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x$$

Ora separo le potenze dai numeri:

$$\frac{3^x}{2^x} = 5 \cdot \frac{3}{10}$$

Semplificando e ricordando che la potenza di una frazione e' la potenza sia del numeratore che del denominatore:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

ed eguagliando gli esponenti:

$$x = 1$$

4) $2^x = 10$ **Svolgimento**

Risolvere la seguente equazione esponenziale:

$$2^x = 10$$

Quando abbiamo un'equazione di questo genere in cui non e' possibile avere le stesse basi si applica ad entrambe le parti dell'uguale l'operazione di logaritmo per poter abbassare l'esponente (usiamo il generico logaritmo a base e indichiamolo con il simbolo log) :

$$\log 2^x = \log 10$$

Ora applico la regola delle potenze:

$$x \log 2 = \log 10$$

Adesso e' sufficiente ricavare la x:

$$x = \frac{\log 10}{\log 2}$$

Nota: i valori log2 e log 10 sono dei normali numeri e quindi il risultato:

$$x = \frac{\log 10}{\log 2}$$

e' accettabile come se fosse:

$$x = \frac{\text{numero}}{\text{numero}}$$

5) $2^{x+2} = 5^{x+1}$ **Svolgimento:**

Risolvere la seguente equazione esponenziale:

$$2^{x+2} = 5^{x+1}$$

Mettiamo entrambe i termini alla stessa potenza:

$$2^2 \cdot 2^x = 5 \cdot 5^x$$

cioe'

$$4 \cdot 2^x = 5 \cdot 5^x$$

ora applico il logaritmo sia prima che dopo l'uguale (usiamo il generico logaritmo a base e indichiamolo con il simbolo log, comunque in questi casi la base e' ininfluente) :

$$\log(4 \cdot 2^x) = \log(5 \cdot 5^x)$$

Avrei potuto invece usare lo stesso metodo usato nell'esercizio 3 cioe' di arrivare ad un unico termine a potenza x ma il risultato e' identico.

Ora per le regole dei logaritmi posso scrivere:

$$\log 4 + \log 2^x = \log 5 + \log 5^x$$

$$\log 4 + x \log 2 = \log 5 + x \log 5$$

E' un'equazione di primo grado nell'incognita x; porto i termini con l'incognita prima dell'uguale:

$$x \log 2 - x \log 5 = \log 5 - \log 4$$

$$x (\log 2 - \log 5) = \log 5 - \log 4$$

Ricavo la x ed ottengo il risultato:

$$x = \frac{\log 5 - \log 4}{\log 2 - \log 5}$$

6) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ **Svolgimento:**

Risolvere la equazione esponenziale.

Per risolverla cerchiamo di togliere la potenza applicando ad entrambe i termini l'operazione di logaritmo (a base generica e quindi non la indico):

$$\log x^{\sqrt{x}} = \log \sqrt{x}$$

Per la regola del logaritmo di una potenza e ricordando che $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ottengo :

$$\sqrt{x} \log x = \frac{1}{2} \log x$$

Porto i termini prima dell'uguale:

$$\sqrt{x} \log x - \frac{1}{2} \log x = 0$$

Raccolgo ora log x:

$$(\log x) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

Questo e' un prodotto che e' zero quando uno dei due fattori e' zero, quindi la mia equazione si scompone nelle due equazioni:

$$\log x = 0 \quad \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0$$

- Risolvo la prima:

$$\log x = 0$$

Il logaritmo vale zero se l'argomento vale 1 quindi:

$$x = 1$$

- Risolvo la seconda:

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0$$

Porto il termine noto dopo l'uguale:

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

E' un'equazione irrazionale; elevo a quadrato entrambe i membri ed ottengo :

$$x = \frac{1}{4}$$

Verifico: se sostituisco 1/4 nell'equazione di partenza ottengo:

$$1/2 - 1/2 = 0$$

che e' vero quindi la soluzione e' accettabile:

$$x = \frac{1}{4}$$

Ottengo quindi le due soluzioni:

$$x = 1 \quad x = \frac{1}{4}$$

4. Disequazioni esponenziali

Sono disequazioni in cui la x , od una sua espressione, compare come potenza.

Come fatto nelle disequazioni logaritmiche dobbiamo distinguere quando la base a e' maggiore di 1 e quando la base e' compresa tra 0 ed 1:

- la base a e' maggiore di 1
- la base a e' compresa tra 0 ed 1

a) Disequazioni esponenziali a base maggiore di 1

Se la base e' maggiore di 1 allora il verso della disequazione si mantiene; cioe':

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

Naturalmente la proprieta' vale anche per il minore, per il minore ed uguale e per il maggiore ed uguale.

Vediamo un semplice esempio:

$$2^x < 8$$

Trasformo in potenze con la stessa base:

$$2^x < 2^3$$

Essendo la base maggiore di 1 la disuguaglianza, si conserva per gli esponenti; ottengo il risultato:

$$x < 3$$

Naturalmente uno sviluppo di questo genere dipende dalla possibilita' di poter avere ai due membri della disequazione una potenza con la stessa base; se questo non e' possibile allora dovremo trasformare mediante i logaritmi per poter esplicitare l'incognita (esempio numero 4).

Esiste anche il caso che l'equazione non sia risolvibile in modo esatto, come ad esempio quando la x compare sia all'esponente che a livello delle basi, in tal caso occorre fare ricorso al calcolo approssimato: (esempio numero 6) .

Vediamo qualche esercizio.

Risolvere le seguenti disequazioni.

1) $2^{x^2-5x+6} > 1$

Svolgimento

Risolvere la seguente disequazione esponenziale:

$$2^{x^2-5x+6} > 1$$

metto il termine dopo il disuguale sotto forma di potenza di 2 ($1 = 2^0$) :

$$2^{x^2-5x+6} > 2^0$$

essendo uguali le basi, ed essendo la base maggiore di 1, la disuguaglianza si conserva per gli esponenti:

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Questa e' una normalissima disequazione di secondo grado: considero l'equazione associata:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Essa ha soluzioni:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

Ecco i calcoli:

Ho la disequazione

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 6$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} =$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

Adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il più:

$$= \frac{5 - 1}{2} = 2 \qquad = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

Essendo $x^2 - 5x + 6 > 0$ dovrò prendere i valori esterni all'intervallo delle radici, quindi:

$$x < 2 \cup x > 3$$

e siccome il discriminante è maggiore di zero dovremo prendere per la disequazione i valori esterni all'intervallo delle radici cioè:

$$x < 2 \vee x > 3$$

2) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} < -10$

Svolgimento

Risolvere la seguente disequazione esponenziale:

$$2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} < -10$$

Prima cerco di avere le potenze senza aggiunta di numeri 1 e 2 ricordando che vale $2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$

$$2^{2x} \cdot 2^1 - 3 \cdot 2^x \cdot 2^2 < -10$$

$$2 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot 2^x < -10$$

$$2 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 10 < 0$$

Posso dividere ogni termine per 2:

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 5 < 0$$

Ora siccome un termine ha potenza doppia rispetto all'altro pongo:

$$2^x = y \text{ e quindi } 2^{2x} = y^2 \text{ ed ottengo:}$$

$$y^2 - 6y + 5 < 0$$

Questa è una normalissima disequazione di secondo grado: considero l'equazione associata:

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

Essa ha soluzioni:

$$y_1 = 1 \quad y_2 = 5$$

Ecco i calcoli:

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

Prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -6$$

$$c = 5$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} =$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} =$$

Adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il più:

$$= \frac{6 - 4}{2} = 1 \qquad = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 5$$

e siccome il discriminante e' maggiore di zero e la disequazione minore di zero dovremo prendere per la disequazione i valori interni all'intervallo delle radici cioe':

$$1 < y < 5$$

Ora devo risolvere le due disequazioni $1 < 2^x < 5$

Le risolvo una per volta:

- $2^x > 1$
 $2^x > 2^0$

$$x > 0$$

- $2^x < 5$

Siccome il 5 non si puo' ridurre a potenza del 2 applico il logaritmo ad entrambe i membri:

$$\log 2^x < \log 5$$

Per le proprieta' dei logaritmi:

$$x \log 2 < \log 5$$

$$x < \frac{\log 5}{\log 2}$$

Quindi il risultato finale e':

$$0 < x < \frac{\log 5}{\log 2}$$

3) $2^x + 3 \cdot 2^{1-x} \geq 5$

Svolgimento:

Risolvere la seguente disequazione esponenziale

$$2^x + 3 \cdot 2^{1-x} \geq 5$$

so che $2^{1-x} = 2 \cdot 1/2^x$ quindi scrivo:

$$2^x + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2^x} \geq 5$$

ora faccio il m.c.m. e poi elimino 2^x al denominatore (posso farlo perche' 2^x e' un numero certamente positivo e quindi non mi cambia di verso la disequazione) :

$$\frac{2^{2x} + 6}{2^x} \geq \frac{5 \cdot 2^x}{2^x}$$

$$2^{2x} + 6 \geq 5 \cdot 2^x$$

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6 \geq 0$$

Ora siccome un termine ha potenza doppia rispetto all'altro pongo:

$$2^x = y \text{ e quindi: } 2^{2x} = y^2 \text{ ed ottengo:}$$

$$y^2 - 5y + 6 < 0$$

Questa e' una normalissima disequazione di secondo grado; considero l'equazione associata:

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Essa ha soluzioni :

$$y_1 = 2 \quad y_2 = 3$$

Ecco i calcoli:

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Prendiamo la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abbiamo:

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 6$$

Sostituiamo nella formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} =$$

Facciamo i calcoli dentro radice:

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

Adesso devo prendere una volta il meno ed una volta il piu'

$$= \frac{5 - 1}{2} = 2 \quad = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Ho quindi le due soluzioni:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

e siccome il discriminante e' maggiore di zero e la disequazione maggiore di zero dovremo prendere per la disequazione i valori esterni all'intervallo delle radici cioe':

$$y < 2 \vee y > 3$$

Ora devo risolvere le due disequazioni: $2^x < 2$ e $2^x > 3$

Le risolvo una per volta:

- $2^x < 2$
 $2^x < 2^1$
 $x < 1$
- $2^x > 3$

siccome il 3 non si puo' ridurre a potenza del 2 applico il logaritmo ad entrambe i membri:

$$\log 2^x > \log 3$$

per le proprieta' dei logaritmi:

$$x \log 2 > \log 3$$

$$x > \frac{\log 3}{\log 2}$$

Quindi il risultato finale e':

$$x < 1 \vee x > \frac{\log 3}{\log 2}$$

4) $5^x - 4 \cdot 3^{x+1} \leq 2 \cdot 3^x - 5^{x+1}$ **Svolgimento:**

Risolvere la seguente disequazione esponenziale:

$$5^x - 4 \cdot 3^{x+1} \leq 2 \cdot 3^x - 5^{x+1}$$

Ricordando che $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$ cerco di avere le potenze allo stesso esponente:

$$5^x - 4 \cdot 3 \cdot 3^x \leq 2 \cdot 3^x - 5 \cdot 5^x$$

$$5^x - 12 \cdot 3^x \leq 2 \cdot 3^x - 5 \cdot 5^x$$

separo le potenze di stessa base:

$$5^x + 5 \cdot 5^x \leq 2 \cdot 3^x + 12 \cdot 3^x$$

sommo i termini simili:

$$6 \cdot 5^x \leq 14 \cdot 3^x$$

siccome ho due basi diverse applico il logaritmo ad entrambe i membri:

$$\log 6 \cdot 5^x \leq \log 14 \cdot 3^x$$

che, per le proprieta' dei logaritmi diventa:

$$\log 6 + \log 5^x \leq \log 14 + \log 3^x$$

$$\log 6 + x \log 5 \leq \log 14 + x \log 3$$

ricavo la x

$$x \log 5 - x \log 3 \leq \log 14 - \log 6$$

$$x (\log 5 - \log 3) \leq \log 14 - \log 6$$

$$x \leq \frac{\log 14 - \log 6}{\log 5 - \log 3}$$

5) $\frac{5^x \sqrt{5^{x+2}}}{\sqrt[3]{5^{x-2}}} < 5^{x+1}$ **Svolgimento:**

Risolvere la disequazione esponenziale:

Ricordando le regole sugli esponenti e gli indici di radice scrivo:

$$\frac{5^x 5^{(x+2)/2}}{5^{(x-2)/3}} < 5^{x+1}$$

Sposto dal denominatore al numeratore cambiando di segno l'esponente:

$$5^x \cdot 5^{(x+2)/2} \cdot 5^{-(x-2)/3} < 5^{x+1}$$

essendo prodotti di potenze con la stessa base sommo tra loro gli esponenti:

$$5^{[x + (x+2)/2 - (x-2)/3]} < 5^{x+1}$$

adesso posso procedere in due modi: o pongo subito uguali gli esponenti (avendo la stessa base) oppure prima eseguo le operazioni sugli esponenti e poi tolgo le basi: e' comunque la stessa cosa:

$$x + \frac{x+2}{2} - \frac{x-2}{3} < x+1$$

m.c.m. = 6:

$$\frac{6x + 3x + 6 - 2x + 4}{6} < \frac{6x + 6}{6}$$

$$6x + 3x + 6 - 2x + 4 < 6x + 6$$

$$6x + 3x - 2x - 6x < -6 - 4 + 6$$

$$x < -4$$

6) $2^{2x} > (2-x)2^x$

Svolgimento:

Risolvere la seguente disequazione esponenziale:

$$2^{2x} > (2-x)2^x$$

Porto tutti i termini prima del disuguale:

$$2^{2x} - (2-x)2^x > 0$$

metto in evidenza 2^x :

$$2^x [2^x - (2-x)] > 0$$

Essendo 2^x una potenza e' un numero certamente positivo e quindi la mia disequazione si riduce a:

$$2^x - (2-x) > 0$$

o meglio:

$$2^x > 2-x$$

Questa equazione, coinvolgendo la x sia come base che come esponente non e' risolubile in forma esatta, ma la risolveremo graficamente (in modo approssimato).

Considero come funzioni il termine prima del disuguale ed il termine dopo il disuguale:

$$y = 2^x \quad y = -x + 2$$

La prima funzione e' un esponenziale e la seconda funzione e' una retta: ne traccio i grafici.

Le due funzioni si incontreranno nel punto **P**:

- a sinistra del punto **P** il grafico della retta supera il grafico dell'esponenziale e quindi la disequazione non e' verificata:

- a destra del punto **P** il grafico dell'esponenziale supera il grafico della retta e quindi la disequazione e' verificata.

Il problema si riduce a trovare il valore del punto **P** in cui le due funzioni si intersecano.

Si procede per tentativi:

1. Per $x=0$
l'esponenziale vale 1 $2^0 = 1$
la retta vale 2 $-0+2 = 2$
la retta supera l'esponenziale.

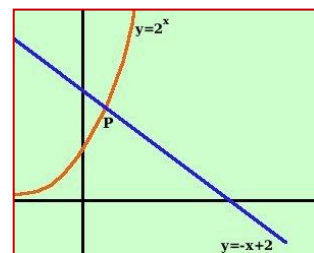
Per $x=1$
l'esponenziale vale 2 $2^1 = 2$
la retta vale 1 $-1+2 = 1$
l'esponenziale supera la retta.

Quindi il punto **P** sara' compreso tra 0 ed 1 cioe' avra' ascissa = 0,...

2. Adesso provo i valori 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 finche' non trovo due valori l'uno in cui la retta superi l'esponenziale e l'altro in cui l'esponenziale superi la retta: eseguendo l'operazione con la calcolatrice ho trovato 1,5 ed 1,6

In questo modo trovo la prima cifra decimale 1,5.....

3. Ripeto l'operazione con la seconda cifra decimale cioe' provo i valori: 0,51 0,52 0,53 0,54 0,55 0,56 finche' non trovo due valori l'uno in cui la retta superi l'esponenziale e l'altro in cui l'esponenziale superi la retta eccetera
4. Reiterando il procedimento posso trovare quante cifre decimali voglio.



Del procedimento descritto sopra per ricavare l'ascissa di **P** di solito, negli esami di stato per il liceo scientifico, e' richiesta la traduzione in un linguaggio informatico: (repeat until.. if.. then.. else..)

repeat

if retta maggiore di esponenziale
 then aumenta il decimale di 1
 else scrivi la cifra decimale
 until la cifra abbia tot numeri decimali.

b) Disequazioni esponenziali a base minore di 1

Se la base e' minore di 1 possiamo agire in due modi diversi:

1. Ricordando che l'inverso di un numero minore di 1 e' un numero maggiore di 1 posso cambiare prendere come base l'inverso e cambiare contemporaneamente di segno l'esponente e quindi procedere come nelle pagine precedenti; infatti, ad esempio e' valida l'uguaglianza:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{(-x)}$$
2. Se la base e' minore di 1 allora il verso della disequazione cambia; cioe':

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Naturalmente la proprieta' vale anche per il minore, per il minore ed uguale e per il maggiore ed uguale.

Vediamo un semplice esempio:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$$

1. Primo metodo:

Trasformo la base cambiando di segno l'esponente:

$$2^{-x} < 8$$

Trasformo il numero 8 in potenza di 2:

$$2^{-x} < 2^3$$

Eguaglio gli esponenti:

$$-x < 3$$

Cambio segno (e verso perche' multiplico per -1) ed ho la soluzione:

$$x > -3$$

2. Secondo metodo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$$

Trasformo 8 in potenza di 1/2:

$$8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$$

Quindi ho:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

Essendo la base minore di 1 posso fare la disuguaglianza inversa fra gli esponenti ed ottengo il risultato:

$$x > -3$$

Come vedi usare un metodo piuttosto che l'altro e' solamente una scelta personale .

A me sembra che il secondo metodo sia un po' piu' complicato, quindi preferisco il primo:
 La vita e' gia' abbastanza complicata, perche' complicarla ancora di piu'?

FINE