Aritmetica e numeri

A. *Insieme N dei numeri Naturali*

1. Generalita' sui numeri naturali

I numeri naturali sono, storicamente, la base di tutta la matematica: sembra (dalle tracce lasciate su un osso di lupo) che fossero noti gia' 70.000 anni fa. Sono stati considerati degli oggetti iniziali finche', agli inizi del '900, si senti' il bisogno di farli derivare da concetti piu' elementari (quali il concetto di cardinale in teoria degli insiemi) ed anche di sottoporli ad una rigorosa assiomatica (assiomi di Peano).
Al solito ci sono due teorie: quella dei matematici che credono che i numeri naturali esistono effettivamente e quelli che credono che i numeri siano una costruzione del nostro cervello. In entrambe i casi i risultati che otterremo saranno gli stessi.

2. I numeri naturali

E' possibile, mediante la teoria degli insiemi, generare l'insieme dei numeri naturali come ***insieme quoziente*** (*Scheda A1*) dell'insieme di tutti gli insiemi possibili con la relazione di equivalenza "essere in corrispondenza biunivoca"; siccome e' un concetto piuttosto difficile ti consiglio di consultarlo solo se effettivamente ti serve

---

I numeri naturali sono i numeri:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots$$

I puntini indicano che per ogni numero io posso trovare il numero successivo e questo si puo' indicare con il simbolo infinito (∞)

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots \infty$$

Attorno all'anno 1000 alla successione fu aggiunto come primo elemento lo zero.

I greci ed i romani non potevano concepire che si potesse usare un simbolo per lo zero (il nulla) in quanto se una cosa non esiste come si puo' rappresentare? come vedi c'era una certa confusione fra significante (parola che si usa per rappresentare l'oggetto) e significato (l'oggetto) anche se un filosofo disse : la parola cane non morde. Da notare che questa confusione e' alla base di molte teorie sulla magia.

E la successione divenne:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots \infty$$

Come insieme potrò anche indicarlo come ∞

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots \infty\}$$

che si legge: N e' l'insieme dei numeri zero, uno, due, tre, infinito.

Ora su dovremo studiare come questi oggetti interagiscono fra di loro, cioe' dovremo studiare le possibili operazioni: somma, prodotto, differenza e quoziente.

Scheda A1: Insieme quoziente

La relazione di equivalenza e' importantissima perche' se riusciamo ad individuarla su un insieme l'insieme stesso viene suddiviso in sottoinsiemi (chiamati anche classi) tali che formano una partizione (vedi pag. ..) dell'insieme di partenza, cioe' gli elementi di un nuovo insieme, l'**insieme quoziente**.

Esempi:

Considero l'insieme degli alunni di un istituto scolastico e considero la relazione:

"e' nella stessa aula di"
- E' **riflessiva:** ognuno e' nella stessa aula di se' stesso
- E' **simmetrica:** se Alice e' nella stessa aula di Bruno anche Bruno e' nella stessa aula di Alice
- E' **transitiva:** se Alice e' nella stessa classe di Bruno e Bruno e' nella stessa aula di Carla allora Alice e' nella stessa aula di Carla.

Quindi e' una relazione di **equivalenza.** Questa relazione divide tutti gli alunni dell'istituto scolastico in gruppi (classi) che corrispondono alle classi dell'istituto e l'insieme quoziente ha come elementi queste classi: 1A, 1B, 1C, 2A, 2B,.....

Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione:
"abita nella stesso comune"
- E' **riflessiva:** ognuno abita nello stesso comune di se' stesso
- E' **simmetrica:** se Aldo abita nello stesso comune di Beatrice anche Beatrice abita nello stesso comune di Aldo
- E' **transitiva:** se Antonio abita nello stesso comune di Bianca e Bianca abita nello stesso comune di Carlotta allora Antonio abita nello stesso comune di Carlotta

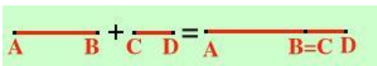
Quindi e' una relazione di **equivalenza**. Questa relazione divide tutti i cittadini italiani in gruppi (classi) che corrispondono alle citta' italiane e l'insieme quoziente ha come elementi queste citta': Milano, Venezia, Bologna, Napoli, Palermo,.......

Matematicamente, per individuare un elemento dell'insieme quoziente, basta considerarne un singolo componente; ad esempio, negli esempi visti sopra potrei dire:
La classe dell'alunno Bianchi Ermenegildo
Oppure
La citta' italiana dove abita Antelami Antinisco
Matematicamente, dobbiamo considerare tutti gli elementi distinguibili fra loro e perfettamente individuati dal loro nome, mentre nella realta' c'e' qualche problema perche' possono esservi delle persone con lo stesso nome.

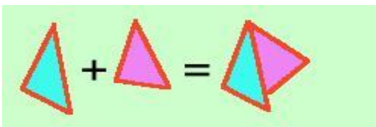
3. Concetto di operazione interna

Un'operazione su due oggetti e' un qualche cosa che prende i due oggetti e li trasforma in un terzo oggetto. Ora il terzo oggetto puo':
- essere contenuto nell'insieme in cui sono contenuti i due oggetti di base (e quindi l'operazione si dice interna, e l'insieme si dice chiuso rispetto a quella operazione) in pratica posso sempre fare l'operazione;
- non essere contenuto nell'insieme in cui sono contenuti i due oggetti (e quindi l'operazione di dice esterna, e l'insieme si dice non chiuso rispetto a quella operazione) non posso fare sempre l'operazione.

Esempio:
- La somma fra segmenti e' un'operazione interna perche' il risultato e' ancora un segmento.

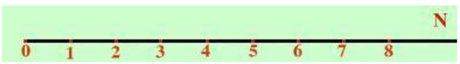


- La somma fra triangoli non e' un'operazione interna perche' il risultato di solito non e' un triangolo.



4. Addizione fra numeri naturali

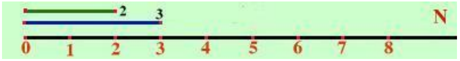
D'ora in avanti useremo indifferentemente i termini somma e addizione anche se la somma indica il risultato mentre l'addizione indica l'operazione.
Disegno su una semiretta l'insieme dei numeri naturali:



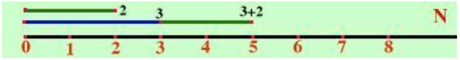
Se voglio fare:

$$3 + 2$$

disegno a partire da 0 un segmento lungo 3 ed un segmento lungo 2



Per sommare metto in fila i segmenti e vedo che ottengo un segmento che termina in 5:



Quindi:

$$3 + 2 = 5$$

C'e' subito da dire che facendo la somma fra numeri naturali mi muovo sempre verso destra e, a destra, i numeri sono infiniti; quindi potro' sempre fare l'addizione cioe' l'addizione fra numeri naturali e' un'operazione interna e l'insieme N e' chiuso rispetto all'addizione.

Fra tutti i numeri naturali ne esiste uno particolare: lo zero. Lo zero ha la proprieta' di non cambiare niente; infatti, preso un numero qualunque:

$$0 + \text{numero} = \text{numero} + 0 = \text{numero}$$

Si esprime questo fatto dicendo che :

- zero e' l'elemento neutro per l'addizione -

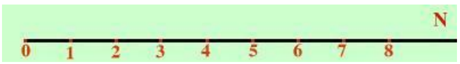
Questa proprieta' sara' sempre valida per tutti i numeri: naturali, interi, razionali, reali, complessi.

5. Moltiplicazione fra numeri naturali

D'ora in avanti useremo indifferentemente i termini prodotto e moltiplicazione, anche se il prodotto indica il risultato, mentre la moltiplicazione indica l'operazione.

Nei numeri naturali dovremmo indicare l'operazione di moltiplicazione mediante il simbolo X, ma preferisco usare il simbolo • .

Disegno su una semiretta l'insieme dei numeri naturali:

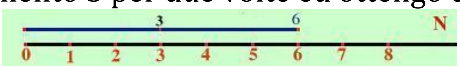


Se voglio fare:

$$3 \cdot 2$$

disegno a partire da 0 un segmento lungo 3:

Per moltiplicare ripeto il segmento 3 per due volte ed ottengo che il risultato termina in 6:



Quindi:

$$3 \cdot 2 = 6$$

C'e' subito da dire che facendo il prodotto fra numeri naturali mi muovo sempre verso destra e, a destra, i numeri sono infiniti; quindi potro' sempre fare la moltiplicazione cioe' la moltiplicazione fra numeri naturali e' un'operazione interna e l'insieme N e' chiuso rispetto alla moltiplicazione.

Fra tutti i numeri naturali ne esiste uno particolare: l'uno. L'uno ha la proprieta' di non cambiare niente; infatti, preso un numero qualunque:

$$1 \cdot \text{numero} = \text{numero} \cdot 1 = \text{numero}$$

Si esprime questo fatto dicendo che :

- *uno e' l'elemento neutro per la moltiplicazione* -

Questa proprieta' sara' sempre valida per tutti i numeri: naturali, interi, razionali, reali, complessi.

Anche lo zero e' speciale per la moltiplicazione.
Lo zero ha la proprieta' di "assorbire" tutti i numeri con cui e' moltiplicato facendoli diventare zero:

$$0 \cdot \text{numero} = \text{numero} \cdot 0 = 0$$

Si esprime questo fatto dicendo che :

zero e' l'elemento assorbente per la moltiplicazione

Questa proprieta' sara' sempre valida per tutti i numeri: naturali, interi, razionali, reali, complessi.
Da questa proprieta'derivera' la ***legge di annullamento del prodotto*** (*Scheda A2*)

Scheda A2: Legge di annullamento del prodotto

Un prodotto è zero se e solo se uno dei fattori del prodotto vale zero

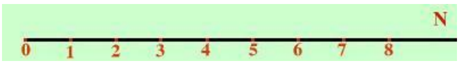
Significa che se;
$a \cdot b \cdot c = 0$
allora dovra' essere vera almeno una delle seguenti uguaglianze:
$a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0$

---

6. Sottrazione fra numeri naturali

Useremo indifferentemente i termini differenza e sottrazione, anche se differenza indica il *risultato* mentre sottrazione indica l'*operazione*.

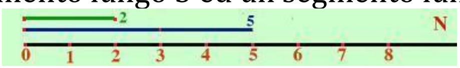
Disegno su una semiretta l'insieme dei numeri naturali:



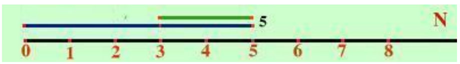
Se voglio fare:

$$5 - 2$$

disegno a partire da 0 un segmento lungo 5 ed un segmento lungo 2:



Per sottrarre dalla fine del segmento 5 tolgo il semento lungo 2 ed ottengo un segmento che termina in 3:



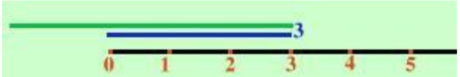
Quindi:

$$5 - 2 = 3$$

Facendo la differenza fra numeri naturali, mi muovo sempre verso sinistra e, a sinistra, i numeri finiscono nello zero; quindi se devo ad esempio eseguire:

$$3 - 5 =$$

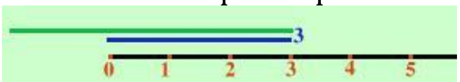
non lo posso fare.
E' come quando alle elementari la maestra ti diceva che non si puo' togliere 5 dal 3 perche' il 5 e' piu' grosso del 3.



Quindi non si puo' fare sempre la sottrazione cioe' la sottrazione fra numeri naturali non e' un'operazione interna e l'insieme N non e' chiuso rispetto alla sottrazione.

7. Necessita' di ampliare l'insieme N

Per poter fare sempre la sottrazione mi devo poter spostare a sinistra quanto voglio:



Quindi per poter fare sempre anche la sottrazione dovremo ampliare l'insieme dei numeri naturali aggiungendo anche dei numeri a sinistra dello zero.

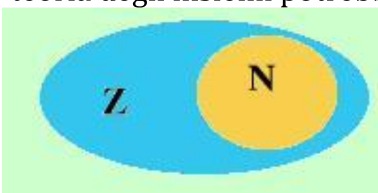
B. *Insieme Z dei Numeri Interi*

1. Generalita' sui numeri interi

Il sistema piu' semplice per avere dei numeri a sinistra dello zero consiste nel duplicare i numeri come se fossero visualizzati da uno specchio:

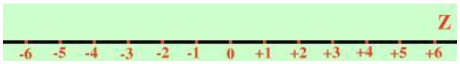
e per distinguere i numeri a destra da quelli a sinistra dello zero metteremo davanti al numero + se siamo a destra e - se siamo a sinistra.
Siccome i numeri interi prendono il segno relativamente alla loro posizione rispetto allo zero verranno detti ***numeri interi relativi***.

Una rappresentazione mediante teoria degli insiemi potrebbe essere la seguente:

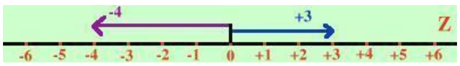


2. L'insieme Z

Prima cosa da osservare e' che l'insieme dei numeri interi:



procede sia a destra che a sinistra, quindi i numeri vanno da $-\infty$ fino a $+\infty$.
Per indicare i numeri stavolta useremo sempre un segmento con origine in zero e con una freccia che indichi la destra se il numero e' positivo e la sinistra se il numero e' negativo (tipo vettore):



Anche qui dovremo definire come agiscono le operazioni:

- addizione
- moltiplicazione
- sottrazione
- divisione

Naturalmente mantenendo inalterati i risultati ottenuti sui numeri naturali nella semiretta a destra dello zero , Z e' un ampliamento di N; quindi nella parte che resta uguale devono rimanere le stesse proprieta', *in particolare lo zero sara' l'elemento neutro per l'addizione e l'elemento assorbente per la moltiplicazione mentre l'uno e' l'elemento neutro per la moltiplicazione anche su tutto Z.*

3. Somma fra numeri interi

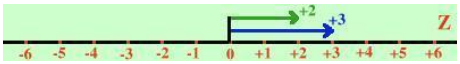
Considero l'insieme Z dei numeri interi:

Voglio definire l'addizione fra due numeri; per capire come funziona prendiamo sempre gli stessi numeri e facciamo variare i segni; facciamo ad esempio:

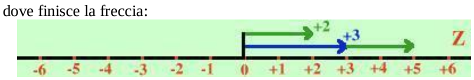
(+3) + (+2) =

(+3) + (+2) =

E' il caso che deve corrispondere alla somma fra naturali.
Considero i due numeri su Z



Li metto in fila e trovo il risultato dove finisce la freccia:



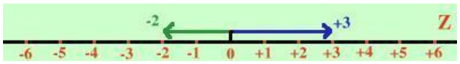
(+3) + (+2) = +5

Per verificarne l'esattezza possiamo anche rifarci all'esperienza normale.
Posso, semplificando, dire che tre passi avanti piu' due passi avanti fa cinque passi avanti.
Od anche dire che se devo avere 3 euro e poi devo avere 2 euro in totale devo avere 5 euro.

(+3) + (-2) =

(+3) + (-2) =

Considero i due numeri su Z:



Li metto in fila attaccando l'inizio del secondo dove finisce il primo e trovo il risultato dove finisce la freccia:

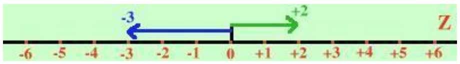
(+3) + (-2) = +1

Posso, semplificando, dire che tre passi avanti e due passi indietro fa un solo passo avanti.
Od anche dire che se devo avere 3 euro e devo pagare 2 euro in totale devo avere 1 euro.

(-3) + (+2) =

(-3) + (+2) =

Considero i due numeri su Z:



Li metto in fila attaccando l'inizio del secondo dove finisce il primo e trovo il risultato dove finisce la freccia:

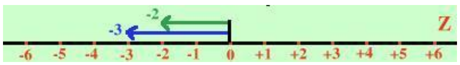
(-3) + (+2) = -1

Posso, semplificando, dire che tre passi indietro e due passi avanti fa un solo passo indietro.
Od anche dire che se devo pagare 3 euro e devo avere 2 euro in totale devo pagare 1 euro.

(-3) + (-2) =

(-3) + (-2) =

Considero i due numeri su Z:



Li metto in fila attaccando l'inizio del secondo dove finisce il primo e trovo il risultato dove finisce la freccia:

(-3) + (-2) = -5

Posso, semplificando, dire che tre passi indietro e due passi indietro fa cinque passi indietro.
Od anche dire che se devo pagare 3 euro e devo pagare 2 euro in totale devo pagare 5 euro.

Dai ragionamenti precedenti vediamo che i risultati sono:

$(+3) + (+2) = +5$

$(+3) + (-2) = +1$

$(-3) + (+2) = -1$

$(-3) + (-2) = -5$

Per scrivere la regola raggruppo i risultati notando che due valgono 5 e due valgono 1:

$(+3) + (+2) = +5$

$(-3) + (-2) = -5$

I risultati valgono 5 se i due numeri hanno lo stesso segno.

$(+3) + (-2) = +1$

$(-3) + (+2) = -1$

I risultati valgono 1 se i due numeri hanno segni contrari.
C'e' inoltre da dire che il segno che otteniamo corrisponde a quello del numero piu' grosso.

Regola per sommare due numeri interi: se hanno lo stesso segno, faccio la somma e metto il segno che hanno; se hanno segno contrario, faccio la differenza e metto il segno del maggiore.

Esempi:

$(-8) + (-7) =$
i due numeri hanno lo stesso segno; quindi devo fare la somma 8+7=15; il loro segno e' meno quindi:
$(-8) + (-7) = -15$

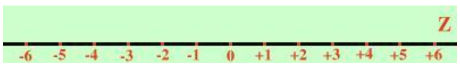
$(+7) + (-11) =$
i due numeri non hanno lo stesso segno; quindi devo fare la differenza 11-7=4; il segno del piu' grosso e' meno, quindi:
$(+7) + (-11) = -4$

$(-8) + (-7) + (+11) + (-3) + (+2) =$
qui conviene raggruppare i numeri positivi e sommarli, poi considerare i numeri negativi e sommarli:
$(-18) + (+13) =$
i due numeri hanno segno contrario; quindi devo fare la differenza 18-13=5,
il segno del piu' grosso e' meno, quindi:
$(-18) + (+13) = -5$

Possiamo dire subito che la somma, visto che procede sia a destra che a sinistra, e' un'operazione interna e l'insieme Z e' chiuso rispetto all'addizione (cioe' posso sempre fare l'addizione in Z).

4. Prodotto fra numeri interi

Considero l'insieme Z dei numeri interi:

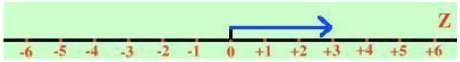


Voglio definire il prodotto fra due numeri. Per capire come funziona prendiamo sempre gli stessi numeri e facciamo variare i segni; facciamo ad esempio:

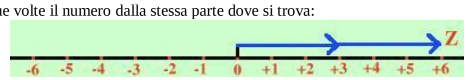
$(+3) \cdot (+2) =$

(+3) · (+2) =

E' il caso che deve corrispondere al prodotto fra naturali.
Considero il primo numero su Z:



Per moltiplicare per +2 ripeto due volte il numero dalla stessa parte dove si trova:

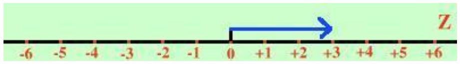


(+3) · (+2) = +6

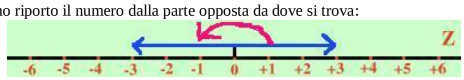
$(+3) \cdot (-2) =$

(+3) · (-2) =

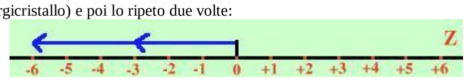
Considero il primo numero su Z:



Per moltiplicare per il meno segno riporto il numero dalla parte opposta da dove si trova:



(lo rovescio come se fosse un tergicristallo) e poi lo ripeto due volte:

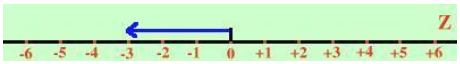


(+3) · (-2) = -6

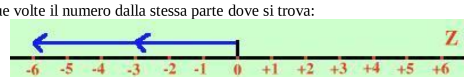
$(-3) \cdot (+2) =$

(-3) · (+2) =

Considero il primo numero su Z:



Per moltiplicare per +2 ripeto due volte il numero dalla stessa parte dove si trova:

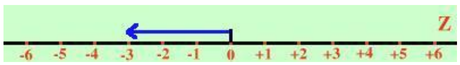


(-3) · (+2) = -6

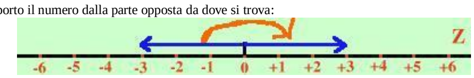
$(-3) \cdot (-2) =$

(-3) · (-2) =

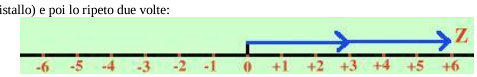
Considero il primo numero su Z:



Per moltiplicare per il meno segno riporto il numero dalla parte opposta da dove si trova:



(lo rovescio come se fosse un tergicristallo) e poi lo ripeto due volte:



(-3) · (-2) = +6

Dai ragionamenti precedenti vediamo che i risultati sono:

$(+3) \cdot (+2) = +6$

$(+3) \cdot (-2) = -6$

$(-3) \cdot (+2) = -6$

$(-3) \cdot (-2) = +6$

Per scrivere la regola raggruppo i risultati notando che due sono positivi e due negativi.

$(+3) \cdot (+2) = +6$

$(-3) \cdot (-2) = +6$

I risultati sono positivi se i due numeri hanno lo stesso segno.

$(+3) \cdot (-2) = -6$

$(-3) \cdot (+2) = -6$

I risultati sono negativi se i due numeri hanno segni contrari.

Regola per moltiplicare due numeri interi: moltiplico i valori; se i numeri hanno lo stesso segno metto il segno piu', se hanno segno contrario metto il meno.

Se vuoi approfondire ecco ***la regola dei segni*** (*Scheda B1*).

Scheda B1:segni di un prodotto

Le regole del prodotto fra segni sono le seguenti:

+ moltiplicato + = +
+ moltiplicato - = -
- moltiplicato + = -
- moltiplicato - = +

Puoi costruirti un'immagine mentale associando a + un concetto positivo quale amico ed a - un concetto negativo quale nemico il simbolo matematico "moltiplicato" si traduce in italiano nella particella di, del ,dello, della e l'uguale si traduce nel verbo e', e' uguale, vale, ecc..La regola ora recita:

L'amico dell'amico e' amico
L'amico del nemico e' nemico
Il nemico dell'amico e' nemico
Il nemico del nemico e' amico

Troppo difficile? Se vuoi si puo' rendere ancora piu' semplice pensando a cose uguali e diverse.
Se pensi che sia positivo che due cose siano uguali e negativo che siano diverse puoi semplicemente dire:

SE I SEGNI SONO UGUALI IL PRODOTTO E' POSITIVO
SE I SEGNI SONO DIVERSI IL PRODOTTO E' NEGATIVO

Possiamo dire subito che il prodotto, visto che procede sia a destra che a sinistra, e' un'operazione interna e l'insieme Z e' chiuso rispetto alla moltiplicazione (cioe' posso sempre fare la moltiplicazione in Z).

5. Differenza fra numeri interi

Ormai per definire la differenza possiamo utilizzare le regole viste prima per il prodotto, intendendo che due segni in fila sono sempre moltiplicati fra loro: quindi:

$$\boxed{\begin{array}{l} + \cdot + = + \\ + \cdot - = - \\ - \cdot + = - \\ - \cdot - = + \end{array}}$$

Pertanto se devo calcolare:

$(+3) - (+2) =$

Posso trasformare in:

$+3 -2 = +1$

i segni sono diversi; faccio la differenza e metto il segno del piu' grande.

Quindi per fare la differenza faccio cadere le parentesi e mi comporto come se fosse la somma.

Deriva da cio' il fatto che non potro' mai mettere due segni in fila ma dovro' separarli con una parentesi; ad esempio sara' sbagliato scrivere:

+3 - + 2

mentre si dovra' scrivere:

+3 - (+ 2)

Diciamo che siccome la differenza viene ricondotta alla somma, allora anche la differenza e' un'operazione interna e l'insieme Z e' chiuso rispetto alla sottrazione (cioe' posso sempre fare la sottrazione in Z).

Esercizi:
calcolare:

(+3) + (+2) - (+4) + (-5) - (-6) =
Faccio cadere le parentesi con la regola dei segni:
+3 + 2 - 4 - 5 + 6 =
Sommo tra loro i positivi ed i negativi:
+11 - 9 = +2
Ricorda che puoi (anzi dovresti) tralasciare i segni + prima dei numeri se sono iniziali cioe' ad esempio nell'ultimo passaggio e' meglio scrivere: 11 - 9 = 2

(+13) - (+12) - (-14) - (-15) + (-16) - (-10) =
Faccio cadere le parentesi:
13 -12 + 14 + 15 - 16 + 10 =
Sommo tra loro i positivi ed i negativi:
52 - 28 = 24

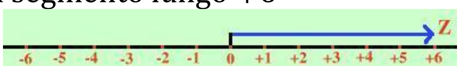
---

6. Divizione fra numeri interi

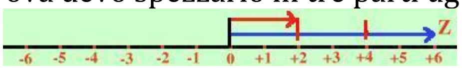
Per eseguire la divisione dovremo fare l'operazione contraria della moltiplicazione, cioe' se nella moltiplicazione ripetevamo il segmento nella divisione dovremo spezzettare il segmento in parti uguali. Se ad esempio devo fare:

(+6) : (+3) =

significa che devo prendere il segmento lungo +6



e, dalla stessa parte dove si trova devo spezzarlo in tre parti uguali e considerare la prima:



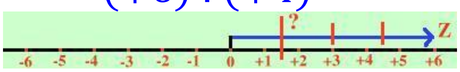
Quindi:

(+6) : (+3) = +2

Per i segni varranno le stesse regole del prodotto.

Sorge pero' un problema: finora i numeri sono come dei paracarri su una strada, cioe' sono a distanza regolare fra loro ma in mezzo fra un numero e l'altro non c'e' niente, quindi la divisione va bene quando cadiamo esattamente su un numero; pero' e' possibile che il risultato della divisione non corrisponda ad un numero ma cada dove numeri non esistono. Diremo che la divisione non e' un'operazione interna e l'insieme Z non e' chiuso rispetto alla divisione (cioe'non posso sempre fare la divisione in Z). Esempio:

(+6) : (+4) =



Quindi:

$$(+6) : (+4) = +?$$

Ora, per eseguire sempre la divisione abbiamo due strade:

- la prima e' quella di adattare la divisione introducendo il resto (come si faceva alle elementari);
- la seconda e' di ampliare l'insieme dei numeri riempiendo lo spazio fra un numero e l'altro in modo da poter sempre fare la divisione.

La seconda strada ci porta all'insieme dei numeri razionali Q

7. Necessita' di ampliare l'insieme Z

Ora, per eseguire sempre la divisione abbiamo due strade:

- la prima e' quella di adattare la divisione introducendo il resto (come si faceva alle elementari);
- la seconda e' di ampliare l'insieme dei numeri riempiendo lo spazio fra un numero e l'altro in modo da poter sempre fare la divisione.

La prima strada viene seguita se studiamo il numero.
Se invece vogliamo studiare le proprieta' delle operazioni dobbiamo seguire la seconda strada che ci porta all'insieme dei numeri razionali Q, .

C. *Insieme Q dei Numeri Razionali*

1. Ampliamento dell'insieme Z

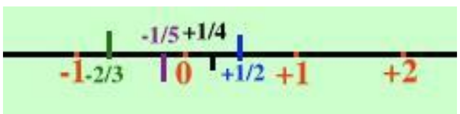
Finora i numeri sono come dei paracarri su una stada, cioe' sono a distanza regolare fra loro ma in mezzo fra un numero e l'altro non c'e' niente, quindi, per poter sempre fare la divisione dovro' riempire questi spazi indicando ognuno col suo nome i valori che posso trovare.
Il problema e': come fare?
Il sistema piu' semplice e' quello di indicare il punto mediante il valore della divisione, cioe' il punto che otterrei considerando la divisione:

$$(+1) : (+2)$$

Lo chiamero' semplicemente:

$$+\frac{1}{2}$$

In questo modo riempio lo spazio esistente fra i numeri interi degli infiniti risultati che otterrei eseguendo le possibili divisioni fra numeri interi:



1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...
2/1, 2/2, 2/3, 2/4, 2/5, ...

3/1, 3/2, 3/3, 3/4, 3/5, ...

....

C'e' da dire che esiste un numero che fa eccezione: lo zero!
Infatti non posso ***dividere per zero*** (*Scheda C1*), quindi non hanno significato i numeri 1/0, 2/0, 3/0, 4/0,...

Indichero' con Q (insieme dei numeri razionali) questo nuovo insieme,

Scheda C1: In matematica non si puo' mai dividere per zero

Infatti, essendo la divisione il contrario della moltiplicazione, se io avessi ad esempio:
5 : 0 = 2
questo equivale a:
5 = 2 x 0 = 0
Se invece fosse:
5 : 0 = 4
questo equivale a:
5 = 4 x 0 = 0
Vedi che non riesco ad avere un risultato ben determinato.
Allora in matematica il dividere per zero porta a risultati assurdi.
Esempio che mostra l'impossibilita' di dividere per zero.
Pongo
a = 1
b = 1
Per questi valori di a e b considero un'uguaglianza del tipo:
a = b
che e' vera; infatti sostituendo:
1 = 1
Moltiplico per **a** sia prima che dopo l'uguale:
$a^2 = ab$
Tolgo da entrambe le parti b^2 :
$a^2 - b^2 = ab - b^2$
Scompongo:
$(a + b)\cdot(a - b) = b\cdot(a - b)$
Tolgo (a - b) da entrambe le parti:
a + b = b
Sostituisco i numeri iniziali
1 + 1 = 1
Evidentemente abbiamo fatto un errore:
quando abbiamo tolto da entrambe le parti (a - b); in pratica abbiamo diviso entrambe i membri per (a - b) e (a - b) = 0 cioe' abbiamo diviso per zero ed abbiamo ottenuto 2 = 1 risultato assurdo.
In matematica non si puo' mai ***dividere per zero.***

2. Insieme dei numeri razionali Q

Possiamo ora definire l'Insieme Q dei numeri razionali:

$$Q = \left\{\frac{m}{n} : m \in Z, n \in Z \ e \ n \neq 0\right\}$$

Si legge:
"Q e' l'insieme dei numeri m/n tali che m e' un numero intero, n e' un numero intero e n e' diverso da zero".
Se hai bisogno di aiuto per ***leggere la definizione*** (*Scheda C2*)

Scheda C2: Come si legge la definizione:

$$Q = \left\{\frac{m}{n} : m \in Z, n \in Z \ e \ n \neq 0\right\}$$

Q =	Q e'
{	l'insieme
m/n	dei numeri m fratto n
:	tali che
m ∈ Z	m e' un numero intero
n ∈ Z	n e' un numero intero
(n≠0)	e n e' diverso da zero

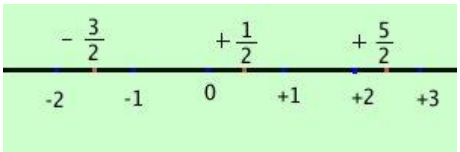
Q e'(Q =) l'insieme ({) dei numeri m fratto n (m/n) tali che (:) m e' un numero intero (m∈Z) n e' un numero intero (n∈Z) e n e' diverso da zero (n≠0).

Noticina storica

I numeri razionali non erano noti ai babilonesi che infatti per avere meno divisioni possibili inventarono un sistema di numerazione basato sul 12 (12 e' divisibile per 2, per 3, per 4, per 6) ed e' per questo che ancor oggi abbiamo 12 mesi, 60 minuti, 60 secondi, 360 gradi (tutti multipli di 12).
Invece erano noti (naturalmente senza segno) ai greci che li utilizzavano moltissimo, tra l'altro, anche per studiare musica.

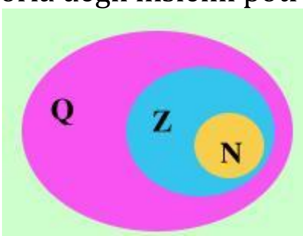
Una rappresentazione molto usata sara':

La retta dei numeri razionali



Facendo corrispondere ad ogni numero razionale un punto della retta (3 ad esempio puo' essere pensato 3/1 e quindi razionale)

Una rappresentazione mediante teoria degli insiemi potrebbe essere la seguente:



Z e' un sottoinsieme dell'insieme Q quindi i numeri che si corrispondono in Z ed in Q devono avere in Q le stesse proprieta' che avevano in Z.
In particolare, lo zero resta l'elemento neutro per l'addizione e l'elemento assorbente per la moltiplicazione, mentre l'uno e' l'elemento neutro per la moltiplicazione.

Un po' di nomenclatura

$$\frac{3}{5}$$

il 3 si chiama ***numeratore***
il 5 si chiama ***denominatore***

la linea tra numeratore e denominatore si chiama ***linea di frazione***
il tutto si chiama ***frazione***

Dobbiamo ora definire come operare in Q

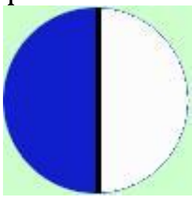
- equivalenza
- addizione
- sottrazione
- moltiplicazione
- divisione

3. Equivalenza fra numeri razionali

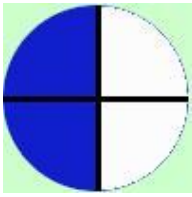
Abbiamo ora un insieme ove vi sono numeri che, anche se scritti in modo diverso, hanno lo stesso valore come ad esempio:

$$1/2 \quad 2/4 \quad 3/6 \quad 4/8 \quad 5/10 \quad .....$$

Senza scomodare la retta possiamo anche rappresentarli in questo modo:

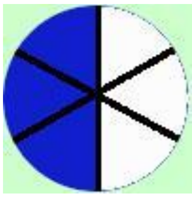
1/2 

1/2 significa che prendo una cosa, la divido in due parti e ne prendo la meta'

2/4 

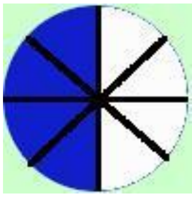
2/4 significa che prendo una cosa, la divido in quattro parti e ne considero due

---

3/6 

3/6 significa che prendo una cosa, la divido in sei parti e ne prendo tre

---

4/8 

4/8 significa che prendo una cosa, la divido in otto parti e ne considero quattro
Eccetera.......

Se ora ti dicessi: considera le frazioni equivalenti:

$$1/3 = 2/6 = 3/9 = ...$$

cosa ***metteresti al posto dei puntini***?

Se hai risposto 4/12 oppure 5/15 oppure 6/18 sei sulla buona strada: se dici come hai fatto a dire quei numeri allora quella e' la regola per trovare le frazioni equivalenti.

So che e' facile intuire mentre e' difficile esplicitare le regole: si tratta di trasformare l'intuizione in ragionamento, e questo e' uno degli scopi della matematica.

Scriviamo ora la regola di equivalenza fra le frazioni:

Due frazioni si dicono equivalenti se e' possibile trasformarle l'una nell'altra moltiplicando e dividendo numeratore e denominatore per lo stesso numero

Per numero intendiamo anche frazioni:

- per trasformare 2/4 in 4/8 basta moltiplicare numeratore (sopra) e denominatore (sotto) per 2:
- per trasformare 2/4 in 5/10 bisogna moltiplicare sopra e sotto per 5/2, cioe' moltiplicare per 5 e poi dividere per 2 sia al numeratore che al denominatore:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{10}{20} = \frac{10:2}{20:2} = \frac{5}{10} = \_\_\_\_\_\_$$

Allora visto che le frazioni equivalenti hanno lo stesso valore quando scrivero' una frazione scegliero' sempre la forma piu' semplice possibile dividendo numeratore e denominatore per lo stesso numero (ricordati che in matematica si sceglie sempre la strada piu' semplice), ad esempio se ho:

$$\frac{7}{14}$$

Divido numeratore e denominatore per sette, ottengo:

$$\frac{1}{2}$$

Si dice anche che ***riduciamo la frazione ai minimi termini.***

4. Somma fra numeri razionali

Ora dobbiamo definire come fare la somma fra due numeri razionali.
Dividiamo la somma nei due casi possibili.

- ***somma fra frazioni con lo stesso denominatore*** (*Scheda C3*)

Scheda C3:Somma di frazioni con lo stesso denominatore

Se le due frazioni hanno lo stesso denominatore, penso a delle fette; se divido piu' torte uguali ognuna in 5 parti e prendo una fetta dalla prima e poi due fette dalla seconda in totale ho preso tre fette.

Equivale a dire:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$$

Quindi posso dire:

Se le frazioni hanno lo stesso denominatore per fare la somma basta fare la somma dei numeratori

- ***somma fra frazioni con denominatore diverso*** (*Scheda C4*)

Scheda C4: Somma di frazioni con denominatore diverso

Vediamo come procedere se le frazioni non hanno lo stesso denominatore ad esempio su:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$$

So dalle frazioni equivalenti che:

$$\dots.=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}=\frac{8}{16}=\frac{9}{18}=\cdots$$

e che:

$$\dots.=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\frac{6}{18}=\frac{7}{21}=\cdots$$

Le frazioni hanno tutte lo stesso valore ma quelle in blu hanno lo stesso denominatore nel primo e nel secondo gruppo. Siccome prima, con lo stesso denominatore era facile fare la somma, sostituiamo le frazioni con due frazioni equivalenti che abbiano lo stesso denominatore, e, per semplicita', prenderemo il piu' piccolo (minimo comune multiplo fra i denominatori o minimo comune denominatore):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$$

Ricapitolando:

Se le frazioni non hanno lo stesso denominatore per fare la somma cerco due frazioni equivalenti che abbiano lo stesso denominatore poi faccio la somma come nel caso precedente

---

Di solito, per fare la somma piu' rapidamente si abbrevia nel seguente modo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$$

Il minimo comune multiplo fra 2 e 3 e' 6 quindi scrivo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{\quad}{6}$$

Ora faccio 6 diviso 2 , viene 3 e moltiplico 3 per il numeratore $3 \cdot 1 = 3$, lo scrivo sopra:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+}{6}$$

Ora faccio 6 diviso 3 , viene 2 e moltiplico 2 per il numeratore $2 \cdot 1 = 2$, lo scrivo sopra:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2+3}{6}$$

Eseguo la somma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$$

Naturalmente si scrive solo il passaggio qui sopra.

Posso riassumere entrambe i casi nella regola, per eseguire la somma fra numeri frazionari:

- *Se le due frazioni hanno lo stesso denominatore faccio la somma dei termini sopra (numeratori).*
- *Se le due frazioni non hanno lo stesso denominatore le trasformo in due frazioni equivalenti che abbiano lo stesso denominatore, poi procedo come sopra.*

---

5. Differenza fra numeri razionali

Per la differenza non c'e' molto da dire; valgono le stesse regole che abbiamo trovato per la somma.

6. Prodotto fra numeri razionali

Cerchiamo di fare il prodotto nel modo piu' semplice possibile; ad esempio se devo fare:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} =$$

moltiplichiamo sopra con sopra e sotto con sotto:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Regola: Per eseguire il prodotto fra numeri frazionari: moltiplico il numeratore con il numeratore e il denominatore con il denominatore.

7. Quoziente fra numeri razionali

Definiamo il quoziente come il prodotto fra la prima frazione e l'inverso della seconda:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} =$$

Rovescio la seconda frazione, semplifico sopra e sotto se possibile (in questo caso semplifico il 2 con il 4 e mi restano 1 e 2), ed infine moltiplico:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

Regola: Per eseguire la divisione fra frazioni: moltiplico la prima frazione per l'inverso della seconda

8. Potenza intera di numeri razionali

Per eseguire la potenza di una frazione basta considerare che la potenza e' un prodotto:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

e siccome moltiplico la base tante volte quant'e' l'esponente, allora equivale a fare la potenza sia sopra che sotto.

Regola: Per eseguire la potenza intera fra frazioni: eseguo la potenza sia al numeratore che al denominatore

9. Espressioni con numeri razionali

Rimandando la pubblicazione di un congruo numero di esercizi alla seconda stesura del sito enunciamo qui alcune regole generali per risolvere le espressioni:

- Prima si deve leggere con attenzione tutta l'espressione (magari ricopiandola sul quaderno) decidendo quali operazioni eseguire prima.
- Se esistono delle parentesi prima si eseguono le operazioni dentro le parentesi tonde, finche' non otteniamo un solo numero, dopo di che toglieremo le parentesi tonde.

- Se esistono delle parentesi quadre ora dovremo eseguire le operazioni dentro le parentesi quadre, finche' non otteniamo un solo numero, dopo di che toglieremo le parentesi quadre.
- Se esistono parentesi graffe dovremo eseguire le operazioni dentro le parentesi graffe, finche' non otteniamo un solo numero, dopo di che toglieremo anche le parentesi graffe.
- Dentro ogni parentesi tra le varie operazioni hanno la precedenza l'elevamento a potenza, il prodotto ed il quoziente .
- Somme e differenze si fanno dentro la parentesi quando hai finito tutte le operazioni precedenti.

Esercizio svolto (con tutti i passaggi: tu puoi abbreviare)

$$\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{2}\right)^2:\left(\frac{9}{7}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)+\frac{8}{3}:\left(-\frac{4}{15}\right)\right]\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)^2=$$

Devo risolvere prima dentro le parentesi tonde.
Nella prima terza e quinta parentesi tonda devo fare le somme algebriche (per somme algebriche si intendono sia le somme che le differenze):

- prima parentesi m.c.m. = 14
- seconda parentesi m.c.m. = 3
- terza parentesi m.c.m. = 3

$$=\left(\frac{4-1-21}{14}\right)^2:\left(\frac{9}{7}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6-2}{3}\right)+\frac{8}{3}:\left(-\frac{4}{15}\right)\right]\cdot\left(\frac{2-3}{3}\right)^2=$$

Sommo e semplifico la prima frazione

$$=\left(-\frac{\cancel{18}9}{\cancel{14}7}\right)^2:\left(\frac{9}{7}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{8}{3}:\left(-\frac{4}{15}\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=$$

Eseguo i quadrati ricordando che il risultato di un quadrato e' sempre positivo (ormai nelle parentesi tonde c'e' solo un termine quindi possiamo cominciare ad eseguire le operazioni esterne, la potenza e' la prima da fare):

$$=\left(\frac{81}{49}\right):\left(\frac{9}{7}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{8}{3}:\left(-\frac{4}{15}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=$$

Trasformiamo i quozienti in prodotti rovesciando le frazioni:

$$=\left(\frac{81}{49}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=$$

Eseguiamo le moltiplicazioni entro parentesi quadre ricordando che posso semplificare numeratori e denominatori:

$$=\left(\frac{81}{49}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left[\frac{1}{\cancel{2}1}\cdot\left(\frac{\cancel{4}2}{3}\right)+\frac{\cancel{8}2}{\cancel{3}1}\cdot\left(-\frac{\cancel{15}5}{\cancel{4}1}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{81}{49}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left[\frac{2}{3}-10\right]\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=$$

Ora faccio il m.c.m. dentro parentesi quadra per sommare:

$$=\left(\frac{81}{49}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left[\frac{2-30}{3}\right]\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=$$

Sommo:

$$=\left(\frac{81}{49}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left[-\frac{28}{3}\right]\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=$$

Ora, per moltiplicare, semplifico i numeratori con i denominatori ed ottengo:

$$=\left(\frac{\cancel{81}1}{\cancel{49}1}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{7}1}{\cancel{9}1}\right)\cdot\left[-\frac{\cancel{28}4}{3}\right]\cdot\left(\frac{1}{\cancel{9}1}\right)=-\left(\frac{4}{3}\right)$$

10. Esistenza di numeri non razionali e necessita' di ampliare l'insieme Q

Sin dai primordi i numeri razionali furono usati per misurare, ma gia' dal quinto secolo avanti Cristo ci si accorse che esistevano grandezze la cui misura non poteva essere rappresentata da un numero razionale:

- la misura della diagonale di un quadrato rispetto al suo lato
- la misura della circonferenza rispetto al suo diametro
- la misura della diagonale di un cubo rispetto al suo lato

Si ebbe quindi la necessita' di definire un nuovo insieme di numeri, il problema pero' fu come fare a definire quei nuovi numeri partendo dai numeri gia' noti, cioe' i numeri razionali?
Il problema fu risolto solamente nel 1876 da Dedekind.

Segui tutto il ragionamento leggendo in geometria:

Teoria della misura

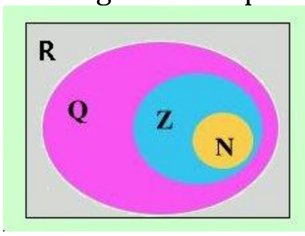
D. *Insieme **R** dei Numeri Reali*

1. Definizione di numero reale

Definiamo **Numero Reale** l'elemento separatore di due classi contigue di numeri razionali. Ci accorgiamo subito che esistono due tipi di numeri reali:

- i **numeri reali razionali** cioe' i numeri reali che possono essere espressi anche come numeri razionali come ad esempio 3.
- i **numeri reali non razionali** cioe' i numeri reali che non possono essere espressi anche come numeri razionali come ad esempio $\sqrt{2}$

Una rappresentazione mediante teoria degli insiemi potrebbe essere la seguente:



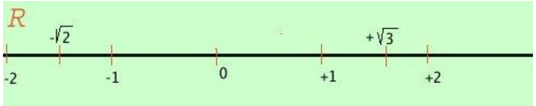
Z e' un sottoinsieme dell'insieme R, quindi i numeri che si corrispondono in Z ed in R devono avere in R le stesse proprieta' che avevano in Z; *in particolare lo zero resta l'elemento neutro per l'addizione e l'elemento assorbente per la moltiplicazione, mentre l'uno e' l'elemento neutro per la moltiplicazione.*

2. L'insieme R dei numeri reali: la retta reale

Facciamo ora la conoscenza di un ente che ci accompagnera' lungo tutta l'analisi matematica e la geometria cartesiana: la retta reale ***R .***

In questa retta ad ogni punto corrisponde un numero reale e ad ogni numero reale corrisponde un punto.

Cioe' esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti della retta ed i numeri reali:



C'e' da dire che i numeri reali non razionali saranno molti di piu' dei numeri reali razionali: addirittura avremo che mentre i numeri razionali, per quanto infiniti sono **un'infinita' numerabile** *(L'insieme dei numeri razionali e' un'infinita' numerabile significa che e' possibile impostare una corrispondenza biunivoca fra i numeri razionali ed i numeri interi, facendo corrispondere ad ogni numero razionale un numero intero, anche se la cosa puo' sembrare strana. Scherzi dell'infinito!! l'infinito e' una brutta bestia che va presa con molta circospezione),* i numeri reali sono un'infinita' non numerabile e , siccome rappresentandoli su una retta, fra un numero e l'altro non esiste piu' spazio, si parlera' di **continuo.**

3. Somma fra numeri reali

Diamo ora alcune definizioni sulle operazioni con numeri reali.

Definiamo somma c dei numeri reali a e b:

$$c = a + b$$

il numero reale che ha come classe inferiore la somma delle classi inferiori di a e di b e come classe superiore la somma delle classi superiori di a e b.

Vuol dire solo che, se devo sommare 3 e 4, basta che prendo le classi che definiscono 3 e le classi che definiscono 4.
Sommando la classe inferiore di 3 con la classe inferiore di 4 otterro' la classe inferiore di 7; sommando la classe superiore di 3 con la classe superiore di 4 otterro' la classe superiore di 7 .

Sommare una classe con un'altra significa sommare ogni numero della prima classe con ogni numero della seconda classe.

In pratica si procede nel solito modo: se i numeri sono sommabili li sommo, altrimenti indico la somma con le solite regole dei polinomi:

$$3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 4 + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

4. Differenza fra numeri reali

Definiamo differenza c dei numeri reali a e b:

$$c = a - b$$

Il numero reale che ha come classe inferiore la differenza delle classi inferiori di a e di b e come classe superiore la differenza delle classi superiori di a e b.

Vuol dire solo che, se devo fare la differenza fra 3 e 4, basta che prendo le classi che definiscono 3 e le classi che definiscono 4; facendo la differenza fra la classi inferiore di 3 e la classe inferiore di 4 otterro' la classe inferiore di -1 .
Facendo la differenza fra le classe superiore di 3 e la classe superiore di 4, otterrò la classe superiore di -1 .
Fare la differenza di una classe con un'altra significa sottrarre da ogni numero della prima classe ogni numero della seconda classe.

In pratica si procede nel solito modo: se i numeri sono sommabili li sommo, altrimenti indico la somma con le solite regole dei polinomi:

$$3 - 1 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} = 2 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

5. Prodotto fra numeri reali

Qui dobbiamo distinguere fra numeri entrambe positivi e gli altri casi perche' altrimenti avremmo problemi sui segni dei numeri appartenenti alle classi inferiori e superiori.

Definiamo prodotto c dei numeri reali positivi a e b:

$$c = a \cdot b$$

il numero reale che ha come classe inferiore l'insieme dei numeri razionali negativi, lo zero ed il prodotto dei soli numeri positivi delle classi inferiori di a e di b e come classe superiore il prodotto delle classi superiori di a e b.

Vuol dire solo che, se devo fare il prodotto fra 3 e 4, basta che prendo i numeri negativi, lo zero e poi faccio il prodotto fra i numeri positivi della classe inferiore di 3 e i numeri positivi della classe inferiore di 4; in questo modo ottengo la classe inferiore di 12.
Facendo il prodotto fra le classe superiore di 3 e la classe superiore di 4 otterro' la classe superiore di 12.

Definiamo invece prodotto di due numeri reali a e b non entrambe positivi:

- il prodotto dei loro moduli (*Scheda D1*) se i due numeri sono entrambe negativi
- il prodotto dei loro moduli cambiato di segno se i numeri sono uno positivo ed uno negativo

---

In pratica procedo con le solite regole dei polinomi: $2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{6}$

Scheda D1 - Definizione di modulo

Dobbiamo definire che un qualcosa e' sempre positivo, quindi se e' positivo va bene mentre se e' negativo dovro' cambiargli il segno per farlo diventare positivo.
Definizione:
Si definisce modulo di x e si scrive | x |

- lo stesso x se x e' positivo
- x cambiato di segno se x e' negativo

In simboli:

- $|x| = x$ se $x > 0$
- $|x| = -x$ se $x < 0$

Non c'e' bisogno di dire che | 0 | non ha nessun significato (anche perche' 0 e' l'unico numero senza segno); vedi anche il modulo nei radicali.

---

6. Quoziente fra numeri reali

Per il quoziente ci limitiamo a definire l'operazione come operazione inversa del prodotto su numeri reali.

Definiamo quoziente c dei numeri reali a e b:

$$c = \frac{a}{b} \quad \text{con } b \neq 0$$

il numero reale c che moltiplicato per b mi restituisce a:

$$c = b \cdot a$$

Vuol dire solo che, se devo fare il prodotto fra 6 e -2 , devo trovare quel numero che moltiplicato per -2 mi da' come risultato 6.

7. Elevamento a potenza

Consideriamo sempre la base come numero reale:

- esponente intero
- esponente razionale
- esponente reale

a) Potenza fra numeri reali con esponente intero

Qui e' molto semplice: se l'esponente e' positivo posso definire la potenza come il prodotto della base tante volte quant'e' l'esponente:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a \cdot a \qquad \text{n volte}$$

Se l'esponente e' negativo, allora basta ricordarsi dell'uguaglianza:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(2\sqrt{3}\right)^3 = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{27} = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

b) Potenza fra numeri reali con esponente razionale

Se l'esponente e' razionale allora ricordiamo che un numero razionale e' il rapporto fra due numeri interi; inoltre, in presenza di radicali faremo riferimento alle formule:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Quindi possiamo rifarci a potenze con esponente intero.

$$\left(\sqrt{3}\right)^{2/3} = \sqrt{(3)^{2/3}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$$

c) Potenza fra numeri reali con esponente reale

Dobbiamo studiare a^r con a ed r numeri reali.
Qui dobbiamo distinguere tre casi diversi:

$a > 1$

Se la base e' maggiore di 1 allora possiamo procedere come nel caso del prodotto (ricorda che la potenza e' un prodotto ripetuto):

- ***Come classe inferiore della potenza prenderemo l'insieme dei numeri razionali negativi, il numero zero ed i numeri che si ottengono elevando i numeri positivi della classe inferiore di a all'esponente dato dai numeri positivi della classe inferiore di r.***
- ***Come classe superiore prenderemo i numeri della classe superiore di a elevati ai numeri della classe superiore di r***

$0 < a < 1$

Qui abbiamo il problema che elevando un numero inferiore ad 1 a potenza crescente il risultato diminuisce, quindi dobbiamo scambiare i numeri positivi della classe superiore con i numeri positivi della classe inferiore cioe':

- ***Come classe inferiore della potenza prenderemo l'insieme dei numeri razionali negativi, il numero zero ed i numeri che si ottengono elevando i numeri positivi della classe superiore di a all'esponente dato dai numeri positivi della classe superiore di r***
- ***Come classe superiore prenderemo i numeri della classe inferiore di a elevati ai numeri della classe inferiore di r***

$a < 0$

In questo caso non possiamo definire la potenza:

- ***La potenza reale non razionale di un numero reale negativo non e' definita***

In pratica, per i calcoli, non ce ne importa niente perche' vedremo in analisi che e' possibile sostituire ad un numero il suo limite e quindi possiamo approssimare quanto vogliamo la potenza ad esponente reale con la potenza ad esponente razionale

---

Definiamo anche i casi particolari:

$$1^r = 1$$
$$0^r = 0$$
$$0^0 = 1$$

8. Estrazione di radice e necessita' di ampliare l'insieme R

Definiamo l'estrazione di radice come operazione inversa dell'elevamento a potenza

---

Pero' qui sorge un problema; se ho:

$$\sqrt{(-25)}$$

Non posso fare la radice perche' non esiste nessun numero reale che elevato al quadrato mi dia -25; infatti:

$$(+5)\cdot(+5) = +25$$
$$(-5)\cdot(-5) = +25$$

quindi la radice non e' un'operazione interna nel campo dei numeri reali.
Per poter eseguire sempre la radice dovremo prendere ancora un nuovo insieme di numeri:

L'insieme dei numeri Complessi

E. Numeri immaginari e complessi

Finora abbiamo detto che la radice quadrata di un numero negativo e' impossibile da fare perche' non esiste nessun numero reale che elevato al quadrato dia un risultato negativo.
In matematica pero' e' impossibile mettere dei vincoli, sarebbe come mettere dei vincoli al pensiero.
Se non esistono numeri reali e' pero' possibile che esistano numeri di altro tipo, tali che il loro quadrato sia un numero negativo.
Va a merito degli algebristi italiani del seicento aver immaginato tali numeri, da loro chiamati appunto numeri immaginari.
Oggi questi numeri sono usatissimi sia in fisica che nelle altre scienze sperimentali.

- numeri immaginari
- numeri complessi

1. Numeri immaginari

Considero:

$$\sqrt{(-25)}$$

Non posso fare la radice perche' non esiste nessun numero reale che elevato al quadrato mi dia -25.
Qual'e' la causa di disturbo? Evidentemente il segno meno; allora potrei fare la radice se non andassi a disturbare il segno meno.
Isolo il segno meno:

$$\sqrt{(-1 \cdot 25)}$$

Per come ho definito il ***prodotto fra radicali*** (vedere) posso fare:

$$\sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{25}$$

$\sqrt{(-1)}$ non la risolvo e mi limito a chiamarla **i** (iniziale di immaginario)
$\sqrt{(25)}$ la risolvo normalmente e vale $\pm \mathbf{5}$
Quindi posso scrivere:

$$\sqrt{(-25)} = \pm \mathbf{5i}$$

Un numero seguito dalla **i** si dice **numero immaginario**. Vediamo le proprietà di **i**:

a) Proprieta' di i

Il numero $i = \sqrt{(-1)}$ e' l'unita' immaginaria.
Rispetto al prodotto e' ciclica, cioe' dopo un certo numero (4) di passaggi si ripete:

- $i = \sqrt{(-1)}$
- $i^2 = i \cdot i = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = i$

e cosi' via di seguito;

Vedremo che questa ciclicita' dei numeri immaginari ci permettera' di utilizzare i numeri complessi per i fenomeni di rotazione.

---

2. Numeri complessi

I numeri complessi si incontrano in matematica quando si vanno a risolvere equazioni di secondo grado con discriminante minore di zero.

a) Definizione

Un numero si dice **complesso** quando e' formato da un numero reale piu' (o meno) un numero immaginario. Esempio:

$$3 + 2i$$

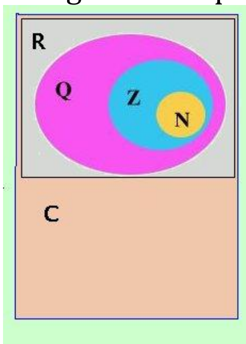
e' un numero complesso.

Siccome di solito un numero complesso deriva dalla soluzione di un'equazione di secondo grado le radici dell'equazione saranno due e differiranno per il segno fra il numero reale e il numero immaginario, come ad esempio:

$$3 \pm 2i$$

In tal caso i due numeri complessi si dicono **coniugati**.

Una rappresentazione mediante teoria degli insiemi potrebbe essere la seguente:



b) Operazioni sui numeri complessi

Dobbiamo ora definire le quattro operazioni sui numeri complessi.

(1) Somma

Per la somma ci rifaremo sempre alle regole studiate nei monomi considerando i come parte letterale:
Esempio: sommare i due numeri complessi:
$Z_1 = 2 + 3i$ e $Z_2 = 4 + 5i$
Sommero' algebricamente (*Scheda n. E1*)la parte reale con la parte reale e la parte immaginaria con la parte immaginaria:
$Z_1 + Z_2 = 2 + 3i + 4 + 5i = 6 + 8i$

Altro esempio; sommare i due numeri complessi:
$Z_1 = -7 - 4i$ e $Z_2 = 3 - 5i$
Anche qui, parte reale con parte reale, parte immaginaria con parte immaginaria:
$Z_1 + Z_2 = -7 - 4i + 3 - 5i = -4 - 9i$

Scheda n. E1

Sommare algebricamente due termini significa:
se hanno lo stesso segno faccio la somma e metto il segno che hanno:
$+3 + (+4) = +7$ $-3 + (-4) = -7$
se hanno segno contrario faccio la differenza e metto il segno del maggiore:
$+3 + (-4) = -1$ $-3 + (+4) = +1$

---

(2) Differenza

Per la differenza bastera' procedere nel solito modo: cambieremo di segno i termini dopo l'uguale e procederemo a fare la somma algebrica della parte reale con la parte reale e della parte immaginaria con la parte immaginaria.
Esempio: calcolare la differenza fra i due numeri complessi:
$Z_1 = 2 + 3i$ e $Z_2 = 4 + 5i$
$Z_1 - Z_2 = 2 + 3i - (4 + 5i) = 2 + 3i - 4 - 5i = -2 -2i$

Altro esempio; calcolare la differenza fra i due numeri complessi:
$Z_1 = -7 - 4i$ e $Z_2 = 3 - 5i$
Anche qui cambio di segno poi parte reale con parte reale e parte immaginaria con parte

immaginaria:

$Z_1 - Z_2 = -7 - 4i - (3 - 5i) = -7 - 4i - 3 + 5i = -10 + i$

(3) Prodotto

Anche per il prodotto ci rifaremo sempre alle regole studiate nei *polinomi* considerando i come parte letterale e ricordando che $i^2 = -1$:

Esempio: moltiplicare i due numeri complessi:

$Z_1 = 2 + 3i$ e $Z_2 = 4 + 5i$

$Z_1 \cdot Z_2 = (2 + 3i)\cdot(4 + 5i) = 8 + 10i + 12i + 15\, i^2 =$

$= 8 + 10i + 12i - 15 = -7 + 22i$

Altro esempio;eseguire la moltiplicazione fra i due numeri complessi:

$Z_1 = -7 - 4i$ e $Z_2 = 3 - 5i$

$Z_1 \cdot Z_2 = (-7 - 4i)\cdot(3 - 5i) = -21 + 35i - 12i + 20\, i^2 =$

$= -21 + 35i - 12i - 20 = - 41 + 23i$

(4) Quoziente

Per capire come funziona il quoziente basta considerare che $i = \sqrt{(-1)}$

Quindi un numero complesso al denominatore sara' da trattare come abbiamo trattato la razionalizzazione e precisamente la razionalizzazione a due termini; in tal modo il quoziente si ridurra' ad un prodotto perche' sparira' la radice al denominatore .

Esempio:

Eseguire la divisione fra i due numeri complessi:

$Z_1 = 4 + 3i$ e $Z_2 = 3 - 2i$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{4 + 3i}{3 - 2i} =$$

Razionalizzo, cioe' moltiplico sopra e sotto per il denominatore con il segno in mezzo cambiato:

$$= \frac{4 + 3i}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} =$$

Ora moltiplico:

al numeratore e' una moltiplicazione normale; al denominatore e' un prodotto notevole:

$$= \frac{12 + 8i + 9i + 6i^2}{9 - 4i^2} = \frac{12 + 8i + 9i - 6}{9 + 4} = \frac{16 + 17i}{13}$$

Il risultato e' il numero complesso:

$$\frac{6}{13} + \frac{17i}{13}$$

Esempio:

Eseguire la divisione fra i due numeri complessi:

$Z_1 = 3 - 2i$ e $Z_2 = 2 + i$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{3 - 2i}{2 + i} =$$

Razionalizzo, cioe' moltiplico sopra e sotto per il denominatore con il segno in mezzo cambiato:

$$\frac{3-2i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=$$

Ora moltiplico:

al numeratore e' una moltiplicazione normale; al denominatore e' un prodotto notevole:

$$=\frac{16-3i-4i+2i^2}{4-4i^2}=\frac{6-3i-4i-2}{4+1}=\frac{4-7i}{5}$$

Il risultato e' il numero complesso:

$$\frac{4}{5}-\frac{7i}{5}$$

c) Il piano complesso

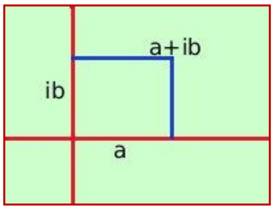
Sul piano complesso potremo considerare alcune interessanti proprieta' per i numeri complessi.

(1) Il piano complesso

Considero il numero complesso $a+ib$

I numeri a e b sono numeri reali e come tali possono essere rappresentati su una retta.

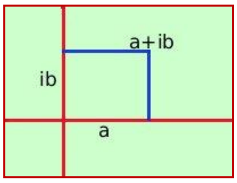
Possiamo rappresentare geometricamente i numeri complessi utilizzando un piano: il cosiddetto **PIANO COMPLESSO**, rappresentando in orizzontale i valori reali a e in verticale i valori immaginari ib .



---

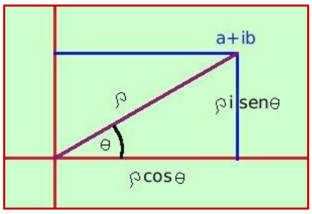
(2) Forma trigonometrica dei numeri complessi

Considero il numero complesso $a+ib$



Sul piano complesso posso tracciare una circonferenza con raggio la distanza del numero complesso dall'origine.

In tal modo i numeri a e b sono proporzionali (*Scheda n.E2*) al seno ed al coseno dell'angolo θ formato dall'asse delle x e dal segmento che congiunge il numero complesso con l'origine.



Valgono le relazioni:

$\rho=\sqrt{(a^2+b^2)}$ Nota: (*Scheda n. E3*)

$a = \rho \cos\theta$
$b = \rho\ \text{sen}\ \theta$
Quindi avremo la forma trigonometrica per il numero complesso. Calcolo: (*Scheda n. E4*)
$a + ib = \rho(\cos\theta + i\ \text{sen}\theta)$

Vediamo ora come si passa dalla forma normale alla forma trigonometrica e viceversa

1. Trasformare un numero complesso dalla forma normale alla forma trigonometrica
2. Trasformare un numero complesso dalla forma trigonometrica alla forma normale

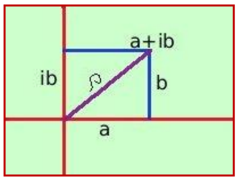
---

Scheda n. E2

Proporzionali perche' il raggio della circonferenza e' uguale alla distanza **ρ** del punto dall'origine degli assi
Saranno uguali quando la circonferenza ha raggio 1 (cioe' la distanza dall'origine del numero complesso vale 1)

Scheda n. E3

Per ottenere la relazione basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo di lati a, b e ρ
Essendo ρl'ipotenusa avro':
$\rho^2 = a^2 + b^2$
e quindi estraendo la radice:
$\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)}$



Scheda n. E4

Essendo
$a = \rho \cos\theta$
$b = \rho\ \text{sen}\theta$
Avremo
$a + ib = \rho\cos\theta + i\ \rho\ \text{sen}\theta$
raccolgo ρed ottengo
$a+ib = \rho\ (\cos\theta + i\ \text{sen}\theta)$

(a) *Trasformare un numero complesso dalla forma normale alla forma trigonometrica*

Per trasformare il numero dalla forma tipica alla forma trigonometrica devo tener presenti le formule:

- $\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)}$
- $a = \rho\cos\theta \qquad b = \rho\ \text{sen}\theta$
  Faccio il rapporto:
  $$\frac{b}{a} = \frac{\rho\ \text{sen}\theta}{\rho\ \text{sen}\theta} = \text{tang}\theta$$
  quindi
  $$\text{tang}\theta = \frac{b}{a}$$

Vediamo il procedimento su un paio di esempi:

Considero il numero complesso:
$z = a + ib = 1 + i$
Per trasformarlo in forma trigonometrica:
$z = \rho(\cos\theta + i\ \text{sen}\theta)$
Devo trovare il valore di ρ e θ

- Dalla relazione
  $\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)}$
  ho:
  $a = 1 \quad b = 1$
  Quindi:
  $\rho = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$
- Dalle relazioni:
  $a = \rho \cos\theta \qquad b = \rho \text{ sen } \theta$
  ottengo:
  $\frac{b}{a} = \frac{\rho \text{ sen}\theta}{\rho \text{ sen}\theta} = \text{tang}\theta$
  Quindi:
  $\text{tang } \theta = 1/1 = 1$
  L'angolo minore la cui tangente vale 1 e' 45° o preferibilmente $\pi/4$

ottengo:

$z = 1 + i = \sqrt{(\cos \pi/4 \ + \ \text{i sen } \pi/4\,)}$

Considero il numero complesso:

$z = a + ib = 3 + i\sqrt{3}$

Devo trasformarlo in forma trigonometrica:

$z = \rho\,(cos\theta + i\ sen\theta)$

Dalla relazione:

$\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

ho:

$a = 3 \quad b = \sqrt{3}$

Quindi:

$$\rho = \sqrt{\left[3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2\right]} = \sqrt{(9 + 3)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

- Dalla relazione:
  $\text{tang}\theta = \frac{b}{a}$
  Ho
  $\text{tang}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

L'angolo minore la cui tangente vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e' 30° o preferibilmente $\pi/6$;

ottengo:

$z = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3(\cos \pi/6 \ + \ \text{i sen } \pi/6\,)}$

(b) *Trasformare un numero complesso dalla forma trigonometrica alla forma normale*

Anche per trasformare il numero dalla forma trigonometrica alla forma normale devo tener presenti le due formule precedenti:

$\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

$$\text{tang}\theta = \frac{b}{a}$$

o meglio, trasformiamole in:

$$a^2+b^2 = \rho^2$$

$$b = a \text{ tang } \theta$$

Risolvendo il sistema fra le due relazioni trovero' il valore di a e b.
Vediamo come procedere su un paio di esempi (gli inversi della pagina precedente)

Considero il numero complesso in forma trigonometrica:

$$z = \sqrt{2(\cos \pi/4 \ + \ i \text{ sen } \pi/4 \,)}$$

So che:

$\rho = \sqrt{2}$ e quindi $\rho^2 = 2$

inoltre:

$\theta = \pi/4$ e quindi $\text{tang } \theta = 1$

Devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \rho^2 \\ b = \text{tang}\theta \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ b = a \end{cases}$$

Sostituisco a b nella prima equazione il valore a:

$$\begin{cases} a^2 + a^2 = 2 \\ b = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 = 2 \\ b = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 = 2 \\ b = a \end{cases}$$

Divido la prima equazione per 2:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b = a \end{cases}$$

Estraggo la radice:

$$\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = a \end{cases}$$

Ottengo le due soluzioni:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Ma il numero complesso che mi interessa e' nel primo quadrante perche' l'angolo di partenza e' $\pi/4$; quindi, poiche' nel primo quadrante le coordinate devono essere entrambe positive, scegliero':

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

e il numero complesso sara':

$$z = a + ib = 1 + i$$

Considero il numero complesso in forma trigonometrica:

$$z = 2\sqrt{3(\cos \pi/6 \; + \; i \operatorname{sen} \pi/6 \,)}$$

So che:

$\rho = 2\sqrt{3}$ e quindi $\rho^2 = 12$

Inoltre:

$\theta = \pi/6$ e quindi $\operatorname{tang}\theta = \sqrt{3/3}$

Devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \rho^2 \\ b = \operatorname{tang}\theta \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 12 \\ b = a\sqrt{3/3} \end{cases}$$

Faccio il minimo comune multiplo al denominatore nella seconda equazione:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 12 \\ 3b = a\sqrt{3} \end{cases}$$

Divido per $\sqrt{3}$ entrambi i termini della seconda equazione:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 12 \\ b\sqrt{3} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 12 \\ a = b\sqrt{3} \end{cases}$$

Sostituisco ad a nella prima equazione il valore $b\sqrt{3}$:

$$\begin{cases} \left(b\sqrt{3}\right)^2 + b^2 = 12 \\ a = b\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b^2 + b^2 = 12 \\ a = b\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2 = 12 \\ a = b\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = 3 \\ a = b\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm\sqrt{3} \\ a = b\sqrt{3} \end{cases}$$

Sostituisco nella seconda:

$$\begin{cases} b = \pm\sqrt{3} \\ a = \pm\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \end{cases}$$

Ottengo le due soluzioni:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Ma il numero complesso che mi interessa e' nel primo quadrante perche' l'angolo di partenza e' $\pi/6$; quindi, poiche' nel primo quadrante le coordinate devono essere entrambe positive, scegliero':

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$$

e il numero complesso sara':

$$z = a + ib = 3 + i\sqrt{3}$$

(3) Prodotto di numeri complessi sotto forma trigonometrica

Considero i numeri complessi:

$z_1 = a + ib = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$

$z_2 = c + id = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$

Quando i numeri complessi sono in forma trigonometrica diventa molto facile eseguire il prodotto; infatti si ha la

Regola:

Per eseguire il prodotto fra due numeri complessi in forma trigonometrica basta moltiplicare fra loro i moduli ρ_1 e ρ_2 e sommare gli angoli θ_1 e θ_2 cioe'

$$\rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} \theta_1 + \theta_2)]$$

Di seguito, la dimostrazione della formula.

Da notare che il prodotto fra duennumeri complessi si trasforma per il primo numero complesso in una traslazione (meglio omotetia) moltiplicando per ρ ed in una rotazione sommando il secondo angolo; quindi i numeri complessi saranno gli oggetti migliori per poter studiare problemi che coinvolgano rotazioni e traslazioni.

(a) Dimostrazione: prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica

Considero i numeri complessi:

$$z_1 = a + ib = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$$

$$z_2 = c + id = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

Per trovare la regola eseguiamo il prodotto termine a termine:

$$z_1 \cdot z_2 = [\rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)] \cdot [\rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)] =$$

$$= \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_1) =$$

Poiche' $i^2 = -1$ ottengo:

$$= \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_1) =$$

Raggruppo le parti reali e le parti immaginarie:

$$= \rho_1 \rho_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_1) + (i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)] =$$

$$= \rho_1 \rho_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_1) + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos\theta_2)] =$$

Dentro la prima parentesi l'espressione e' il coseno della somma di due angoli
Dentro la seconda parentesi l'espressione e' il seno della somma di due angoli
Quindi posso scrivere:

$$= \rho_1\rho_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} \theta_1 + \theta_2)]$$

(4) Quoziente di numeri complessi in forma trigonometrica

La regola che vale per il prodotto varra' analogamente per il quoziente (ricorda che una salita vista dall'altra parte e' una discesa).

Considero i numeri complessi:

$z_1 = a + ib = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\theta_1)$

$z_2 = c + id = \rho_2 (\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\theta_2)$

Quando i numeri complessi sono in forma trigonometrica per eseguire il quoziente si ha la

Regola:

Per eseguire il quoziente fra due numeri complessi in forma trigonometrica basta dividere fra loro i moduli ρ_1 e ρ_2 e sottrare gli angoli θ_1 e θ_2 cioe'

$\rho_1 (\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\theta_1) : \rho_2 (\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\theta_2) =$

$= \rho_1/\rho_2 [\cos(\theta_1\text{-}\theta_2) + i\ \text{sen}\ \theta_1\text{-}\theta_2)]$

Di seguito, troverai la dimostrazione della formula.

(a) *Dimostrazione: quoziente di numeri complessi in forma trigonometrica*

Considero i numeri complessi:

$z_1 = a + ib = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\ \theta_1)$

$z_2 = c + id = \rho_2 (\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\ \theta_2)$

Per trovare la regola eseguiamo il quoziente secondo la regola gia' trovata per i numeri in forma canonica:

$$\frac{Z_1}{Z_1} = \frac{\rho_1 (\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\ \theta_1)}{\rho_2 (\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\ \theta_2)} =$$

Razionalizzo, cioe' moltiplico sopra e sotto per il denominatore con il segno in mezzo cambiato (solo la parte dentro parentesi):

$$= \frac{\rho_1 (\cos\theta_1 + i\ \text{sen}\ \theta_1)}{\rho_2 (\cos\theta_2 + i\ \text{sen}\ \theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i\ \text{sen}\ \theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\ \text{sen}\ \theta_2)} =$$

Eseguo i calcoli: al numeratore devo fare il prodotto normale, al denominatore e' un prodotto notevole:

$$= \frac{\rho_1 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - i\cos\theta_1 \text{sen}\theta_2 + i\ \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - i^2 \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2)}{\rho_2 (\cos^2\theta_2 - i^2\ \text{sen}^2\ \theta_2)} =$$

Ricordando che $i^2 = -1$ posso scrivere:

$$= \frac{\rho_1 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - i\cos\theta_1 \text{sen}\theta_2 + i\ \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2)}{\rho_2 (\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\ \theta_2)} =$$

Al numeratore raggruppo le parti reali e le parti immaginarie e poiche' per la prima relazione fondamentale della trigonometria si ha:

$\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2 = 1$ posso scrivere:

$$= \frac{\rho_1 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2) + i(\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \text{sen}\theta_2)}{\rho_2} =$$

Dentro la prima parentesi l'espressione e' il coseno della differenza di due angoli

Dentro la seconda parentesi l'espressione e' il seno della differenza di due angoli

Quindi posso scrivere:

$= \rho_1/\rho_2\, [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \,\text{sen}\, \theta_1 - \theta_2)]$

(5) Potenza di numeri complessi in forma trigonometrica (formula di Moivre)

Poiche' la potenza non e' altro che il prodotto ripetuto piu' volte dello stesso termine, e' semplice trovare la formula che regola l'elevamento a potenza di un numero complesso, dato il numero complesso in forma trigonometrica:

$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$

La sua potenza intera **n** e':

$(z)^n = \rho^n (\cos n\theta + i \,\text{sen}\, n\theta)$

cioe':

Per fare la potenza **n** devi elevare ad **n** il modulo **ρ** e devi moltiplicare l'angolo **θ** per **n**

Esempio:

Calcoliamo la potenza 6 del numero complesso:

$z = \sqrt{2(\cos 6\pi/4 \ + \ i \,\text{sen}\, 6\pi/4\,)}$

Applico la formula:

$z^6 = (\sqrt{2})^6 (\cos 6\pi/4 \ + \ i \,\text{sen}\, 6\pi/4\,) \ = 8\,(\cos 3\pi/2 \ + \ i\,\text{sen}\, 3\pi/2\,)$

(6) Radice n-sima di un numero complesso

Per calcolare la radice n-esima di un numero complesso dovremo rifarci alla formula inversa dell'elevamento a potenza.

Per quanto riguarda ρ non c'e' nessun problema.

Invece i problemi sorgono per determinare l'angolo θ: infatti quando eleviamo a potenza un angolo noi eseguiamo una rotazione e quanto piu' e' elevata la potenza ed e' ampio l'angolo tanti piu' giri fara' l'angolo risultante.

Teniamo inoltre presente che per il teorema fondamentale dell'algebra una radice n-sima dovra' avere n soluzioni.

In pratica dovremo trovare n valori per l'angolo θ; allora otterremo:

- il primo angolo θ_1 considerando l'angolo risultante nel primo giro
- il secondo angolo θ_2 considerando l'angolo risultante nel secondo giro
- il terzo angolo θ_3 considerando l'angolo risultante nel terzo giro

  ....
- l'n-simo angolo θ_n considerando l'angolo risultante nell'n-simo giro.

Se considerassi un giro in piu' ritroverei il primo angolo; ricordiamoci che le funzioni trigonometriche sono periodiche.

Con queste considerazioni avremo che dato il numero complesso:

$z = \rho\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$

le sue radici n-sime saranno:

$$(\sqrt[n]{Z})_k = \sqrt[n]{\rho\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$$

Con $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$

Come accennato prima se continuassi a prendere altri valori oltre questi troverei ancora le stesse radici

---

Un esercizio chiarira' meglio il metodo:

Trovare le radici quarte del numero complesso:

$$z = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

Applichiamo la formula:

$$\left(\sqrt[4]{Z}\right)_k = \sqrt[4]{16\left(\cos\frac{2\pi/3 + 2k\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{2\pi/3 + 2k\pi}{4}\right)}$$

Con $k = 0, 1, 2, 3$

Chiamiamo le 4 radici w_0, w_1, w_2, w_3,

- Per k=0 otteniamo la prima soluzione w_0:
  $$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$
- Per k=1 otteniamo:
  $$w_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi/3 + 2\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{2\pi/3 + 2\pi}{4}\right)$$
  e sommando gli angoli:
  $$w_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$
- Per k=2 otteniamo:
  $$w_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi/3 + 4\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{2\pi/3 + 4\pi}{4}\right)$$
  e sommando gli angoli:
  $$w_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$$
- Per k=3 otteniamo:
  $$w_3 = 2\left(\cos\frac{2\pi/3 + 6\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{2\pi/3 + 6\pi}{4}\right)$$
  e sommando gli angoli:
  $$w_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$$

Da notare che se rappresentiamo le soluzioni sul cerchio trigonometrico troviamo che le soluzioni dividono in parti uguali il cerchio (in questo caso sono vertici di un quadrato).
Il fatto e' generale: la radice n-sima di un numero complesso da' dei valori che dividono il cerchio trigonometrico in n parti uguali .

Ecco lo stesso esercizio in gradi:

$$z = 16(\cos 120° + i\,\text{sen}120°)$$

Applichiamo la formula:

$$\left(\sqrt[4]{Z}\right)_k = \sqrt[4]{16\left(\cos\frac{120° + k360°}{4} + i\,\text{sen}\frac{120° + k360°}{4}\right)}$$

Con k=0,1,2,3

Chiamiamo le 4 radici w_0, w_1, w_2, w_3,

- per k=0 otteniamo la prima soluzione w_0 :
  $w_0 = 2(\cos 30° + i\,\text{sen}\ 30°)$
- per k=1 otteniamo:
  $$w_1 = 2\left(\cos\frac{120° + 360°}{4} + i\,\text{sen}\frac{120° + 360°}{4}\right)$$
  eseguendo i calcoli:
  $w_1 = 2(\cos 120° + i\,\text{sen}\ 120°)$
- per k=2 otteniamo:
  $$w_2 = 2\left(\cos\frac{120° + 720°}{4} + i\,\text{sen}\frac{120° + 720°}{4}\right)$$
  eseguendo i calcoli:
  $w_2 = 2(\cos 210° + i\,\text{sen}\ 210°)$
- per k=3 otteniamo:
  $$w_3 = 2\left(\cos\frac{120° + 1080°}{4} + i\,\text{sen}\frac{120° + 1080°}{4}\right)$$
  eseguendo i calcoli
  $w_3 = 2(\cos 300° + i\,\text{sen}\ 300°)$

Con i gradi e' semplice controllare se hai fatto errori: lo scarto fra gli angoli trovati e' sempre costante e, se la radice e' quarta, lo scarto e' 90° (perche' l'angolo giro viene diviso in 4 parti) quindi se la prima radice e' 30° le altre saranno:
30° + 90° = 120°
120° + 90° = 210°
210° + 90° = 300°
Con i radianti e' lo stesso ma e' piu' difficile accorgersene.

Applicazioni: Possiamo utilizzarle per risolvere equazioni complesse tipo:
$x^n = z$

(7) Radici n-sime dell'unita'

Particolarmente interessante e' il caso della soluzione in campo complesso dell'equazione:
$x^n = 1$
Infatti le soluzioni dell'equazione forniscono i vertici di un poligono regolare di **n** lati sulla circonferenza di raggio 1 con il primo vertice sull'intersezione fra la circonferenza e l'asse delle **x** .

Come esempio vediamo di calcolare i vertici dell'esagono regolare cioe' di risolvere l'equazione:
$x^6 = 1$
In questo caso possiamo risolverla o applicando la formula gia' applicata per le soluzioni di equazioni complesse (considerando 1 come il numero complesso 1+i0) oppure con il metodo di scomposizione dei polinomi, visto che il polinomio $x^6 - 1$ e' facilmente scomponibile:
$x^6-1 = (x^3-1)(x^3+ 1)= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

Scegli il metodo che preferisci:
- scomposizione di polinomi
- metodo della formula in gradi
- metodo della formula in radianti

Radici n-esime dell'unita' mediante la scomposizione di polinomi

---

Purtroppo questo metodo non e' sempre applicabile, ad esempio non potrai applicarlo alle equazioni $x^5=1$, $x^7=1$,...
Puoi applicarlo solamente quando puoi scomporre in modo che i polinomi componenti siano di grado 1 e 2 (sarebbe possibile anche con i polinomi di terzo grado, ma la formula risolutiva delle equazioni associate a tali polinomi non sono trattate nelle scuole medie superiori).

$x^6 = 1$
Equivale a:
$x^6 - 1 = 0$
Scompongo secondo il metodo polinomiale (differenza di quadrati prima e poi differenza e somma di cubi) il termine prima dell'uguale:
$x^6-1 = (x^3-1)(x^3+1)= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$
Ottengo:
$x^6-1 = (x^3-1)(x^3+1)= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)=0$
Cioe' devo risolvere le equazioni:
- $x - 1 = 0$
- $x^2 + x + 1 = 0$
- $x + 1 = 0$
- $x^2 - x + 1 = 0$

- Risolvo la prima e trovo la prima soluzione:
  $x - 1 = 0$
  $x_1 = 1$ cioe' nel campo complesso $x = 1 + i0$

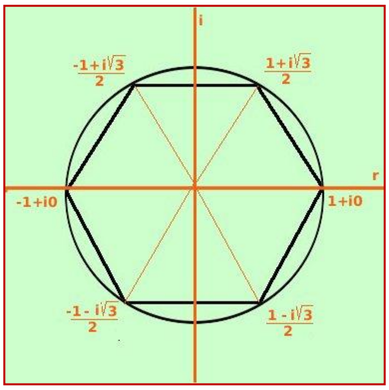
- Risolvo la seconda e trovo la seconda e la terza soluzione:
  $x^2 + x + 1 = 0$
  E' un'equazione di secondo grado.
  Applichiamo la formula:
  $$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$
  Abbiamo:
  $a = 1$
  $b = 1$
  $c = 1$
  $$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2}$$
  $$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$
  $$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$
  $$x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$
  Ora prendo una volta il piu' ed una volta il meno ed ottengo le soluzioni:
  $x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$
- Risolvo la terza equazione e trovo la quarta soluzione:
  $x + 1 = 0$
  $x_4 = -1$ cioe' nel campo complesso **$x = -1 + i0$**
- Risolvo la quarta e trovo la quinta e la sesta soluzione:
  $x^2 - x + 1 = 0$
  E' un'equazione di secondo grado.
  Applichiamo la formula:
  $$x_{5,6} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$
  Abbiamo:
  $a = 1$
  $b = -1$
  $c = 1$
  $$x_{5,6} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2}$$
  $$x_{5,6} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$
  $$x_{5,6} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$
  $$x_{5,6} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$
  Ora prendo una volta il piu' ed una volta il meno ed ottengo le soluzioni:
  $x_5 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $x_6 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

Raccogliendo. Le soluzioni in campo complesso sono:
le indico con i simboli **w_1, w_2, w_3,.....**

$w_1 = 1 + i0$

$$w_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$w_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$



$w_4 = -1 + i0$

$$w_5 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$w_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Radici n-esime dell'unita' mediante la formula (in gradi)

$x^6 = 1$

Devo trasformare 1 nella sua forma trigonometrica trasformazione

$1 = \cos 0° + i \operatorname{sen} 0°$

Essendo in campo complesso indico la variabile con **w.**

Devo risolvere l'equazione:

$w^6 = \cos 0° + i \operatorname{sen} 0°$

Applico la formula:

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{k+1} = \sqrt[6]{(\mathcal{P})}\left(\cos\frac{\theta + k360°}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + k360°}{6}\right)$$

Con k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 $\theta = 0°$ e $\mathcal{P} = 1$

ed ottengo:

- per **k = 0**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{0+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0° + k360°}{6} + i \operatorname{sen}\frac{0° + k360°}{6}\right)$$

$$w_1 = \cos\frac{0°}{6} + i \operatorname{sen}\frac{0°}{6} =$$

$$= \cos 0° + i \operatorname{sen} 0° = 1 + i0 = 1$$

- per **k = 1**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{1+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0° + 1\cdot 360°}{6} + i \operatorname{sen}\frac{0° + 1\cdot 360°}{6}\right)$$

$$w_2 = \cos\frac{360°}{6} + i \operatorname{sen}\frac{360°}{6} =$$

$$= \cos 60° + i \operatorname{sen} 60° =$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

- per **k = 2**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{2+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0° + 2\cdot 360°}{6} + i \operatorname{sen}\frac{0° + 2\cdot 360°}{6}\right)$$

$$w_3 = \cos\frac{720°}{6} + i \operatorname{sen}\frac{720°}{6} =$$

$$= \cos 120° + i \operatorname{sen} 120° =$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

- per **k = 3:**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{3+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0° + 3\cdot 360°}{6} + i \operatorname{sen}\frac{0° + 3\cdot 360°}{6}\right)$$

$$w_4 = \cos\frac{1080°}{6} + i\ \mathrm{sen}\frac{1080°}{6} =$$

$$= \cos 180° + i\ \mathrm{sen}\ 180° = -1 + i\cdot 0 = -1$$

- per **k = 4:**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{4+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0° + 4\cdot 360°}{6} + i\ \mathrm{sen}\frac{0° + 4\cdot 360°}{6}\right)$$

$$w_5 = \cos\frac{1440°}{6} + i\ \mathrm{sen}\frac{1440°}{6} =$$

$$= \cos 240° + i\ \mathrm{sen}\ 240° =$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

- per **k = 5:**

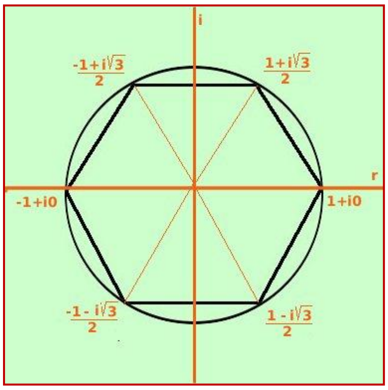
$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{5+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0° + 5\cdot 360°}{6} + i\ \mathrm{sen}\frac{0° + 5\cdot 360°}{6}\right)$$

$$w_6 = \cos\frac{1800°}{6} + i\ \mathrm{sen}\frac{1800°}{6} =$$

$$= \cos 300° + i\ \mathrm{sen}\ 300° =$$

$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Quindi, raccogliendo abbiamo:
l'ordine e' diverso da quello delle soluzioni trovate con il metodo algebrico; nota che il metodo della formula ti da' le soluzioni ordinate in senso antiorario sulla circonferenza:



$\mathbf{w_1 = 1}$

$$\mathbf{w_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}$$

$$\mathbf{w_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$$

$\mathbf{w_4 = -1}$

$$\mathbf{w_5 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$$

$$\mathbf{w_6 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$$

Radici n-esime dell'unita' mediante la formula (in radianti)

Devo trasformare 1 nella sua forma trigonometrica trasformazione

$1 = \cos 0 + i\ \mathrm{sen}\ 0$

Essendo in campo complesso indico la variabile con **w**.

Devo risolvere l'equazione:

$w^6 = \cos 0° + i\ \mathrm{sen}\ 0°$

Applico la formula:

$$\left(\sqrt[n]{w}\right)_{k+1} = \sqrt[n]{\mathcal{P}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\ \mathrm{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

Con k = 0, 1, 2,......, n-1 n=6 θ= 0 $\mathcal{P}$= 1
ed ottengo:

- per **k = 0**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{0+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0 + 0\cdot 2\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{0 + 0\cdot 2\pi}{6}\right)$$

$$w_1 = \cos\frac{0}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{0}{6} =$$

$$= \cos 0 + i\,\text{sen}\,0 = 1 + i0 = 1$$

- per **k = 1**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{1+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0 + 1\cdot 2\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{0 + 1\cdot 2\pi}{6}\right)$$

$$w_2 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{6} =$$

$$= \cos \pi/3 + i\,\text{sen}\,\pi/3 =$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

- per **k = 2**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{2+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0 + 2\cdot 2\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{0 + 2\cdot 2\pi}{6}\right)$$

$$w_3 = \cos\frac{4\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{6} =$$

$$= \cos 2/3\ \pi + i\,\text{sen}\,2/3\ \pi =$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

- per **k = 3**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{3+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0 + 3\cdot 2\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{0 + 3\cdot 2\pi}{6}\right)$$

$$w_4 = \cos\frac{6\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{6} =$$

$$= \cos \pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$$

- per **k = 4**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{4+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0 + 4\cdot 2\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{0 + 4\cdot 2\pi}{6}\right)$$

$$w_5 = \cos\frac{8\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{8\pi}{6} =$$

$$= \cos 4/3\ \pi + i\,\text{sen}\,4/3\ \pi =$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

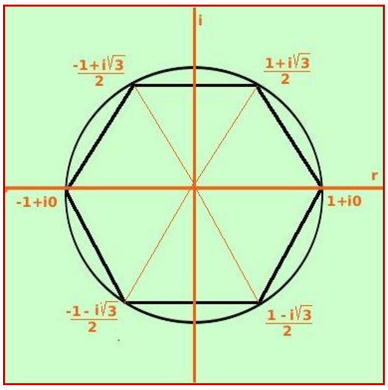
- per **k = 5**

$$\left(\sqrt[6]{w^6}\right)_{5+1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0\ +\ 5\cdot 2\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{0\ +\ 5\cdot 2\pi}{6}\right)$$

$$w_6 = \cos\frac{10\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{10\pi}{6} =$$

$$= \cos 5/3\,\pi + i\,\mathrm{sen}\,5/3\,\pi =$$

$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$



Quindi, raccogliendo abbiamo:
l'ordine e' diverso da quello delle soluzioni trovate con il metodo algebrico; nota che il metodo della formula ti da' le soluzioni ordinate in senso antiorario sulla circonferenza:

$w_1 = 1$

$$w_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$w_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$w_4 = -1$

$$w_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$w_6 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

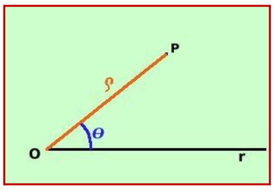
d) Il sistema di coordinate polari

Da quanto visto nelle pagine precedenti viene spontaneo considerare un nuovo sistema di coordinate che permetta di trovare la posizione di un punto considerando semplicemente la distanza da un centro (polo) e l'angolo rispetto ad una particolare semiretta (alzato).

(1) Sistema di coordinate polari nel piano

Il problema di un sistema di coordinate e' sempre lo stesso; in che modo si puo' individuare esattamente la posizione di un punto nel piano? Abbiamo visto il sistema di coordinate cartesiane nel piano che mediante le proiezioni su due assi individua i punti del piano stesso. Vediamo ora un altro sistema di coordinate in cui un punto e' individuato da un segmento e da un angolo.

Considero nel piano un punto **O (polo)** ed una semiretta **r** uscente da **O (origine degli archi)** (per semplicita' la considero orizzontale). Allora, dato un qualunque punto **P** la sua posizione e' determinata dalla distanza **PO = P** e dall'angolo θ che il segmento **PO** forma con la semiretta **r:**



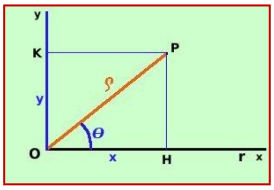
P ≡ (P; θ)

Il primo numero puoi pensarlo come il raggio di una circonferenza di centro **O** ed il secondo come l'angolo che deve "spazzare" il raggio, partendo dalla semiretta, per arrivare al punto **P.**
Il sistema di coordinate polari sara' molto utile da utilizzare, oltre che su circonferenze e sfere, in tutti quei problemi dove intervengono fenomeni rotatori o comunque legati a numeri immaginari.

(2) Trasformazione da coordinate cartesiane ortogonali a coordinate polari

Vediamo subito come e' possibile trasformare le coordinate cartesiane ortogonali per trovare le corrispondenti coordinate polari.

Considero **O (polo)** come origine di un sistema di coordinate cartesiane in modo che l'asse **x** si sovrapponga alla semiretta **r.**



Dal punto **P** mando le proiezioni sugli assi **x** e **y** ed ottengo i punti **H** e **K**.
Ottengo quindi, utilizzando i teoremi della trigonometria sui triangoli rettangoli :

$\mathbf{OH = x = \mathcal{P}cos\,\theta}$

$\mathbf{OK = PH = y = \mathcal{P}sen\,\theta}$

Come vedi e' lo stesso meccanismo che ci porta a rappresentare un numero complesso nel suo piano (vedi pagine precedenti)

Come esercizio prendiamo l'equazione della circonferenza unitaria di raggio 1 in un sistema di coordinate cartesiane e trasformiamola nell'equazione di una circonferenza in un sistema di coordinate polari.
Equazione:

$\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$

Applico la trasformazione:

$x = \mathcal{P}\cos\theta$

$y = \mathcal{P}\text{sen}\,\theta$

Ottengo:

$\mathcal{P}^2 \cos^2\theta + \mathcal{P}^2 \text{sen}^2\,\theta = 1$

$\mathcal{P}^2 (\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = 1$

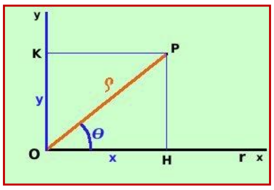
e per la prima relazione fondamentale della trigonometria:

$\mathcal{P}^2 = 1$

(3) Trasformazione da coordinate polari a coordinate cartesiane ortogonalii

In modo analogo trasformiamo le coordinate polari in coordinate ortogonali cartesiane

Considero Il sistema cartesiano ortogonale **xOy** e considero il punto **P** di coordinate **(x;y).**



Congiungo il punto **P** con l'origine degli assi **O** ed ottengo:

$\mathbf{PO = \mathcal{P}}$

$\mathcal{P}$e' l'ipotenusa del triangolo **POH** che ha i cateti che valgono **x** e **y**, quindi vale la relazione:

$\mathcal{P} = \sqrt{(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2)}$

Inoltre per la seconda relazione fondamentale avro':

$\text{tang}\,\theta = \frac{y}{x}$

e queste sono le formule di trasformazione,

Facciamo l'esercizio inverso della pagina precedente; prendiamo l'equazione della circonferenza unitaria di raggio 1 in un sistema di coordinate polari e trasformiamola nell'equazione di una circonferenza in un sistema di coordinate cartesiane.
Equazione: $\mathcal{P}^2 = 1$
Applico le formule di trasformazione:

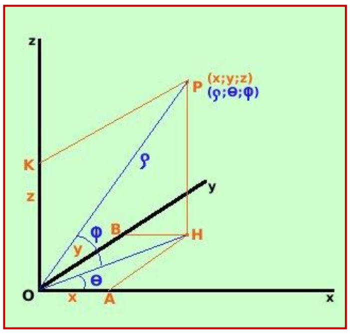
$\mathcal{P} = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

$\text{tang}\,\theta = \dfrac{y}{x}$

Mi basta applicare la prima formula e, semplificando la radice col quadrato ottengo:
$x^2 + y^2 = 1$

(4) Sistema di coordinate polari nello spazio

Facciamo un breve cenno sulle coordinate polari nello spazio



Considero Il sistema cartesiano ortogonale **Oxyz** e considero il punto **P** di coordinate **(x;y;z).**
Ho:
$OK = z \quad OA = x \quad OB = y$
Congiungo il punto **P** con l'origine degli assi **O** ed ottengo:
$PO = \mathcal{P}$
$\mathcal{P}$ e' l'ipotenusa del triangolo **POH** che ha i cateti che valgono PH=z e OH=$\sqrt{(x^2 + y^2)}$, quindi vale la relazione:
$\mathcal{P} = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$
Considero ora il triangolo rettangolo **POH** in esso avremo valide le relazioni:
$z = OK = PH = \mathcal{P}\ \text{sen}\ \phi$
$OH = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \mathcal{P}\cos\phi$
e quindi per trovare **x** ed **y**, considerando il triangolo rettangolo **OHA**:
$x = OA = OH\ \text{sen}\ \theta = \mathcal{P}\cos\phi\cos\theta$
$y = AB = AH = OH\cos\theta = \mathcal{P}\cos\phi\ \text{sen}\ \theta$

Quindi avremo le tre formule di trasformazione da coordinate cartesiane a coordinate polari:

- $x = \mathcal{P}\cos\phi\cos\theta$
- $y = \mathcal{P}\cos\phi\ \text{sen}\ \theta$
- $z = \mathcal{P}\ \text{sen}\ \phi$

Viceversa avremo per le trasformazioni da coordinate polari a coordinate cartesiane:

- per la relazione sul triangolo **OAH** essendo **tang ϕ = AH/OA** :
  $\text{tang}\,\theta = \dfrac{y}{x}$
- Per la relazione sul triangolo **POH** essendo **tang θ= PH/OH** :
  $\text{tang}\,\phi = \dfrac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$
- $\mathcal{P} = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

e) Forma esponenziale dei numeri complessi

Vediamo ora un interessante modo di rappresentare i numeri complessi che avra' molte applicazioni nella matematica "universitaria" soprattutto per quanto riguardera' le serie trigonometriche e le funzioni iperboliche. Noi pero' salteremo tali argomenti perche' non facenti parte del programma delle scuole medie superiori.

Per seguire le dimostrazioni devi aver studiato lo sviluppo in serie di potenze delle funzioni; se non conosci l'argomento, prendi le formule di Eulero solamente come una definizione.

- Funzione esponenziale con esponente immaginario
- Formule di Eulero
- Funzione esponenziale con esponente complesso

(1) Funzione esponenziale con esponente immaginario

Partiamo dallo sviluppo in serie della funzione esponeziale:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \ldots$$

Sostituiamo ad **x** il numero immaginario **iy** ed otteniamo:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \cdots \ldots$$

e, sostituendo alle potenze di **i** i relativi valori, abbiamo:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{y^2}{2!} + \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} + \cdots \ldots$$

Ora separiamo i termini con la **i** dai termini senza la **i:**

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \ldots \ldots + iy - \frac{iy^3}{3!} + \frac{iy^5}{5!} + \cdots \ldots$$

Raccolgo la **i** ed ottengo:

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \ldots \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots \ldots\right)$$

Ora i termini prima delle parentesi sono lo sviluppo della funzione $\mathbf{z = cos\ y}$ ed i termini dentro parentesi sono lo sviluppo della funzione $\mathbf{z = sen\ y}$, quindi vale:

$\mathbf{e^{iy} = cos\ y + i\ sen\ y}$

Questa e' la formula che stavamo cercando.

(2) Formule di Eulero

Abbiamo trovato che vale:

$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$

quindi vale anche, considerando un esponente negativo:

$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$

Infatti **cos (-a) = cos a** mentre **sen(-a) = - sen a**

Facendo il sistema fra le due equazioni posso ricavare **cos y** e **sen y** in funzione di $\mathbf{e^{iy}}$ ed $\mathbf{e^{-iy}}$

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \\ e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y \end{cases}$$

Risolviamo il sistema.
Conviene utilizzare il metodo di addizione
Sottraggo in verticale e mi sparisce il termine **cos y**

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \\ e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y \end{cases}$$

$e^{iy} - e^{-iy} = 2i \operatorname{sen} y$

Leggiamo a rovescio:

$2i \operatorname{sen} y = e^{iy} - e^{-iy}$

e, dividendo per 2i, otteniamo la prima formula di Eulero:

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Sommo in verticale e mi sparisce il termine **i sen y :**

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \\ e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y \end{cases}$$

$e^{iy} + e^{-iy} = 2 \cos y$

Leggiamo a rovescio:

$2 \cos y = e^{iy} + e^{-iy}$

e, dividendo per 2, otteniamo la seconda formula di Eulero:

$$\cos y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}$$

(3) Funzione esponenziale con esponente complesso

A questo punto possiamo scrivere la funzione esponeziale ad esponente complesso: infatti per le proprieta' delle potenze abbiamo:

$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$

e, sostituendo ad **e^{iy}** la sua espressione trigonometrica, avremo:

$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y)$

essendo **e^x** il modulo ed **y** l'argomento del numero complesso **e^{x+iy}**

F. *Teorie formali*

Cerchiamo di capire in queste pagine che cos'e' una teoria matematica e descriviamone gli aspetti principali; studiamo poi le caratteristiche di un sistema di assiomi.
Vedremo poi come l'aritmetica e' centrale nella matematica e quindi costruiremo un sistema di assiomi, oltre a quelli di Peano, che permettano di effettuare le normali operazioni fra numeri naturali. Otterremo una teoria formale che chiameremo aritmetica
Infine vedremo che, siccome i sistemi formali hanno delle limitazioni, tali limitazioni saranno proprie dell'aritmetica in particolare e della matematica in generale.

- Assetto formale di una teoria matematica
  Un esempio: l'aritmetica come sistema formale
- Limiti della formalizzazione

1. Assetto formale di una teoria matematica

Piu' che di Matematica sarebbe meglio parlare di Matematiche. Infatti le varie discipline (aritmetica, algebra, geometria euclidea,...), pur collegabili fra loro, sono piu' sviluppi autonomi di teorie partendo da postulati diversi, che un blocco unico. Unico e' invece il metodo ipotetico deduttivo che utilizziamo per sviluppare, partendo dai postulati, le varie

teorie.
Enumeriamo quali sono i punti (almeno quelli su cui i matematici sono d'accordo) che caratterizzano una teoria matematica:

- L'astrazione
- Utilizzo di simboli specifici
- Postulati iniziali
- Metodo ipotetico deduttivo
- Teoria e modelli

a) L'astrazione

In matematica si cerca sempre di passare dal particolare all'universale, cercando di considerare il maggior numero di casi possibili.
Quindi, ad esempio dalla relazione:
3 x 2 = 2 x 3
In matematica preferiamo passare a:
a x b = b x a
(*proprieta' commutativa della moltiplicazione*)
Altro esempio.
Dalla relazione:
3 + 2 = 2 + 3
in matematica preferiamo passare a:
a + b = b + a
(*proprieta' commutativa dell'addizione*)

Astraendo poi da entrambe le proprieta', potremo dire che se vale:
a operazione b = b operazione a
essendo **operazione** un'operazione generica; allora per **operazione** e' valida la proprieta' commutativa.
(Quindi facciamo un'altra astrazione passando da una proprieta' commutativa particolare alla proprieta' commutativa in generale).

b) Utilizzo di simboli specifici

Di pari passo con l'astrazione si ha l'utilizzo di simboli specifici; un simbolo permette di fare tante operazioni al prezzo di una. Se scrivo:
$(3 + 2) \cdot (3 - 2) = 5$
e' un'operazione, ma se scrivo:
$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$
queste sono infinite operazioni (basta sostituire ad **a** e a **b** 2 numeri qualunque e avrai sempre un'uguaglianza).
L'introduzione al posto di due numeri dei simboli **a** e **b** mi permette di avere infinite operazioni invece di una! Inoltre l'introduzione di simboli permette anche di risolvere piu' facilmente i problemi. Se ho:
Sommando un numero alla sua meta' ed alla sua terza parte si ottiene 11
e' molto semplice se chiami **x** il numero. Infatti puoi impostare l'equazione (introducendo il simbolo **x**):
$x + 1/2\,x + 1/3\,x = 11$
Tanto per curiosita': il numero e' 6

Naturalmente ogni teoria matematica ha i suoi simboli specifici: pensa alla teoria degli insiemi, alla logica, ad analisi matematica con i calcoli differenziale ed integrale,....

c) Postulati iniziali

Qualunque teoria matematica parte sempre da alcuni enti fondamentali e dalle relazioni esistenti fra gli stessi: i postulati.

Ad esempio, nella Geometria Euclidea del piano, abbiamo come enti fondamentali il punto la retta e il piano e come postulati i seguenti postulati:

- esistenza
- appartenenza
- uguaglianza
- ordine
- parallele

In Aritmetica invece si parte dai concetti di numero e successivo di un numero e dai postulati (assiomi) di Peano:

- L'unita' e' un numero
- Il successivo di un numero e' ancora un numero
- Dati due numeri, se i loro successivi sono uguali allora i due numeri sono uguali
- L'unita' non e' successivo di nessun numero
- Se **s** e' una classe di numeri contenente l'unita' e se la classe dei successivi degli elementi di **s** e' contenuta in **s** allora ogni numero e' contenuto in **s** (principio di induzione).

Caratteristica formale dei postulati e' che debbono essere fra loro indipendenti e il loro numero deve essere il minore possibile.
E' logico che cambiando i postulati varia il tipo di matematica che si ottiene, cosi' in geometria, variando il quinto postulato (di Euclide), otteniamo altre geometrie, diverse dalla Geometria Euclidea.

d) Metodo ipotetico deduttivo

Una volta stabiliti i postulati occorre studiare le relazioni esistenti fra gli stessi: mediante ragionamenti logici otteniamo dei fatti che saranno lo sviluppo della teoria matematica relativa.
Il metodo utilizzato per poter dai postulati procedere nella teoria e' il metodo logico-deduttivo che abbiamo studiato nella sezione dedicata alla logica.

e) Teoria e modelli

Fino agli inizi del '900 in matematrica si dava piu' importanza al calcolo "puro" rispetto al calcolo applicato: ad esempio furono studiati i numeri immaginari molto prima di trovarne applicazioni fisiche.

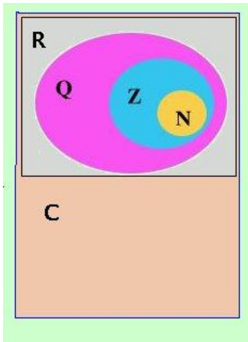
Per dartene un'idea famoso e' il brindisi di Hilbert (il piu grande matematico degli inizi del '900):
"Alla matematica pura, ... e che possa non essere di utilita' a nessuno!"

Invece ora, piuttosto che procedere teoricamente alla cieca, si preferisce considerare un problema specifico, costruirne un modello matematico partendo dai relativi postulati e sviluppando la teoria relativa.

2. L'aritmetica come sistema formale

Vediamo ora come l'aritmetica, esautorata nella sua importanza dall'analisi matematica, sia da considerare come la matematica piu' generale che comprende al suo interno anche le altre matematiche, e quindi ridiamo all'aritmetica tutta l'importanza che si merita fra le altre discipline matematiche.

a) L'insieme **N** come generatore degli altri insiemi numerici



Abbiamo visto che i vari insiemi numerici sono ottenuti considerando come inizio l'insieme **N** dei numeri naturali ed applicando successivi ampliamenti; cosi' abbiamo:
$\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$
$2 \rightarrow +2 \rightarrow 2/1 \rightarrow 2{,}0000.. \rightarrow 2{,}0000.. + i\,0$
lo stesso numero e' scritto in modo diverso nei diversi insiemi.

Algebricamente possiamo definire i vari ampliamenti che abbiamo fatto all'inizio mediante delle relazioni di equivalenza.

Cosi' se consideriamo la relazione ***Rel*** su **N x N** tale che uso per la relazione il simbolo **Rel** perche' il simbolo **R** mi servira' per indicare i numeri reali:
$(a,b)\ \mathit{Rel}\ (c,d) \Leftrightarrow a + d = c + b$ Perche' questa relazione? (*Scheda F1*)
Questa e' una relazione di equivalenza le cui classi di equivalenza sono i numeri in **Z** e quindi partendo da **N x N** genero l'insieme **Z** dei Numeri Interi.
Mostriamo che la relazione ***Rel*** e' di equivalenza (*Scheda F2*)

Similmente prendendo la relazione di equivalenza su **Z x Z** tale che:
$(a,b)\ \mathit{Rel}\ (c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$ Perche' questa relazione? (*Scheda F1*)
Questa e' una relazione di equivalenza le cui classi di equivalenza sono i numeri in **Q** e quindi partendo da **Z x Z** genero l'insieme **Q** dei Numeri Razionali.
Mostriamo che la relazione ***Rel*** e' di equivalenza (*Scheda F2*)
A partire da **Q** abbiamo poi costruito le "sezioni di Dedekind" che ci hanno permesso di definire i Numeri Reali **R** come elementi separatori di classi contigue di Numeri Razionali.

Successivamente abbiamo definito **C** come insieme delle coppie $(a;b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ con $(a;b) = a + ib$

Quindi possiamo dire che l'insieme **N** e' l'insieme generatore di tutti gli insiemi numerici ed esiste in tutti gli insiemi numerici almeno un sottoinsieme che e' isomorfo ad **N** stesso.

Scheda n. F1

Qui e' molto piu' comprensibile: la relazione corrisponde all'equivalenza fra frazioni:
infatti se, ad esempio abbiamo:

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ segue che vale $\mathbf{2 \cdot 6 = 4 \cdot 3}$

In formule:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ segue che vale $\mathbf{a \cdot d = c \cdot b}$

Cioe' due frazioni sono equivalenti se moltiplicando il numeratore dell'una per il denominatore dell'altra si ottiene lo steso risultato.
Ogni insieme di fazioni equivalenti mi determina un numero in **Q** che e' il rappresentante della classe di equivalenza cui appartengono.

Scheda n. F2

Dimostriamo che la relazione in **Z x Z** tale che:
(a,b) Rel (c,d) se a·d = c·b
e' una relazione di equivalenza
devo dimostrare che e':

1) Riflessiva
2) Simmetrica
3) Transitiva

1) E' riflessiva; infatti:
(a,b) Rel (a,b)
e' sempre vera perche':
a·b = a·b
2) E' simmetrica, devo dimostrare che:
(a,b) Rel (c,d) implica **(c,d) Rel (a,b)**
si ha:
a·d = c·b
per la proprieta' simmetrica dell'uguaglianza ho:
c·b = a·d
Quindi vale:
(c,d) Rel (a,b)
come volevamo.
3) Mostriamo che e' transitiva: devo mostrare che da
(a,b) Rel (c,d) e **(c,d) Rel (e,f)** segue **(a,b) Rel (e,f)**
Abbiamo, per le due relazioni:
a·d = c·b
c·f = e·d
Moltiplichiamo in verticale; otteniamo:
a·d · c·f = c·b · e·d
Utilizzando la regola di cancellazione togliamo i termini uguali da parti opposte dell'uguale ed otteniamo:
a·f = b·e
e per la proprieta' simmetrica della moltiplicazione posso scrivere:
a·f = e·b
Quindi vale:
(a,b) Rel (e,f)
Come volevamo .

b) Assiomi di Peano

Considerando come acquisiti il concetto di numero, di successivo di un numero ed alcuni postulati e' possibile costruire l'insieme **N** dei Numeri Naturali.
Sono i Postulati di Peano che avevo gia' accennato, ma che ora presento in forma un po' piu' moderna.
Ho i concetti primitivi:
N insieme dei numeri naturali
n numero
n' = **n+1** successivo di **n** (allora diremo che **n** e' l'**antecedente** di **n+1**)
I postulati sono:

- $1 \in N$
  Il numero **1** appartiene ad **N**
- $n' = m' \Rightarrow n = m$
  Se due successivi sono uguali, allora sono uguali anche i numeri
- $n \in N \Rightarrow n' \neq 1$
  Il successivo di ogni numero e' diverso da 1 cioe' il numero **1** non ha antecedente
- $p(1)$ e
  $p(a) \Rightarrow p(a') \forall\, a \in N \Rightarrow p(n)\ \forall\, n \in N$
  Se una proprieta' e' vera per il numero **1** e, avendola supposta vera per un numero, ne segue che e' vera anche per il successivo di quel numero, allora essa e' vera per tutti i Numeri Naturali.

L'ultimo postulato e' il cosiddetto **"principio di induzione matematica"**

Ho considerato l'insieme dei numeri naturali "classico" cioe' **1,2,3,.....**: lo preferisco per ragioni logiche e storiche. Comunque in alcuni testi scolastici viene aggiunto lo **0**, quindi dovrai considerare l'insieme **0,1,2,3,...** e quindi variare i postulati in modo da considerare lo zero invece dell'uno come numero iniziale.

---

c) Centralita' dell'aritmetica nella matematica

Vedremo in queste pagine che ogni formula ed ogni oggetto in qualunque teoria matematica possono essere trasformati in modo da corrispondere ad un particolare numero naturale; cioe' ogni teoria matematica, essendo composta da oggetti e formule, corrisponde (e' isomorfa) ad una parte dell'insieme dei numeri naturali.

Facciamo un semplice esempio: considero una semplice equazione in algebra:
$x + 6 = 2(x+2)$
Cerchiamo di scriverla risparmiando il piu' possibile nei simboli; possiamo scrivere ogni numero naturale utilizzando semplicemente due simboli: il numero **1** e l'apice **'**. Otteniamo:
$x + 1''''' = 1'(x+1')$
Quindi costruiamo un "alfabeto" che ci permetta di sviluppare la teoria matematica (in questo caso l'algebra) utilizzando il minor numero di simboli possibile:

1	uno
'	successivo
(	parentesi aperta
)	parentesi chiusa
+	addizione
=	uguaglianza
....	....
simbolo	significato

E' logico pensare che per ogni teoria matematica il numero dei simboli essenziali necessari allo sviluppo della teoria sia limitato e quindi la tabella relativa, quale quella vista sopra per l'Algebra sara' finita.

d) Numeri di Gödel

Consideriamo la tabella dell'alfabeto che abbiamo visto precedentemente ed associamo ad ogni termine dell'"alfabeto" un numero dispari partendo da 3 (si indica con g(simbolo))

1	uno	g(1) = 3
'	successivo	g(') = 5
(	parentesi aperta	g(() = 7
)	parentesi chiusa	g())n = 9
+	addizione	g(+) = 11
=	uguaglianza	g(=) = 13
x	variabile	g(x) = 15
·	prodotto	g(·) = 17
....	....	....
simbolo	significato	g(simbolo) = 2n+1

Considero poi l'insieme dei numeri primi partendo da 2:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

Costruiamo ora un numero considerando per ogni simbolo come base un numero primo e come esponente il numero g(simbolo) visto sopra.

Quindi l'espressione considerata nella pagina precedente:
x + 6 = 2(x+2)
cioe'
x + 1'''''' = 1'·(x+1')
Diventa il numero (per ovvie ragioni non lo calcolo):
$2^{15}·3^{11}·5^{3}·7^{5}·11^{5}·13^{5}·17^{5}·19^{5}·23^{13}·29^{3}·31^{5}·37^{17}·41^{7}·43^{15}·47^{13}·53^{3}·59^{5}·61^{9}$
il numero primo mi rappresenta il posto in cui si trova il simbolo e l'esponente mi indica di che simbolo si tratti.

Scheda n. F3 - Come si forma il numero di Gödel

Trasformare l'espressione:
x + 6 = 2(x+2)
nel suo numero di Gödel, considerando valida la tabella alfabetica considerata.
Trasformo prima l'espressione utilizzando i simboli di base:
x + 1'''''' = 1'·(x+1')

Considero l'insieme dei numeri primi a partire da 2:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...
Nell'espressione da trasformare considero i simboli ed il loro posto:

posto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Numero primo	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61
Simbolo	x	+	1	'	'	'	'	'	=	1	'	·	(	x	+	1	'	)
Valore simbolo	15	11	3	5	5	5	5	5	13	3	5	17	7	15	11	3	5	9
Fattore	2^{15}	3^{11}	5^3	7^5	11^5	13^5	17^5	19^5	23^{13}	29^3	31^5	37^{17}	41^7	43^{15}	47^{11}	53^3	59^5	61^9

- al primo posto c'e' il simbolo x, che nell'alfabeto corrisponde a 15
  Il primo posto nell'espressione corrisponde al numero primo **2**
  quindi il primo fattore sara' 2^{15}
- al secondo posto c'e' il simbolo +, che nell'alfabeto corrisponde a 11
  Il secondo posto nell'espressione corrisponde al numero primo **3**
  quindi il secondo fattore sara' 3^{11}
- al terzo posto c'e' il simbolo 1, che nell'alfabeto corrisponde a 3
  il terzo posto nell'espressione corrisponde al numero primo **5**
  quindi il terzo fattore sara' 5^3
- al quarto posto c'e' il simbolo ', che nell'alfabeto corrisponde a 5
  il quarto posto nell'espressione corrisponde al numero primo **7**
  quindi il quarto fattore sara' 7^5
- al quinto posto c'e' il simbolo ', che nell'alfabeto corrisponde a 5
  il quinto posto nell'espressione corrisponde al numero primo **11**
  quindi il quinto fattore sara' 11^5
- al sesto posto c'e' il simbolo ', che nell'alfabeto corrisponde a 5
  il sesto posto nell'espressione corrisponde al numero primo **13**
  quindi il sesto fattore sara' 13^5
- al settimo posto c'e' il simbolo ', che nell'alfabeto corrisponde a 5
  il settimo posto nell'espressione corrisponde al numero primo **17**
  quindi il settimo fattore sara' 17^5
- all' ottavo posto c'e' il simbolo ', che nell'alfabeto corrisponde a 5
  l'ottavo posto nell'espressione corrisponde al numero primo **19**
  quindi l'ottavo fattore sara' 19^5
- al nono posto c'e' il simbolo =, che nell'alfabeto corrisponde a 13
  il nono posto nell'espressione corrisponde al numero primo **23**
  quindi il nono fattore sara' 23^{13}
- al decimo posto c'e' il simbolo 1, che nell'alfabeto corrisponde a 3
  il decimo posto nell'espressione corrisponde al numero primo **29**
  quindi il settimo fattore sara' 29^3
- all' undicesimo posto c'e' il simbolo ', che nell'alfabeto corrisponde a 5
  l'undicesimoo posto nell'espressione corrisponde al numero primo **31**
  quindi l'ottavo fattore sara' 31^5
- al dodicesimo posto c'e' il simbolo ·, che nell'alfabeto corrisponde a 17
  il dodicesimo posto nell'espressione corrisponde al numero primo **37**
  quindi il dodicesimo fattore sara' 37^3
- Eccetera eccetera.........

Da notare che il numero di Gödel di una formula e' sempre pari perche' c'e' sempre come base 2 per il primo termine della formula, mentre i simboli (terza colonna della tabella) sono sempre dispari.

Esercizi:
Vediamo un paio di esercizi, molto semplici per avere numeri abbastanza "umani" (si fa per dire):

1) Trasformare l'espressione **1+1=2** in numero di Gödel

Scriviamola con il minor numero di simboli possibili:
1+1=1'
Con l'alfabeto che abbiamo fatto ho che:
g(1) = 3
g(+) = 11
g(=) = 13
g(') = 5
Considero i numeri primi **2, 3, 5, 7, 11, 13** e costruisco il numero
$2^3 \cdot 3^{11} \cdot 5^3 \cdot 7^{13} \cdot 11^3 \cdot 13^5 = 8482095133471418220668907000$
Calcolato con la calcolatrice.

Come vedi anche una semplice espressione si trasforma in un numero che e' quasi impossibile leggere da quanto e' grande; pero' teoricamente ogni espressione si puo' trasformare in un numero naturale.

---

2) Trasformare il numero di Gödel **6.530.347.008.000** nella sua espressione algebrica.

Sempre considerando fisso l'"alfabeto" che abbiamo fatto e' sufficiente scomporre il numero in fattori primi
(fare link alla scomposizione in fattori quando la faro')

6.530.347.008.000	$2^3 x 5^3$
6.530.347.008	2
3.265.173.504	2
1.632.586.752	2
816.293.376	2
408.146.688	2
204.073.344	2
102.036.672	2
51.018.336	2
25.509.168	2
12.754.584	2
6.377.292	2
3.188.646	2
1.594.323	3
531.441	3
177.147	3
59.049	3
19.683	3
6.561	3

2.187	3
729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	//

Quindi avremo che
6.530.347.008.000 = $2^{15} \cdot 3^{13} \cdot 5^{3}$
2 e' il primo termine ed ha esponente 15, cioe' corrisponde ad x
3 e' il secondo termine ed ha esponente 13, cioe' corrisponde ad =
5 e' il terzo termine ed ha esponente 3, cioe' corrisponde ad 1
quindi la nostra formula e':
x = 1

e) Importanza della codifica di Gödel

Abbiamo visto che l'espressione:
$x + 6 = 2(x+2)$
Corrisponde al numero di Gödel:
$2^{15}\cdot3^{11}\cdot5^{3}\cdot7^{5}\cdot11^{5}\cdot13^{5}\cdot17^{5}\cdot19^{5}\cdot23^{13}\cdot29^{3}\cdot31^{5}\cdot37^{17}\cdot41^{7}\cdot43^{15}\cdot47^{13}\cdot53^{3}\cdot59^{5}\cdot61^{9}$
Naturalmente questo numero e' elevatissimo e non e' certamente da calcolare, pero' mi mostra che per ogni possibile formula si puo' trovare un numero naturale (numero di Gödel) che la rappresenti in modo biunivoco; infatti, siccome la scomposizione in fattori di ogni numero e' unica, allora ad ogni numero di Gödel corrisponde un'unica formula della teoria; l'insieme dei numeri di Gödel su una qualunque teoria matematica e' un sottoinsieme di **N** isomorfo all'insieme delle formule e dei dati di quella teoria.

Quindi l'aritmetica, esautorata nella sua importanza dall'analisi matematica, e' da considerare come la matematica piu' generale che comprende al suo interno anche le altre matematiche, e quindi ridiamo all'aritmetica tutta l'importanza che si merita fra le altre discipline matematiche.

L'aritmetica, cacciata dal ruolo di regina della matematica dalle altre discipline, rientra a pieno titolo nel suo ruolo di centro di tutte le matematiche.

f) Aritmetica come esempio di sistema formale

Costruiamo un sistema formale per l'aritmetica, cioe' un sistema di oggetti ed assiomi da cui si possa ricavare tutta l'aritmetica: aggiungiamo ai postulati di Peano alcuni assiomi che ci permettano di fare le operazioni.
Chiameremo questa teoria formale **Aritmetica** e per indicarla utilizzeremo il simbolo **A**.
Utilizziamo i simboli del linguaggio dei predicati (ripassa i simboli nella logica) cioe' con l'aggiunta dei simboli **1**, **+**(addizione), **·**(prodotto), **'**(successivo).

Vediamo gli assiomi di **A** :

- A_1
  $\forall x \forall y \forall z\ (x = y) \Rightarrow ((x = z) \Rightarrow (y = z))$ come si legge *(Scheda F4)*
  Cioe' se due oggetti (chiamiamoli numeri) sono uguali fra loro ed il primo e' uguale ad un terzo, allora anche il secondo e'uguale al terzo.
- A_2
  $\forall x \forall y\ (x = y) \Rightarrow (x' = y')$
  Se due numeri sono uguali fra loro. allora anche i successivi sono uguali fra loro.
- A_3
  $\forall x \forall y\ (x' = y') \Rightarrow (x = y)$
  Se due successivi sono uguali fra loro, allora anche i numeri sono uguali.
- A_4
  $\forall x\ \text{not}\ (1 = x')$
  1 non e' il successivo di nessun numero.
- A_5
  $\forall x\ (x+1 = x')$
  Il successivo di un numero si ottiene aggiungendo 1 al numero.
- A_6
  $\forall x\ \forall y\ (x + y' = (x + y)')$
  La somma fra un primo numero ed il successivo di un secondo e' uguale al successivo della somma fra il primo ed il secondo
- A_7
  $\forall x\ (x \cdot 1 = x)$
  Moltiplicando un numero per 1 otteniamo sempre lo stesso numero (1 e' l'elemento neutro nella moltiplicazione).
- A_8
  $\forall x \forall y\ (x \cdot y' = (x \cdot y) + x)$
  Il prodotto fra un numero ed il successivo di un secondo numero e' uguale al prodotto fra i due numeri sommato al primo numero.
- A_9
  $\forall A(x)\ A(1) \Rightarrow (\forall A(x) \Rightarrow A(x')) \Rightarrow \forall x\ A(x)$
  E' il principio di induzione: data la proprieta' A(x) se essa e' vera per 1 e se essendo vera per x e' vera anche per il suo successivo allora essa e' vera per tutti i numeri.

Considerando i normali assiomi della logica, i postulati esposti sopra e le regole di deduzione, possiamo dimostrare tutti i possibili problemi dell'Aritmetica.

Da notare che utilizzando i numeri di Gödel posso trovare un sottoinsieme di **N** che sia isomorfo ad **A**, quindi l'insieme **N** contiene tutta l'aritmetica come suo sottoinsieme

Scheda n. F4

Leggiamo l'espressione:

$\forall x \forall y \forall z\ (x = y) \Rightarrow ((x = z) \Rightarrow (y = z))$

Per leggere devi conoscere il significato dei simboli:

$\forall$ Per ogni

$\Rightarrow$ Implica

Per ogni **x**, per ogni **y** e per ogni **z**, l'uguaglianza **x = y** implica che l'uguaglianza **x = z** implica che vale anche l'uguaglianza **y = z**

Come vedi basta leggere termine a termine: gli altri assiomi sono ancora piu' semplici da leggere e quindi non te li sviluppo.

3. Limiti della formalizzazione

Vediamo in queste pagine qualche breve cenno su come la matematica riconosca i suoi limiti, mostrando che non si puo' mai raggiungere la certezza in nessuna teoria:

- Il paradosso del mentitore
- Antinomia di Russel
- Crisi dei fondamenti
- Teorema di Gödel
- Conclusioni

Per coloro che fossero interessati a sviluppare l'argomento segnalo il bellissimo libro di **Hofstadter:**
Gödel, Hescher, Bach - L'eterna ghirlanda brillante
Adelphi Edizioni.

a) Il paradosso del mentitore

Se faccio l'affermazione:

Io sto mentendo

Questa affermazione e' vera oppure e' falsa?

- Se l'affermazione fosse vera direi la verita' e quindi l'affermazione e' falsa
- Se l'affermazione fosse falsa direi la verita' e quindi l'affermazione e' vera

Comunque io la giri questa frase non ha senso perche' non puoi affermare se e' vera oppure falsa.
Questo e' un paradosso che si rifa' al paradosso del mentitore (VI secolo A.C.):

Tutti gli ateniesi sono bugiardi; se io vi dico che sto mentendo, sapendo che sono ateniese, vi dico la verita'?

- Se vi dico la verita' vuol dire che sto mentendo quindi non vi dico la verita'
- Se non vi dico la verita' vuol dire che non sto mentendo quindi e' vero che sto mentendo e vi dico la verita'

In pratica abbiamo un sistema autorefente, cioe' un qualcosa che si rifa' a se' stesso, e quindi abbiamo un risultato che non possiamo dire se sia vero o falso; diremo quindi che abbiamo un'antinomia, od anche un paradosso.

b) Antinomia di Russel

Nella seconda meta' del 1800 i matematici pensarono che per fondare la matematica su solide basi tutto avrebbe dovuto basarsi sulla teoria degli insiemi e, qualunque cosa doveva essere ricavata matematicamente dai postulati e dalle regole di inferenza. Questo avrebbe garantito alla matematica una solida base logica ed avrebbe assicurato l'effettiva verita' dei risultati.
Comunque tutto l'edificio venne messo in crisi dalla scoperta nella teoria degli insiemi di un'antinomia da parte di Russel.
Vediamola in particolare.
Ogni insieme ha la caratteristica o di contenere se' stesso come elemento oppure di non contenere se' stesso come elemento.
Vediamo un esempio:

- L'insieme di tutti gli uomini non e' un uomo e quindi tale insieme non contiene se' stesso come elemento.
- L'insieme di tutti i gruppi di esseri umani e' ancora un gruppo di esseri umani e quindi contiene se' stesso come elemento.

Ora possiamo considerare gli insiemi suddivisi in due categorie:

- L'insieme di tutti gli insiemi che contengono se' stessi come elemento.
- L'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se' stessi come elemento.

Se ora considero come un insieme il secondo gruppo, cioe' l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se' stessi come elemento posso dire se tale insieme appartiene al primo od al secondo gruppo?

- Se l'insieme fa parte del primo gruppo allora contiene se' stesso come elemento ma essendo l'insieme i tutti gli insiemi che non contengono se' stessi come elemento allora non contiene se' stesso come elemento.
- Se l'insieme fa parte del secondo gruppo, cioe' non contiene se' stesso come elemento allora per definizione, non contenendo se' stesso come elemento non puo' far parte del secondo gruppo e quindi fa parte degli insiemi che contengono se' stessi come elemento.

Insomma nessuno lo vuole! Ognuno gli da' un calcio e lo manda via.

Quindi non posso dire se l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se' stessi come elemento appartiene al primo oppure al secondo gruppo.

Russel evidenzio' che quando si ha auto-referenzialita', cioe' che dall'interno di una teoria si parla della teoria stessa, si ottengono risultati contraddittori.

Paradosso del barbiere: nel 1918 Russel propose una versione piu' semplice del suo paradosso:
Se in un villaggio isolato vi e' un solo barbiere che non porta la barba e che fa la barba a tutti gli abitanti del villaggio eccetto a quelli che se la fanno da soli.
Chi fa la barba al barbiere?
E' lo stesso paradosso: infatti

- non puo' farsi la barba da solo perche' la fa solo ai quelli che non se la fanno da soli
- non puo' farsi fare la barba da un altro perche' lui la fa a tutti quelli che non se la fanno da soli

c) Crisi dei fondamenti

Russel evidenzio' che quando si ha auto-referenzialita', cioe' che dall'interno di una teoria si parla della teoria stessa, si ottengono risultati contraddittori.
Quindi per ovviare all'inconveniente e ripristinare il programma di dotare la matematica di solide basi logiche elaboro' una complessa teoria dei tipi per cui un insieme infinito puo' essere contenuto in un altro insieme solamente se quest'ultimo e' di tipo piu' generale.

Altri matematici invece preferirono distinguere fra Matematica e discorsi intorno alla Matematica (Metamatematica) in modo da non confrontarsi con il concetto di infinito.
Comunque nel primo trentennio del 1900 sorsero varie scuole e varie opinioni su come trattare i fondamenti e, come risultato finale (1931), abbiamo il la.voro di Gödel che pone un punto fermo sulla questione con il suo **teorema di completezza**.

d) Teorema di Gödel

Diremo che un sistema e' **completo** se conosciamo ogni sua formula
Diremo che un sistema e' **coerente** se posso dimostrare tutte le sue formule, cioe' per ogni

sua formula posso dire se e' vera oppure falsa.
Il teorema di Gödel dice che:

Dato un qualunque sistema formale esso o e' coerente oppure e' completo.

Cioe' un sistema formale non puo' essere coerente e completo allo stesso tempo: se conosco tutte le formule del sistema allora ci sara' una formula per cui non posso dire se e' vera oppure falsa, viceversa se per ogni formula che conosco so se e' vera oppure e' falsa significa che ci sono altre formule nel sistema che ancora non ho individuato.

Vediamone un accenno di dimostrazione.
Ogni sistema formale si puo' trasformare in un sottoinsieme di **N** come abbiamo visto nelle pagine precedenti e ad ogni formula corrisponde il suo numero di Gödel.
Gödel mostro' che tra le varie formule e' possibile individuare una formula chiamata **G** che, una volta ritrasformata dal suo numero, dica:
"La formula G non e' dimostrabile"
Ricordo che dimostrabile significa che posso dire se e' vera oppure falsa
Anche qui ci troviamo di fronte ad un paradosso infatti

- Se **G** e' dimostrabile allora siccome vale "La formula G non e' dimostrabile" ne segue che **G** non e' dimostrabile.
- Se **G** non e' dimostrabile allora la formula "La formula G non e' dimostrabile" e' vera e quindi dimostrabile.

Per rincarare la dose Gödel applico' il suo ragionamento all' intera aritmetica e dimostro' che l'aritmetica nel suo complesso o e' completa oppure e' coerente.

e) Conclusioni

Quanto fatto nella pagina precedente significa che nell'aritmetica in particolare e nella matematica in generale non e' possibile riuscire a dimostrare la validita' di un ragionamento matematico partendo dagli assiomi ed utilizzando le normali regole di inferenza, cioe' la matematica riconosce i suoi limiti e ne prende atto.
Occorre quindi sollevarsi ad un livello superiore per poter superare l'ostacolo, ma anche a quel livello superiore, man mano che ti avvicinerai alla completezza ritorneranno i fenomeni di incoerenza, quindi bisogna passare ad un livello superiore per poter superare l'ostacolo ....

Le pur importantissime implicazioni filosofiche sono da considerare piccole rispetto ai problemi aperti sulla decidibilita' e sulla ricorsivita' che troveranno poi, negli anni '40, sviluppo in informatica.

G. *Principi di stenaritmia*

Dopo aver accennato argomenti molto elevati ora torniamo con i piedi per terra, anzi proprio terra-terra perche' vediamo di studiare i metodi per riuscire ad eseguire dei calcoli mentalmente nel modo piu' veloce possibile.

1. Introduzione

La **Stenaritmia**, o calcolo mentale rapido, e' un esercizio mentale che ormai, dopo l'introduzione delle calcolatrici, e' in decisa recessione. Quando ho iniziato ad insegnare (1967) era importante saper fare i calcoli velocemente ed anche mentalmente.
Oggi tale esercizio non e' piu' necessario, anche se ,secondo me, sarebbe utile; comunque, visto che ho insegnato tale metodo in un tecnico commerciale, ve lo riporto e, se a qualcuno interessa, ne saro' lieto.

Naturalmente devi conoscere le regole per tutte le operazioni per poter procedere al meglio, ma, per una questione di esposizione, procedo prima con l'addizione, poi la sottrazione, la moltiplicazione e quindi la divisione.

2. Addizione

Noi faremo i casi possibili partendo dai piu' semplici anche se, penso, sono quasi automatici; naturalmente devi conoscere le regole per tutte le operazioni per poter procedere al meglio, ma noi, per una questione di esposizione procediamo prima con l'addizione.

- Per addizionare mentalmente 11 ad un numero basta addizionare 10 e poi aggiungere 1:
  134 + 11 = 134 + 10 + 1 = 144 + 1 = 145
  Ed anche se il numero non e' 11:
  276 + 13 = 276 + 10 + 3 = 286 + 3 = 289
  La stessa cosa puoi fare quando il numero e' poco superiore a 100 o a 1000....
  134 + 105 = 134 + 100 + 5 = 234 + 5 = 239
  3578 + 10028 = 3578 + 10000 + 28 = 13578 + 20 + 8 = 13598 + 8 = 13598 + 2 + 6 = 13600 + 6 = 13606
- Per addizionare 9 ad un numero basta addizionare 10 e togliere 1:
  134 + 9 = 134 + 10 - 1 = 143
  La stessa cosa puoi fare quando il numero e' poco minore di 100 o di 1000....
  134 + 98 = 134 + 100 - 2 = 232
  3578 + 9988 = 3578 + 10000 - 12 = 13566
- Per addizionare piu' numeri conviene associare qualche addendo per avere somme parziali con finale 0:
  13 + 44 + 27 + 16 + 15 = (13+27) + (44 + 16) + 15 = 40 + 60 + 15 = 115
  Talvolta conviene dissociare (come ho fatto in un esempio sopra dissociando 8 = 2+6)
  27 + 15 + 38 + 17= 27 + (13 + 2) + 38 + 17 = (27 + 13) + (2 + 38) + 17 = 40 + 40 + 17 = 97
  Puoi farlo anche con due numeri:
  66 + 25 = 66 + 4 + 21 = 70 + 21 = 91

Naturalmente devi fare questi calcoli mentalmente e vedrai che con un po' di esercizio diventano quasi automatici, e la tua velocita' sara' molto superiore a quello di una calcolatrice manuale (provare per credere).

3. Sottrazione

- Per sottrarre 11 da un numero basta togliere 10 e poi togliere 1:
  134 - 11 = 134 - 10 - 1 = 124 - 1 = 123

Ed anche se il numero non e' 11:
276 - 13 = 276 - 10 - 3 = 266 - 3 = 263
La stessa cosa puoi fare quando il numero e' poco maggiore di 100 o di 1000....
234 - 108 = 234 - 100 - 8 = 134 - 8 = 126
13578 - 10022 = 13578 - 10000 - 22 = 3578 - 22 = 3578 - 20 - 2 = 3558 - 2 = 3556

- Per sottrarre 9 da un numero basta togliere 10 e aggiungere 1:
  134 - 9 = 134 - 10 + 1 = 125
  Ed anche se il numero non e' 9:
  276 - 7 = 276 - 10 + 3 = 269
  La stessa cosa puoi fare quando il numero e' poco minore di 100 o di 1000....
  134 - 98 = 134 - 100 + 2 = 36
  13578 - 9988 = 13578 - 10000 + 12 = 3590
- Si puo' aggiungere un numero ad entrambe i termini di una sottrazione per renderla calcolabile piu' rapidamente:
  96 - 44 = 100 - 48 = 52
  Allo stesso modo si puo' anche togliere:
  158 - 44 = 154 - 40 = 114

4. Moltiplicazione

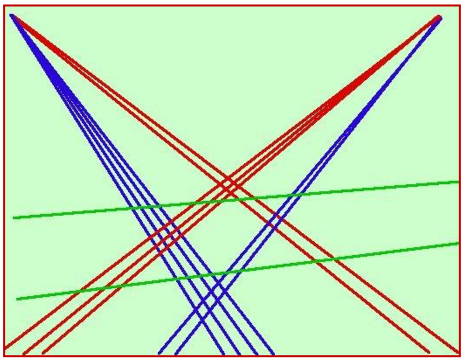
- Per moltiplicare un numero intero per 10,100, 1000,... basta aggiungere alla sua destra 1,2,3,... zeri:
  134 x 100 = 13400
  Se il numero e' decimale basta spostare la virgola verso destra di 1,2,3,... posti
  0,276 x 100 = 27,6
  0,276 x 10000 = 2760,0 = 2760
- Per moltiplicare un numero per 4 si puo' moltiplicarlo per 2 e poi ancora per 2
  36 x 4 = 36 x 2 x 2 = 72 x 2 = 144
  stessa cosa per 8: basta moltiplicare 3 volte per 2
  41 x 8 = 41 x 2 x 2 x 2 = 82 x 2 x 2 = 164 x 2 = 328
  La stessa cosa puoi fare quando il numero e' moltiplicato per 20, per 40, per 80,....
  134 x 20 = 134 x 2 x 10 = 268 x 10 = 2680
  43 x 80 = 43 x 2 x 2 x 2 x 10 = 86 x 2 x 2 x 10 = 172 x 2 x 10 = 344 x 10 = 3440
  Se l'ultima cifra del numero iniziale e' abbastanza piccola puoi nello steso modo moltiplicare per 30, 300,... per 40, 400, ..
  132 x 40 = 132 x 2 x 2 x 10 = 264 x 2 x 10 = 528 x 10 = 5280
  43 x 300 = 43 x 3 x 100 = 129 x 100 = 12900
- Per moltiplicare un numero per 11, 101, 1001, ... si puo' moltiplicarlo per 10, 100, 1000, poi aggiungere al risultato il numero stesso.
  44 x 11 = 44 x 10 + 44 = 440 + 44 = 484
  44 x 101 = 44 x 100 + 44 = 4400 + 44 = 4444
  Allo stesso modo, se il numero e' abbastanza "semplice" puoi eseguire le moltiplicazioni per 12, 102,...
  32 x 12 = 32 x 10 + 32 x 2 = 320 + 64 = 384
- Se hai numeri con le cifre abbastanza "semplici" puoi anche moltiplicare mentalmente per 21, 31,..
  31 x 21 = 31 x 20 + 31 = 31 x 2 x 10 = 62 x 10 + 31 = 620 + 31 = 651
  21 x 41 = 21 x 4 x 10 + 21 = 84 x 10 + 21 = 840 + 21 = 861

- Per moltiplicare un numero per 9, 99, 999, ... si puo' moltiplicarlo per 10, 100, 1000, poi togliere al risultato il numero stesso.
  45 x 9 = 45 x 10 - 45 = 450 - 45 = 405
  44 x 99 = 44 x 100 - 44 = 4400 - 44 = 4400 - 40 - 4 = 4360 - 4 = 4356
- Per moltiplicare un numero per 5, 50, 500, ... si puo' moltiplicarlo per 10, 100, 1000, poi dividere il risultato per 2.
  45 x 5 = 45 x 10 : 2 = 450 : 2 = 225
  44 x 50 = 44 x 100 : 2 = 4400 : 2 = 2200
  Similmente, per moltiplicare un numero per 25, 250, 2500, ... si puo' moltiplicarlo per 100, 1000, 10000, poi dividere il risultato per 4.
  45 x 25 = 45 x 100 : 2 : 2 = 4500 : 2 : 2 = 2250 : 2 =1125
  44 x 250 = 44 x 1000 : 2 : 2 = 44000 : 2 : 2 = 22000 : 2 = 11000
  Per moltiplicare un numero per 125 si puo' moltiplicarlo per 1000 poi dividere il risultato per 8.
  48 x 125 = 48 x 1000 : 2 : 2 : 2 = 48000 : 2 : 2 :2 = 24000 : 2 : 2 = 12000 : 2 = 6000

Quanto fatto sopra e' sufficiente a permetterti di eseguire agevolmente la maggior parte delle moltiplicazioni fra numeri di due cifre,io li uso normalmente, ma se vuoi approfondire meglio ti aggiungo una pagina con metodi piuttosto "specialistici" (io pero' di solito questi non li uso: mi sono sufficienti i precedenti).

Calcoli mentali particolari

- Quando devo moltiplicare due numeri che differiscono di poco (per un numero pari) posso usare la proprieta' della somma di due numeri per la loro differenza (da usare specialmente se i due numeri hanno come media un numero che termina per zero):
  24 x 26 = (25 - 1) x (25 + 1) = 625 - 1 = 624
  37 x 43 = (40 - 3) x (40 + 3) = 1600 - 9 = 1591
- Quando devo moltiplicare due numeri entrambe poco superiori a 100 posso utilizzare la seguente regola, che deriva dal prodotto fra polinomi :
  (100 + a) x (100 + b) = 10000 + 100a + 100b + ab = 10000 + 100(a + b) + ab
  112 x 105 = 10000 + 1200 + 500 + 60 = 11760
- Quando i numeri da moltiplicare hanno due cifre posso anche fare mentalmente l'operazione seguendo lo schema che uso per farla scritta. Esempio:
  45 x 62 =
  Comincio dalle cifre dell'unita':
  5 x 2 = 10
  la cifra delle unita' e 0 e riporto 1 sulle decine
  Poi moltiplico le decine per le unita' e le sommo, aggiungo anche la cifra riportata:
  4 x 2 + 5 x 6 + 1 = 8 + 30 + 1 = 39
  La cifra delle decine e' 9 e riporto 3 sulle centinaia.
  Poi moltiplico le decine fra di loro ed aggiungo la cifra riportata:
  4 x 6 + 3 = 27
  Quindi il numero e' **= 2790**
- Quando i numeri da moltiplicare hanno cifre abbastanza piccole posso usare il seguente metodo grafico
  24 x 32 =



5. Divisione

Sulla divisione, mentalmente, non riesco a fare moltissimo, comunque qualcosa si riesce a fare

- Per dividere un numero intero per 10,100, 1000,... basta staccare con una virgola alla sua sinistra 1,2,3,... numeri, aggiungendo degli zeri se i numeri non ci sono:
  134 : 100 = 1,34
  134 : 10000 = 0,0134
  Lo stesso vale per un numero decimale: basta spostare la virgola verso sinistra di 1,2,3,... posti:
  27,6 : 100 = 0,276
  0,276 : 10000 = 0,0000276
- Per dividere un numero per 4 si puo' dividerlo per 2 e poi ancora per 2 :
  236 : 4 = 236 : 2 : 2 = 118 : 2 = 59
  stessa cosa per 8; basta dividere 3 volte per 2:
  468 : 8 = 468 : 2 : 2 : 2 = 134 : 2 : 2 = 67 : 2 = 33,5
  La stessa cosa puoi fare quando il numero e' diviso per 20, per 40, per 80,....
  1342 : 20 = 1342 : 2 : 10 = 671 : 10 = 67,1
  488 : 80 = 488 : 2 : 2 : 2 : 10 = 244 : 2 : 2 : 10 = 122 : 2 : 10 = 61 : 10 = 6,1
- Per dividere un numero per 5, 50, 500, ... si puo' dividerlo per 10, 100, 1000, poi moltiplicare il risultato per 2.
  450 : 5 = 450 : 10 x 2 = 45 x 2 = 90
  44 : 50 = 44 : 100 x 2 = 0,44 x 2 = 0,88
  Allo stesso modo, per dividere un numero per 25, 250, 2500, ... si puo' dividerlo per 100, 1000, 10000, poi moltiplicare il risultato per 4.
  3240 : 25 = 3240 : 100 x 4 = 3,24 x 4 = 3,24 x 2 x 2 = 6,48 x 2 = 12,96
- Per dividere un numero per 0,5 0,05 0,005 ... si puo' moltiplicarlo per 2, 20, 200,...
  45 : 0,5 = 45 x 2 = 90
  44 : 0,05 = 44 x 20 = 44 x 2 x 10 = 88 x 10 = 880
  Similmente, per dividere un numero per 0,25 0,025 ... si puo' moltiplicarlo per 4, 40,....
  45 : 0,25 = 45 x 4 = 45 x 2 x 2 = 90 x 2 = 180