Geometria Cartesiana

A. *Introduzione*

La *Geometria Cartesiana* e' una delle massime conquiste dell'umanita' ed ha mostrato come mediante il pensiero matematico sia possibile filtrare il mondo reale in modo univoco (unitarieta' del sapere).
E' possibile studiare un fenomeno sottoponendolo a varie discipline ma qualunque disciplina, che si basi sulla matematica, usata per studiare il reale dara' sempre gli stessi risultati: se e' possibile passare da una disciplina ad un'altra allora i risultati ottenuti saranno equivalenti.
Nella Geometria Cartesiana vedremo come si puo' passare dall'algebra alla geometria e viceversa; trasformeremo un problema geometrico in un problema algebrico e viceversa utilizzando per risolvere il problema stesso la disciplina piu' conveniente.

Perche' la Geometria Cartesiana

Nelle varie discipline della matematica spesso ci si accorge che vi sono delle costruzioni equivalenti; questo non succede per caso.
Se le costruzioni sono equivalenti e' perche' la matematica e' unica mentre possono variare gli oggetti su cui essa opera.
Hilbert, forse il maggior matematico del XX° secolo, diceva che se invece di numeri prendessimo dei boccali di birra la matematica sarebbe sempre la stessa (Io dico che allora sarebbe anche piu' divertente).

Equivalenza Algebra-Geometria

Se noi consideriamo come base dei numeri oppure dei punti la matematica dovra' essere la stessa: in effetti la geometria cartesiana e' la disciplina ponte fra la Geometria (basata sul concetto di punto) e l'Algebra (basata sul concetto di numero).
Cio' significa che qualunque problema geometrico puo' essere trasformato in problema algebrico e viceversa:
Se un problema e' troppo difficile per risolverlo in geometria lo trasformo in un problema algebrico e risolvo le equazioni relative.
Viceversa se un problema algebrico mi da' delle difficolta' lo trasformero' in problema geometrico in modo da usare la rappresentazione geometrica per risolverlo.

Come fare

La geometria e' caratterizzata dal concetto di punto.
L'algebra inizia dal concetto di numero.
Quindi dovremo impostare una corrispondenza biunivoca fra punti e numeri in modo da passare dai punti ai numeri e viceversa

---

Una corrispondenza fra due insiemi di enti si dice biunivoca quando ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme;
Due insiemi di enti in corrispondenza biunivoca avranno sempre le stesse proprieta'

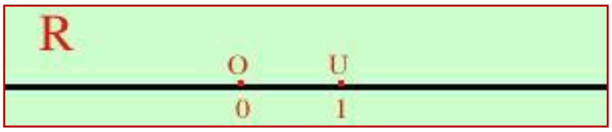
B. *Sistema di coordinate cartesiane sulla retta*

1. Introduzione

Consideriamo una retta e consideriamo l'insieme dei numeri reali, dobbiamo far corrispondere i punti della retta ed i numeri reali in modo che ad ogni punto corrisponda un numero e ad ogni numero corrisponda un punto (corrispondenza biunivoca).

2. Sistema di coordinate e ascisse sulla retta

Prendo una retta e su di essa fisso un punto O (origine) e ad esso associo il valore 0, poi, a destra di 0, fisso un altro punto e lo chiamo U (punto unita') e ad esso associo il valore 1.



In questo modo viene definita una corrispondenza biunivoca fra tutti i punti della retta ed i numeri reali, nel senso che ad ogni punto corrisponde un numero reale e ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta.

3. Convenzioni

Indicheremo i punti con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino:
A, B, C, D, ...
Mentre indicheremo i numeri reali corrispondenti, quando non ne usiamo i valori specifici ma indichiamo dei valori generici, con le lettere minuscole:
a, b, c, .. x, y, z.
con la convenzione di usare le prime lettere dell'alfabeto:
a, b, c, d, ..
per i valori che ci sono noti, mentre useremo le ultime lettere dell'alfabeto
x, y, z, t, v, w ...
per valori che non conosciamo e che debbono essere trovati. Inoltre:

O indichera' sempre l'origine

A indichera' un punto di cui conosciamo il valore

a indichera' il numero reale associato al punto A

0 indichera' il numero reale associato al punto O

1 indichera' il numero reale associato al punto U

x indichera' il numero reale (non noto) associato ad un punto P da determinare.

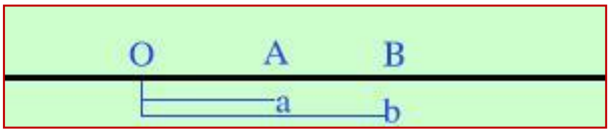
4. Distanza fra due punti

E' l'unica cosa che possiamo fare sulla retta.

In tutta la geometria cartesiana quando assegno un numero ad un segmento dovrei indicare il segmento stesso con un trattino sopra come ad esempio:
$\overline{AB} = 10$
E si legge: la misura di AB vale 10 unita' di misura
Poiche' pero' mi sarebbe difficile indicare la misura correttamente su queste pagine invece di mettere una linea sopra mettero'
una linea sotto nel seguente modo
$\underline{AB} = 10$
Dovrai essere tu a riscrivere la misura correttamente quando eseguirai un esercizio

---

Siano dati A=(a) e B=(b).
Per trovare la distanza $\underline{AB}$, se siamo in una situazione quale in figura, dovro' fare:



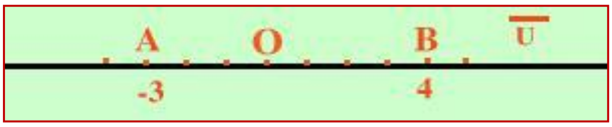
d(AB) = $\underline{AB}$ = $\underline{OB}$ - $\underline{OA}$ = b – a
Poiche' pero' potrei anche avere i punti disposti in altre posizioni rispetto all'origine, bisogna che la distanza sia sempre positiva, cio' lo otterro' semplicemente applicando il modulo al risultato cioe'
d(AB) = |b - a|

Esempi:
Trovare la distanza fra i punti:
A=(5) e B=(8)
d(AB) = |8 - 5| = 3

Trovare la distanza fra i punti:
A=(-3) e B=(-4)
d(AB) = |-3 - (-4)| = |-3 + 4| = |1| = 1

Trovare la distanza fra i punti:
A=(-3) e B=(4)
d(AB) = |-3 - (+4)| = |-3 - 4| = |-7| = 7

E' sempre possibile trasformare questi problemi da algebrici in geometrici e vedere il risultato in geometria.
Ad esempio l'ultimo esercizio verrebbe come da figura e se conti gli intervalli di un'unita' tra A e B vedrai che sono 7



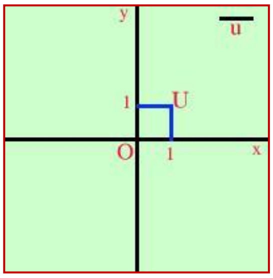
C. La geometria cartesiana nel piano: la retta

1. Il sistema di coordinate cartesiane nel piano

In pratica dobbiamo riprendere il sistema come fatto sulla retta e lo applichiamo su due rette perpendicolari

---

Consideriamo un piano e, su di esso, due rette fra loro perpendicolari e un'unita' di misura u.
Indichiamo come punto O (origine) il punto di incontro delle rette e ad esso assegniamo la coppia di valori (0,0).
Sulla retta orizzontale fisso il punto 1 ottenuto riportando a destra di O l'unita' di misura.
Sulla retta verticale fisso il punto 1 ottenuto riportando in alto



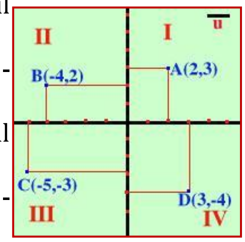
rispetto ad O l'unita' di misura.
Dal primo punto ottenuto mando la verticale e dal secondo l'orizzontale; chiamo U (unita') o punto (1,1) il punto ottenuto.
In questo modo ottengo una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali, nel senso che ad ogni coppia di numeri corrisponde un punto nel piano e ad ogni punto nel piano corrisponde una coppia di numeri reali.

Indicheremo con **x** o asse delle ascisse la retta orizzontale.
Indicheremo invece con **y** o asse delle ordinate la retta verticale.

Con la costruzione precedente abbiamo diviso il piano in 4 parti che chiameremo quadranti e di solito vengono indicati con numeri romani

---

- Nel primo quadrante i punti hanno entrambe le coordinate positive -vedi ad esempio il punto A(2,3).
- Nel secondo quadrante i punti hanno la prima coordinata negativa e la seconda positiva - vedi ad esempio il punto B (-4,2).
- Nel terzo quadrante i punti hanno entrambe le coordinate negative - vedi ad esempio il punto C(-5,-3).
- Nel quarto quadrante i punti hanno la prima coordinata positiva e la seconda negativa - vedi ad esempio il punto D(3,-4).

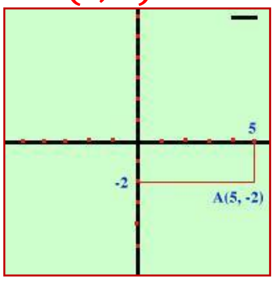


L'asse orizzontale sara' chiamato asse x oppure asse delle ascisse e i suoi punti avranno sempre la seconda coordinata uguale a zero (1,0) (2,0) (3,0) sono tutti punti sull'asse x.

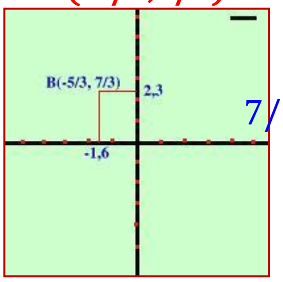
L'asse verticale sara' chiamato asse y oppure asse delle ordinate e i suoi punti avranno sempre la prima coordinata uguale a zero (0,1) (0,2) (0,3) sono tutti punti sull'asse y.

Proviamo ora a fare qualche esercizio. Disponi su un piano cartesiano i seguenti punti:

1. **A = (5,-2):**

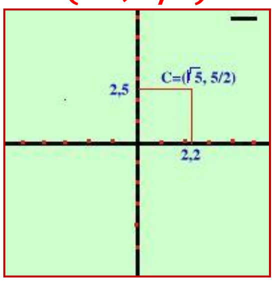


2. **B = (-5/3,7/3):**



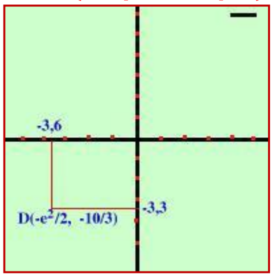
Per risolverlo trasformiamo le frazioni :
-5/3 vale circa -1,6
7/3 7/3 vale circa 2,3

3. **C = ($\sqrt{5}$, 5/2):**



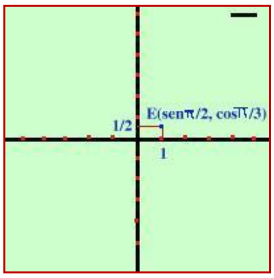
Per risolverlo calcoliamo i valori (magari con la calcolatrice) :
$\sqrt{5}$ vale circa 2,2
5/2 vale 2,5

4. D = (-e²/2,-10/3):



Per risolverlo calcoliamo i valori (magari con la calcolatrice) :
- $e^2/2$ vale circa -3,6
$-10/3$ vale circa -3,3

5. $\mathbf{E = (sen\frac{\pi}{2}), (cos\frac{\pi}{3})}$



Per risolverlo calcoliamo i valori:

$sen\frac{\pi}{2}$ vale 1

$cos\frac{\pi}{3}$ vale circa ½

---

2. Convenzioni

Indicheremo i punti del piano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino:

A, B, C, D, ...

mentre indicheremo le coppie di numeri reali corrispondenti, con le lettere minuscole

(x,y)

con la convenzione di usare le prime lettere dell'alfabeto

(a,b), (c,d)

oppure le ultime lettere dotate di indici

$(x_1, y_1,)$ $(x_2, y_2,)$ (x_3, y_3)

per indicare i valori che ci sono noti.
Invece useremo le ultime lettere dell'alfabeto senza indici per valori che non conosciamo e che debbono essere trovati.

(x, y)

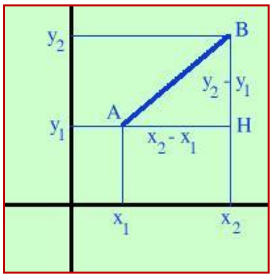
Inoltre: O indichera' sempre l'origine.
Quindi:
$A = (x_1, y_1)$ indichera' un punto di cui conosciamo il valore
$P = (x, y)$ indichera' un punto di cui dobbiamo trovare il valore

3. Distanza fra due punti nel piano

Consideriamo i punti nel piano:
$A = (x_1, y_1)$ $B = (x_2, y_2)$
voglio trovare la loro distanza.

Il fatto di indicare le coordinate con x_1, y_1, x_2, y_2 significa che in un problema questi dati debbono essere noti

---



Per comodita' supponiamo che entrambe i punti si trovino nel primo quadrante; la formula che otterremo sara' comunque valida in tutto il piano.
Da A e B traccio le coordinate e considero il triangolo rettangolo ABH.
Di esso conosco:
AH = $x_2 - x_1$
BH = $y_2 - y_1$
Utilizzando il Teorema di Pitagora posso trovare AB:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$AB = \sqrt{(AH^2 + BH^2)}$$

Sostituendo:

$$AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$$

Ecco come si legge la formula:
Prima devo leggere la parte prima dell'uguale:
la distanza fra due punti nel piano (AB)
e' uguale (=)
Ora dopo l'uguale devo prima leggere le operazioni che coinvolgono i termini; la prima e' la radice
alla radice quadrata(√)
l'altra operazione che coinvolge i termini e' la somma
della somma
la somma e' fra i quadrati
dei quadrati
dentro le parentesi tonde ci sono le differenze fra le coordinate prime e fra le coordinate seconde, chiamiamo omonime quelle che si riferiscono entrambe alle x o entrambe alle y
delle differenze fra le coordinate omonime (x_2-x_1) e (y_2-y_1)
quindi raccogliendo:

La distanza fra due punti nel piano e' uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze fra le coordinate omonime dei punti considerati

---

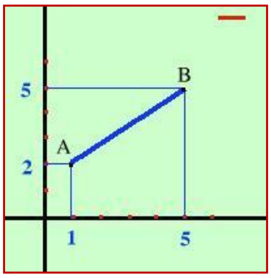
Ecco qualche esercizio:

Esercizio 1 - Trovare la distanza fra i punti A(1,2) e B(5,5)

Scrivo la formula:

E' buona regola ogni volta che ti serve una formula scriverla sul foglio, cosi' senza troppa fatica fisserai le varie formule nella tua memoria

---



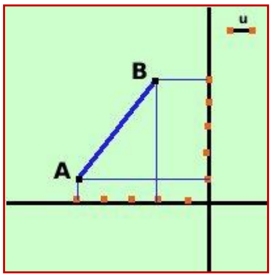
$$AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$$

So che A = (1,2) = (x_1, y_1)
e che B = (5,5) = (x_2, y_2)
quindi:
$x_1 = 1$ $y_1 = 2$ $x_2 = 5$ $y_2 = 5$
sostituisco nella formula:

$$AB = \sqrt{[(5 - 1)^2 + (5 - 2)^2]} = \sqrt{(4^2 + 3^2)} = \sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{25} = 5$$

quindi il segmento AB e' lungo 5 unita' del piano come puoi anche vedere (grosso modo) dalla figura.

Esercizio 2 - Trovare la distanza fra i punti A(-5,1) e B(-2,5)



Scrivo la formula:

$AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$

So che A = (-5,1) = (x_1, y_1)

e che B = (-2,5) = (x_2, y_2)

quindi: x_1 = -5 y_1 = 1 x_2 = -2 y_2 = 5

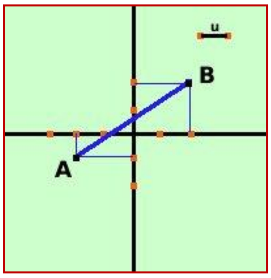
sostituisco nella formula:

$\underline{AB} = \sqrt{[-2-(-5)]^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(-2+5)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

quindi il segmento AB e' lungo 5 unita' del piano come puoi anche vedere (grosso modo) dalla figura

---

Esercizio 3 - Trovare la distanza fra i punti A(-2,-1) e B(2,2)



Scrivo la formula:

$AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$

So che A = (-2,-1) = (x_1, y_1)

e che B = (2,2) = (x_2, y_2)

quindi:

x_1 = -2y_1 = -1x_2 = 2 y_2 = 2

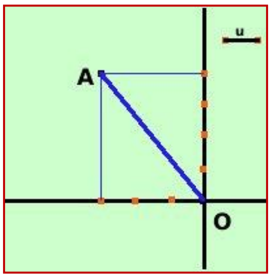
sostituisco nella formula:

$\underline{AB} = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

quindi il segmento AB e' lungo 5 unita' del piano come puoi anche vedere (grosso modo) dalla figura

---

Esercizio 4 - Trovare la distanza fra i punti A(-3,4) e B(0,0)



Essendo B(0,0) l'origine degli assi e' meglio chiamarla O(0,0)

Scrivo la formula:

$AO = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$

So che A = (-3,4) = (x_1, y_1)

e che O = (0,0) = (x_2, y_2)

quindi:

x_1 = -3y_1 = 4 x_2 = 0 y_2 = 0

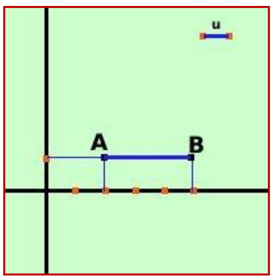
sostituisco nella formula:

$\underline{AO} = \sqrt{[0-(-3)]^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

quindi il segmento AB e' lungo 5 unita' del piano come puoi anche vedere (grosso modo) dalla figura

---

Esercizio 5 - Trovare la distanza fra i punti A(2,1) e B(5,1)



Se guardi le coordinate vedi che i due punti hanno le y uguali. Se osservi la figura vedi che il segmento da trovare e' orizzontale e vale esattamente 3; cioe' la differenza fra le x presa sempre positiva (modulo)

AB = $|x_2 - x_1|$ dai un'occhiata al modulo . In questo modo hai gia' risolto il problema. Se non te ne accorgi quando scrivi al formula trovi che ti si annulla tutta una parentesi, facciamolo per vederlo meglio

Scrivo la formula:

$AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$

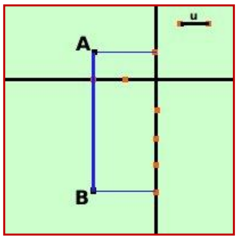
So che A = (2,1) = (x_1, y_1)

e che B = (5,1) = (x_2, y_2)

quindi: $x_1 = 2$ $y_1 = 1$ $x_2 = 5$ $y_2 = 1$
sostituisco nella formula:
$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$
Ma, logicamente, il modo giusto di risolvere l'esercizio e' l'altro, quindi quando ti accorgi che si annulla una parentesi cancella tutto e sviluppa il primo metodo

---

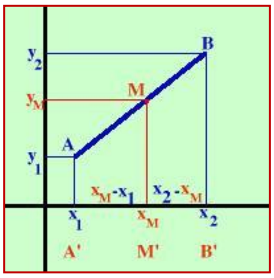
Esercizio 6 - **Trovare la distanza fra i punti A(-2,1) e B(-2,-4)**



Se guardi le coordinate vedi che i due punti hanno le x uguali
Se osservi la figura vedi che il segmento da trovare e' verticale e vale esattamente 5; cioe' la differenza fra le y presa sempre positiva (modulo), perche' le distanze sono sempre positive.
$\overline{AB} = |y_2 - y_1|$ dai un'occhiata al modulo .
In questo modo hai gia' risolto il problema
Se non te ne accorgi quando scrivi la formula trovi che ti si annulla tutta una parentesi, facciamolo per vederlo meglio.
Scrivo la formula:
$AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$
So che $A = (-2,1) = (x_1, y_1)$
e che $B = (-2,-4) = (x_2, y_2)$
quindi: $x_1 = -2$ $y_1 = 1$ $x_2 = -2$ $y_2 = -4$
Sostituisco nella formula:
$AB = \sqrt{[-2-(-2)]^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{(-2+2)^2 + (5)^2} = \sqrt{0+25} = \sqrt{25} = 5$
Ma, logicamente, il modo giusto di risolvere l'esercizio e' l'altro, quindi quando ti accorgi che si annulla una parentesi cancella tutto e sviluppa il primo metodo

4. Punto medio di un segmento

Conoscendo le coordinate di due punti nel piano e' possibile determinare le coordinate del loro punto intermedio (punto medio del segmento)



Consideriamo i punti nel piano:
$A = (x_1, y_1)$ $B = (x_2, y_2)$
Inoltre chiamo $M = (x_M, y_M)$ il loro punto di mezzo.
Per comodita' supponiamo che i punti si trovino nel primo quadrante;
la formula che otterremo sara' comunque valida in tutto il piano
Da A , B e M traccio le coordinate.
Sull'asse x le proiezioni saranno A' , B' e M'
Poiche' M e' il punto di mezzo fra A e B allora anche M' sara' il punto di mezzo fra A' e B'

Per il Teorema di Talete essendo le verticali fra loro parallele.

Quindi: $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$
Sostituendo le misure:
$x_M - x_1 = x_2 - x_M$
devo ricavare x_M:
$x_M + x_M = x_1 + x_2$
$2x_M = x_1 + x_2$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Come ho trovato il punto medio sulle **x** posso trovarlo sulle **y**:

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Riepilogando $M = ((x_1 + x_2)/2 , (y_1 + y_2)/2)$

Il punto medio di un segmento di estremi dati e' dato dalla semisomma delle coordinate omonime degli estremi stessi.

Esempio: **Trovare il punto medio del segmento di estremi A(2,3) e B(4,7)**

$x_M = (2 + 4)/2 = 6/2 = 3$

$y_M = (3 + 7)/2 = 10/2 = 5$

quindi M(3,5).

a) Punto che divide un segmento in un rapporto assegnato

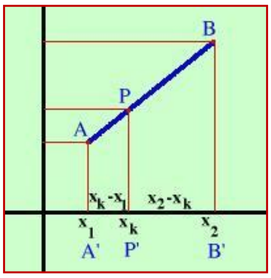
Conoscendo le coordinate di due punti nel piano e' possibile determinare le coordinate di un loro punto intermedio che divida il segmento secondo un rapporto assegnato m/n .

Consideriamo i punti nel piano:

$A = (x_1, y_1)$ $B = (x_2, y_2)$

Inoltre chiamo $P = (x_k, y_k)$

il punto che divide il segmento nel rapporto k=m/n:



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n}$$

Per comodita' supponiamo che i punti si trovino nel primo quadrante, la formula che otterremo sara' comunque valida in tutto il piano.

Da A , B e P traccio le coordinate.

Sull'asse x le proiezioni saranno A' , B' e P'

Poiche' P e' il punto fra A e B che divide il segmento nel rapporto m/n allora anche P' dividera' il segmento A' B' nello stesso rapporto (Teorema di Talete). Quindi:

$$\frac{\overline{A'P'}}{\overline{P'B'}} = \frac{m}{n}$$

Sostituendo le misure:

$$\frac{x_k - x_1}{x_2 - x_k} = \frac{m}{n}$$

Faccio il minimo comune multiplo (o equivalentemente moltiplico in croce)

$n(x_k - x_1) = m(x_2 - x_k)$ moltiplico: $nx_k - nx_1 = mx_2 - mx_k$

Devo ricavare x_k, quindi porto i termini che lo contengono prima dell'uguale

$nx_k + mx_k = nx_1 + mx_2$

raccolgo x_k:

$x_k(n + m) = nx_1 + mx_2$

Risolvendo rispetto a x_k trovo la formula finale:

$$x_k = \frac{nx_1 - mx_2}{n + m}$$

In modo equivalente trovero' la formula per la coordinata y:

$$y_k = \frac{ny_1 - my_2}{n + m}$$

5. Il piano cartesiano e la retta

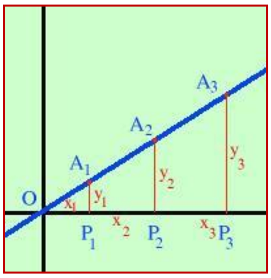
a) Introduzione

Ora si comincia effettivamente a fare qualcosa di serio: stabiliremo l'equivalenza fra una retta nel piano e l'equazione generica di primo grado in due incognite. Meglio ancora, stabiliremo l'equivalenza fra la retta nel piano e la funzione di primo grado ad una incognita.
In ogni modo mi servira' il seguente postulato della geometria euclidea:

Per due punti passa una ed una sola retta

b) Retta per l'origine

Consideriamo dei punti allineati con l'origine degli assi:
$A_1 = (x_1, y_1)$ $A_2 = (x_2, y_2)$ $A_3 = (x_3, y_3)$ ....
I puntini stanno ad indicare che posso prendere quanti punti voglio. Al solito posizioniamo i punti nel primo quadrante, il risultato sara' comunque valido in tutto il piano
Dai punti A_1 A_2 A_3 mando le perpendicolari sull'asse x e trovo i punti P_1 P_2 P_3; so che:
$\overline{OP_1} = x_1$ $\overline{OP_2} = x_2$ $\overline{OP_3} = x_3$
inoltre
$\overline{A_1P_1} = y_1$ $\overline{A_2P_2} = y_2$ $\overline{A_3P_3} = y_3$
Cosa notiamo? Essendo i punti allineati i triangoli
OA_1P_1, OA_2P_2, OA_3P_3
sono simili quindi posso fare la proporzione:



$$\frac{A_1P_1}{OP_1} = \frac{A_2P_2}{OP_2} = \frac{A_3P_3}{OP_3}$$

e questo vale per tutti i punti che sono allineati.
Se il rapporto lo chiamo m:

$$\frac{A_1P_1}{OP_1} = \frac{A_2P_2}{OP_2} = \frac{A_3P_3}{OP_3} = m$$

allora per tutti i punti allineati potro' dire che il rapporto fra la coordinata verticale e quella orizzontale sara' m:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = m$$

Preso un punto generico P(x,y) esso sara' allineato se:

$$\frac{y}{x} = m$$

sviluppando: $y = mx$

$$y = mx$$

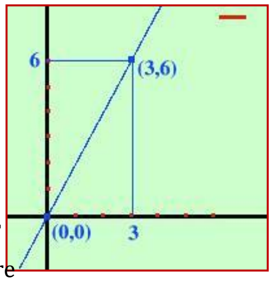
Sara' quindi **l'equazione della retta passante per l'origine**.

In particolare porremo:

- per l'asse delle x l'equazione $y = 0$
- per l'asse delle y l'equazione $x = 0$

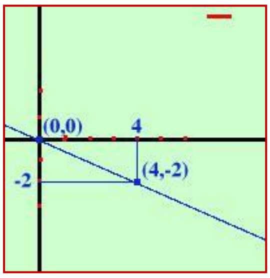
L'equazione y = 0 corrisponde al valore m = 0 mentre esiste una retta che corrisponde ad un valore di m che non esiste: il valore infinito; a questa retta (asse y) assegniamo l'equazione x = 0

(1) Come si disegna la retta per l'origine



Per disegnare una retta sul piano bastera' individuare due suoi punti e poi tracciarne la congiungente.
Vediamo qualche semplice esempio,tracciamo:
$y = 2x$
Diamo dei valori qualunque alla x e leggiamo i valori corrispondenti per la y (nella retta per l'origine conviene dare come primo valore lo zero e come secondo un valore abbastanza lontano per tracciare meglio la retta)

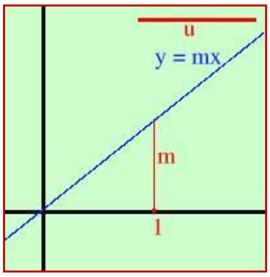
x	y
0	0
3	6



Tracciamo:
$y = -1/2\ x$
Diamo dei valori qualunque alla x e leggiamo i valori corrispondenti per la y (conviene cercare come secondo valore un valore che faccia sparire la frazione, ad esempio 4)

x	y
0	0
4	-2

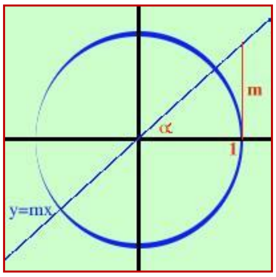
(2) Significato di m



Come avrai potuto notare il coefficiente **m** deve essere legato alla pendenza della retta. Infatti considero l'equazione:
$y = mx$
se ad x sostituisco il valore 1 avro' per y il valore m.
Traccio la retta:

x	y
0	0
1	m

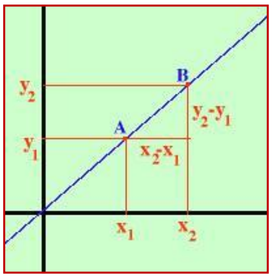
quindi piu' m e' grande e piu' la retta tendera' verso l'alto. Analogamente se m e' negativo la retta tendera' verso il basso



Se considero il cerchio trigonometrico (di raggio 1)
Il coefficiente angolare e' la tangente trigonometrica dell'angolo ***α*** che la retta forma con il semiasse positivo delle x
$m = \text{tang}\ \alpha$

---

(3) Come si determina m



In pratica m e' uguale al rapporto y/x quindi per determinarlo bastera' che io faccia il rapporto fra un segmento verticale ed il corrispondente segmento orizzontale. Quindi considero i punti:
$A = (x_1, y_1)$ $B = (x_2, y_2)$

Traccio le coordinate: poiche' devo fare y/x posso fare la differenza verticale tra A e B fratto la differenza orizzontale fra A e B quindi:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1}$$

Questa e' una formula molto importante che avremo spesso occasione di usare per qualunque retta e non solo per la retta passante per l'origine

---

Esempio:

Trovare il coefficiente angolare della retta che passa per i punti A= (2,4) B = (3,6)

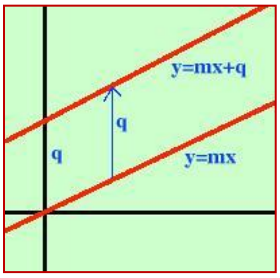
Essendo:

$x_1 = 2 \quad y_1 = 4 \quad x_2 = 3 \quad y_2 = 6$

sara':

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1} = \frac{6-4}{3-2} = 2$$

c) Retta qualunque nel piano



Per trovare l'equazione della retta qualunque nel piano bastera' prendere l'equazione della retta passante per l'origine

$y = mx$

e spostarla verso l'alto di una quantita' q, otterremo:

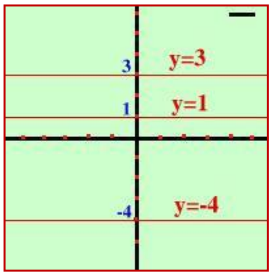
$y = mx + q$

Questa si assume come equazione esplicita della retta

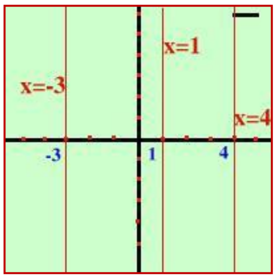
Casi particolari

Come caso particolare dobbiamo considerare le rette orizzontali e verticali:

- rette orizzontali:la forma della retta e': $y =$ costante



- rette verticali:la forma della retta e': $x =$ costante



---

(1) Significato di q

Per quanto visto nella pagina precedente avremo che ogni retta di equazione;

$y = mx + q$

tagliera' sempre l'asse delle y nel punto di coordinate:

$(0,q)$

quindi **q** sara' chiamata: ordinata all'origine

Esempio:
se considero l'equazione della retta
$y = 2x + 3$
so subito che tale retta taglia l'asse delle y nel punto
(0,3)

(2) Forma esplicita della retta

La forma:

$$y = mx + q$$

e' detta forma esplicita della retta.
Cioe' la retta e' una funzione esplicitata rispetto alla y
$y = f(x)$

La forma esplicita e' la piu' usata in quanto mi da' informazioni sulla rappresentazione grafica della retta stessa:
m mi da' la pendenza della retta
q mi da' l'ordinata all'origine, cioe' il punto in cui la retta taglia l'asse delle ordinate (y)

(3) Forma implicita della retta

La retta puo' comparire anche nella forma:

$$ax + by + c = 0$$

che e' detta ***forma implicita*** della retta o equazione della retta in forma implicita.
Possiamo trasformare la retta dalla forma implicita alla forma esplicita: basta risolvere l'equazione rispetto alla y:
$ax + by + c = 0$
Isolo la y:
$by = - ax - c$
Divido tutto per b:
$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
Confrontando questa funzione con la forma esplicita della retta:
$y = mx + q$
Avro' che, perche' siano uguali, deve essere:
$m = -\frac{a}{b} q - \frac{c}{b}$

Esercizi:
Trasformiamo la retta dalla forma implicita
$2x + 3y - 6 = 0$
alla forma esplicita.
Isolo la y
$3y = - 2x + 6$
divido per 3
$y = - 2/3\ x + 6/3$
$y = - 2/3\ x + 2$

Trasformiamo la retta dalla forma esplicita

$y = 1/3\,x + 5/2$

alla forma implicita.

Basta fare il minimo comune multiplo, cioe' moltiplico tutto per 6 per eliminare il denominatore

$6y = 2x + 15$

$-2x + 6y - 15 = 0$

$2x - 6y + 15 = 0$

Puoi usare la retta sia in forma esplicita che in forma implicita, non cambia nulla; quando andavo a scuola io era preferita la forma implicita, oggi come oggi si preferisce la forma esplicita come maggiormente intuitiva (anche in matematica ci sono le mode)

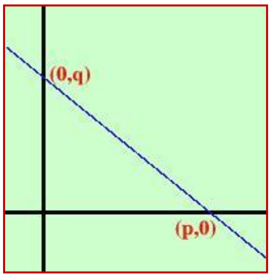
(4) Equazione segmentaria della retta

La retta esiste anche in una particolare forma (ormai in disuso):

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

chiamata ***forma segmentaria*** perche' riferita ai segmenti p e q che la retta stessa taglia sugli assi.

Possiamo trasformare facilmente la retta dalla forma segmentaria alle altre forme.



Dimostrazione dell'equazione segmentaria della retta

Troviamo la formula dell'equazione segmentaria della retta:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Ho i punti :

$P=(p,0)$ $Q=(0,q)$

Applico la formula per trovare la retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

si ha:

$x_1 = p$ $y_1 = 0$ $x_2 = 0$ $y_2 = q$

Sostituendo, ottengo:

$$\frac{y - 0}{q - 0} = \frac{x - p}{0 - p}$$

Quindi:

$$\frac{y}{q} = \frac{x - p}{-p}$$

moltiplico in croce (che equivale a fare il m.c.m.)

$-py = qx - pq$

$-py - qx = - pq$

Cambio di segno:

$qx + py = pq$

Divido tutti i termini per pq:

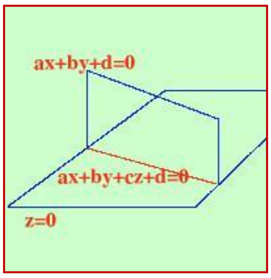
$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$$

Semplificando termine a termine ottengo la formula finale:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

(5) La retta come funzione

Possiamo considerare la retta come una funzione di primo grado:
$y = mx + q$
oppure come un'equazione nelle due incognite x e y:
$y - mx - q = 0$
anche nella forma generale dell'equazione di primo grado a due incognite
$ax + by + c = 0$
Puoi usare indifferentemente la funzione o l'equazione anche se il loro significato e' profondamente diverso



Nel primo caso ci riferiamo espressamente a una funzione sul piano cartesiano.
Nel secondo caso dobbiamo considerare la retta come insieme degli zeri di una funzione nello spazio a 3 dimensioni x,y,z
$ax + by + cz + d = 0$
cioe' come intersezione dei due piani
$z = 0$ e $ax + by + d = 0$

(6) Come si disegna la retta

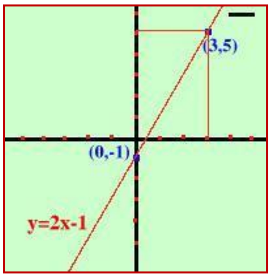
Per disegnare una retta bastera' tracciare due punti per cui la retta passa.

Uno dei postulati della geometria euclidea dice che "per 2 punti passa una ed una sola retta"

Per trovare due punti della retta basta riferirsi al suo significato di funzione, cioe' assegniamo due valori qualunque ad x e leggiamo i corrispondenti valori per y.

Potrei assegnare ad x due valori qualunque, ma e' bene seguire alcuni criteri:
- Trasformero' l'equazione nella forma esplicita
- Cerchero' di assegnare punti abbastanza lontani fra loro per poter meglio tracciare la retta
- Cerchero' di dare valori che mi permettano di non avere frazioni come risultato

Esercizi:

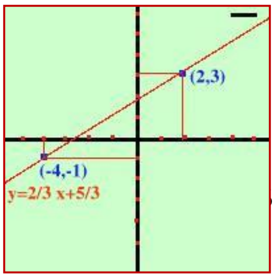


Tracciamo:
$y = 2x - 1$
Diamo dei valori qualunque alla x e leggiamo i valori corrispondenti per la y; mi conviene dare alla x il valore 0 e poi un valore abbastanza lontano, tipo 3

x	y
0	-1
3	5

Fisso sul piano cartesiano i punti (0,-1) e (3,5) poi traccio la loro congiungente.
Osservando l'equazione della retta posso controllare se ho sbagliato i calcoli: in questo caso il coefficiente angolare e' 2 quindi la retta fa due spazi verso l'alto per ogni spazio in orizzontale, inoltre il termine noto e' -1 quindi deve tagliare l'asse y nel punto -1

Tracciamo:
$2x - 3y + 5 = 0$
Esplicito la retta:
$-3y = -2x -5$
cambio tutto di segno (moltiplico per -1)
$3y = 2x + 5$



divido per 3

$y = 2/3\,x + 5/3$

Diamo dei valori qualunque alla x e leggiamo i valori corrispondenti per la y: mi conviene dare alla x il valore 2 e poi un valore abbastanza lontano, tipo -4, in questo modo il risultato non avra' frazioni

x	y
2	3
-4	-1

Ecco i calcoli:

$y = 2/3\,x + 5/3$

- Diamo alla x il valore 2

$y = 2/3 \cdot 2 + 5/3$

$y = 4/3 + 5/3$

$y = 9/3 = 3$

individuo il punto (2,3)

- Diamo alla x il valore -4

$y = 2/3 \cdot (-4) + 5/3$

$y = -8/3 + 5/3$

$y = -3/3 = -1$

individuo il punto (-4,-1)

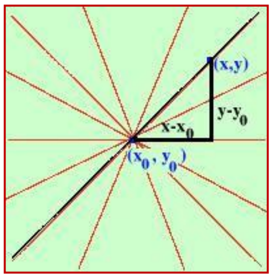
Anche qui con un po' di esperienza potrai vedere che la retta e' tracciata correttamente osservando che il coefficiente angolare e' 2/3 (ogni tre spazi in orizzontale due in verticale) e che l'ordinata all'origine (punto in cui la retta taglia l'asse y) e' 5/3 circa uguale a 1,7

d) Fasci di rette

Un fascio di rette e' l'insieme di tutte le rette che passano per un punto

- Se il punto e' al finito allora il fascio si dira' proprio
- Se il punto si trova all'infinito allora il fascio si dice improprio e le rette del fascio sono tutte le rette parallele ad una retta data

(1) Fascio proprio di rette



E' l'insieme di tutte le rette che passano per un punto

Per determinare l'equazione di un fascio di rette chiamiamo (x_0,y_0) il centro del fascio e (x,y) il punto generico di una retta qualunque del fascio.

Se m e' il coefficiente angolare della retta che considero avro' che vale:

$$m = \frac{y - y_0}{x - y_0}$$

e siccome per ogni m diverso avro' una retta diversa del fascio, ne segue che questa e' l'equazione del fascio di rette;.

Senza denominatori ottengo:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

Veramente esiste una retta del fascio che non e' compresa nell'equazione: la retta per cui m vale infinito essendo infinito un valore che ancora non e' possibile considerare. In analisi si potra' rimediare a questa piccola incongruenza.

Troviamo, come esempio, l'equazione del fascio di rette di centro A(2,3) applico la formula

$y - y_0 = m(x - x_0)$

sapendo che $x_0 = 2$ e $y_0 = 3$

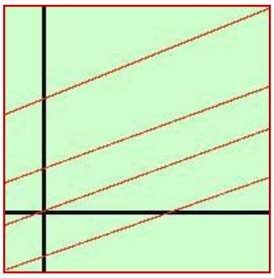
$y - 3 = m(x - 2)$

Visto che siamo in argomento diciamo che un fascio di rette puo' rappresentarsi come combinazione lineare di due rette del fascio (che poi saranno le rette base corrispondenti ai valori zero ed infinito del parametro) ad esempio se considero le rette:
$y - 2x - 3 = 0$
$2x + 3y + 4 = 0$
il fascio sara' dato da
$y - 2x - 3 + s(2x + 3y + 4) = 0$
al variare del valore di s
Al solito sono individuate tutte le rette del fascio ad eccezione della retta per cui s vale infinito (cioe' $2x + 3y + 4 = 0$) quindi qualche libro in vena di precisione scrive il fascio di rette in questo modo

$$\begin{cases} y - 2x - 3 + s(2x + 3y + 4) = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{per } s \in R$$

(2) Fascio improprio di rette

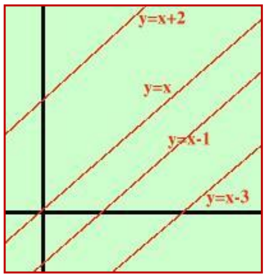
Si definisce fascio di rette improprie l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data.



Puoi immaginare il fascio di rette improprio considerando un fascio di rette proprio come se fosse fatto da elastici: se prendi il punto dove si incontrano e lo sposti verso infinito otterrai tutte rette parallele.

Visto che le rette sono tutte parallele, allora da una retta all'altra variera' solo l'ordinata all'origine, cioe' q; quindi prenderemo come equazione del fascio:
$y = m_1x + q$
dove q e' variabile ed m_1 e'un numero dato

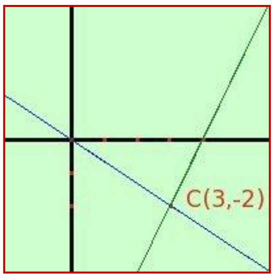
Esempio:
$y = x + q$
e' un fascio di rette.
Di fianco una sua rappresentazione



Naturalmente non posso disegnare tutte le rette del fascio, quindi mi limito a disegnarne qualcuna

(3) Approfondimenti sul fascio di rette proprio

Si puo' definire un fascio di rette come la combinazione lineare di due rette qualunque del fascio (inserire link)
Cioe' se ad esempio considero le due rette in forma implicita:
$2x + 3y = 0$
$2x - y - 8 = 0$
esse individuano il fascio di rette
$2x + 3y + k(2x - y - 8) = 0$
A destra in blu la prima retta ed in verde la seconda

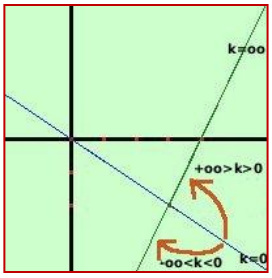


C'e' un piccolo problema: dando dei valori a k possiamo trovare tutte le rette del fascio eccetto la retta
$2x - y - 8 = 0$, infatti tale retta si otterrebbe per un valore $k = \infty$ (l'infinito sara' trattato piu' avanti in analisi)
allora si puo' procedere in due modi diversi:

- si considera come fascio l'insieme delle rette precedenti aggiungendovi la seconda retta cioe'
  $\begin{cases} 2x + 3y + k(2x - y - 8) = 0 \\ 2x - y - 8 = 0 \end{cases}$
- Introduciamo due parametri $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$, allora il fascio di rette sara'dato da
  $\boldsymbol{\lambda}(2x + 3y) + \boldsymbol{\mu}(2x - y - 8) = 0$
  la seconda forma puo' essere trasformata nella prima ponendo:
  $k = \frac{\mu}{\lambda}$

Consideriamo ancora il fascio

$\begin{cases} 2x + 3y + k(2x - y - 8) = 0 \\ 2x - y - 8 = 0 \end{cases}$



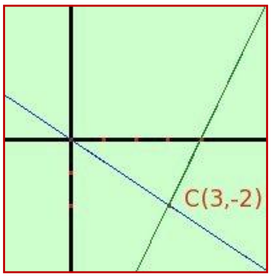
Osserviamo che la retta **2x + 3y** si ottiene per **k=0**
Se diamo dei valori a k in modo ordinato (+1,+2,+3,... oppure -1,-2.-3 ,....) otteniamo altre rette che, partendo dalla prima retta, ruotando attorno al punto di intersezione, si avvicinano alla seconda retta;
Ora posso avvicinarmi ad oo sia considerando valori superiori a 0 che valori inferiori: quindi abbiamo 2 possibilita' per le rette di sovrapporsi:
- una che nell'angolo per andare dalla prima alla seconda retta si svolge in senso antiorario e, nel nostro caso, corrisponde a valori di k>0
- l'altra, invece, si svolge in senso antiorario e corrisponde, nel nostro caso, a valori di k<0.

Queste considerazioni ci serviranno nella discussione del problema geometrico.

Vediamo ora quali sono i problemi possibili per i fasci di rette.

(4) Problemi sul fascio di rette

Di solito non si hanno grossi problemi: il problema piu' gettonato e' il determinare il centro e le rette base del fascio avendo l'equazione del fascio stesso; facciamo un esempio. Dato il fascio di rette:
$(2+2k)x + (3-k)y - 8k = 0$
Determinare le rette base ed il centro del fascio.
Per determinare le rette di base eseguiamo tutti i calcoli:
$2x + 2kx + 3y - ky - 8k = 0$
Ora separo i termini con la k e quelli senza la k:
$2kx - ky - 8k = -2x - 3y$
Raccolgo la k $k(2x-y-8) = -2x - 3y$
allora le due rette base del fascio sono:
$2x - y -8 = 0$
$-2x - 3y = 0$
o meglio:
$2x - y -8 = 0$
$2x + 3y = 0$



A destra le due rette di base ed il loro punto di intersezione

Se ora voglio trovare il centro del fascio ho due strade:
- Posso prendere il fascio originale ed assegnare a k due valori a piacere: trovero' due rette del fascio e siccome tutte le rette passano per il centro del fascio facendone il sistema trovero' il centro del fascio

- Posso fare il sistema fra le due rette base del fascio, visto che le ho gia' trovate

$$\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Io eseguo tutti i passaggi, tu puoi abbreviare

$$\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Risolviamo per sostituzione; ricavo y dalla prima equazione:

$$\begin{cases} -y = 8 - 2x \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Cambio di segno:

$$\begin{cases} y = 2x - 8 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:

$$\begin{cases} y = 2x - 8 \\ 2x + 3(2x - 8) = 0 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} y = 2x - 8 \\ 2x + 6x - 24 = 0 \end{cases} = \begin{cases} y = 2x - 8 \\ 8x = 24 \end{cases} = \begin{cases} y = 2x - 8 \\ x = 24/8 = 3 \end{cases} = \begin{cases} y = 2 \cdot 3 - 8 \\ x = 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Risultato: $x = 3 \quad y = -2$

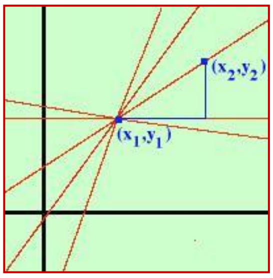
In entrambe i casi ottengo: $\begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

e) Retta per due punti assegnati

Avendo le coordinate di due punti:

$A = (x_1, y_1)$ $B = (x_2, y_2)$

voglio trovare l'equazione della retta passante per questi due punti.



Prima facciamo il fascio di rette che passa per il punto $A = (x_1, y_1)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

poi tra tutte queste sceglierò quella che passa per il punto $B = (x_2, y_2)$ cioe' quella che ha come coefficiente angolare:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sostituendo ottengo l'equazione:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Trasporto i termini con **y** prima dell'uguale e ottengo:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Se vuoi vedere i passaggi:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Divido prima e dopo l'uguale per $y_2 - y_1$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}$$

Semplifico per $y_2 - y_1$ ed ottengo:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Casi particolari

Possiamo considerare particolari i casi in cui i due punti sono allineati orizzontalmente o verticalmente: in tal caso senza applicare la formula scriviamo l'equazione della retta come y = numero oppure x = numero essendo numero il valore della coordinata uguale dei due punti. Vediamo un paio di esempi:

Trovare l'equazione della retta passante per i punti:

A = (-4, 3) B = (2, 3)

I due punti hanno la stessa y quindi l'equazione sara'

$y = 3$

Se non me ne accorgessi e facessi la formula otterrei:

$$\frac{y-3}{3-3}=\frac{x-(-4)}{2-(-4)}$$

$$\frac{y-3}{0}=\frac{x+4}{2+4}$$

e siccome non posso dividere per zero mi accorgerei che c'e' qualcosa che non va

---

Tra parentesi: siccome dividendo un numero per zero lo si fa crescere oltre ogni limite ne segue che il termine dopo l'uguale a suo confronto diventa trascurabile quindi il termine che resta di tutta l'espressione e' y=3

Trovare l'equazione della retta passante per i punti

A = (2, 3) B = (2, -1)

I due punti hanno la stessa x quindi l'equazione sara':

$x = 2$

Se non me ne accorgessi e facessi la formula otterrei:

$$\frac{y-3}{(-1)-3}=\frac{x-2}{2-2}$$

$$\frac{y-3}{-4}=\frac{x-2}{0}$$

e siccome non posso dividere per zero mi accorgerei che c'e' qualcosa che non va.

Anche qui: siccome dividendo un numero per zero lo si fa crescere oltre ogni limite ne segue che il termine prima dell'uguale a suo confronto diventa trascurabile quindi il termine che resta di tutta l'espressione e' x=2

Per esercizio troviamo l'equazione della retta passante per i punti:

A = (-4, 3) B = (2, -1)

Pongo

$x_1 = -4$ $y_1 = 3$ $x_2 = 2$ $y_2 = -1$

Sostituisco nella formula:

$$\frac{y-3}{(-1)-3}=\frac{x-(-4)}{2-(-4)}$$

$$\frac{y-3}{-4}=\frac{x+4}{2+4}$$

$$\frac{y-3}{-4}=\frac{x+4}{6}$$

Moltiplico in croce:

$6(y - 3) = -4(x + 4)$

$6y - 18 = -4x - 16$

$6y = -4x - 16 + 18$

$6y = -4x + 2$

$y = -4/6\, x + 2/6$

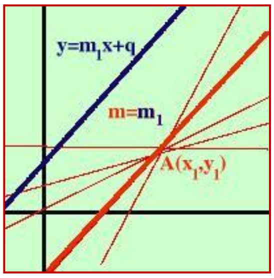
$y = -2/3\, x + 1/3$

E' buona norma controllare che l'equazione corrisponda alla figura geometrica della retta controllando se, grosso modo, corrispondono i valori di q ed m

f) Retta passante per un punto e parallela ad una retta data

Ho le coordinate di un punto:
$A = (x_1, y_1)$
e l'equazione di una retta (non passante per il punto):
$y = m_1x + q$
Voglio trovare l'equazione della retta passante per il punto e parallela alla retta data

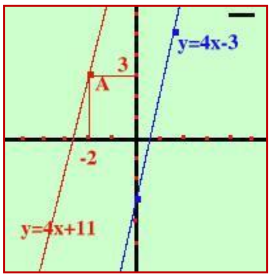
Prima facciamo il fascio di rette che passa per il punto $A = (x_1, y_1)$:
$y - y_1 = m(x - x_1)$
Poi tra tutte queste scegliamo quella che ha lo stesso coefficiente angolare della retta:
$y = m_1x + q$
cioe' che ha la stessa m_1.
Quindi la formula finale e':
$y - y_1 = m_1(x - x_1)$



In pratica seguiamo quello che facciamo quando, in geometria, tracciamo per un punto una retta parallela ad una retta data: posizioniamo la riga sul punto ruotandola leggermente (fascio di rette) finche' non e' allineata (stesso coefficiente angolare) con la retta data poi tracciamo la parallela

L' eguaglianza:
$m = m_1$
sara' anche detta *condizione di parallelismo fra due rette*.

Vediamo alcuni esercizi.
Esercizio 1 - *Trovare l'equazione della retta passante per il punto A(-2, 3) e parallela alla retta y = 4x - 3*
Ho:
$x_1 = -2$
$y_1 = 3$
$m_1 = 4$
Applico la formula:
$y - y_1 = m_1(x - x_1)$
$y - 3 = 4(x + 2)$
$y - 3 = 4x + 8$
$y = 4x + 8 + 3$
$y = 4x + 11$



E' sempre buona norma rappresentare il problema geometricamente per poi poter controllare l'esattezza dei risultati (se avessi fatto la figura piu' grande avrei visto la retta tagliare l'asse y nel punto 11); a destra puoi vedere la rappresentazione grafica del problema

Esercizio 2 - *Trovare l'equazione della retta passante per il punto A(2, 5) e parallela alla retta y = 4x - 3*
Ho:
$x_1 = 2$
$x_2 = 5$
$m_1 = 4$

Applico la formula:
$y - y_1 = m_1(x - x_1)$
$y - 5 = 4(x - 2)$
$y - 5 = 4x - 8$
$y = 4x - 8 + 5$
$y = 4x - 3$
Siccome l'equazione e' uguale a quella della retta di partenza significa che il punto da cui abbiamo mandato la parallela si trovava sulla retta stessa.

Se avessi rappresentato il problema geometricamente me ne sarei accorto subito, invece algebricamente dovrei sostituire i valori 2 e 5 alla x ed alla y per controllare se ho un'uguaglianza (cosa che di solito non si fa)

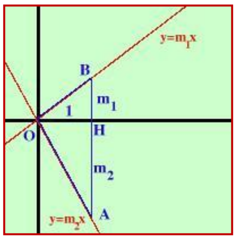
Esercizio 3 - *Trovare l'equazione della retta passante per il punto A(2, 5) e parallela alla retta $y = -3$*
In questo caso non conviene applicare la formula, bensi' considerare che la retta parallela deve passare dove la y vale 5, quindi la parallela sara'
$y = 5$

Esercizio 4 - *Trovare l'equazione della retta passante per il punto A(2, 5) e parallela alla retta $x = -3$*
In questo caso non conviene applicare la formula, bensi' considerare che la retta parallela deve passare dove la x vale 2, quindi la parallela sara':
$x = 2$

g) Retta perpendicolare ad una retta data e passante per un punto

(1) Condizione di perpendicolarita' fra due rette

Prima di costruire la formula devo determinare a cosa corrisponde il fatto che due rette siano perpendicolari: per fare questo considero due rette (supponendo che siano perpendicolari) e cerco di trovare una relazione fra i loro coefficienti angolari.



$y = m_1x$
$y = m_2x$
Dal punto 1 mando la verticale e ottengo il triangolo OAB.
Essendo le rette perpendicolari il triangolo OAB e' rettangolo ed ha le misure:
$\overline{OH}=1$ $\overline{AH}=m_2$ $\overline{HB}=m_1$
Poiche' e' rettangolo in esso posso applicare il secondo teorema di Euclide:
$\overline{OH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$
Sostituendo ai lati le relative misure:
$1 = m_2 \cdot m_1$

C'e' un piccolo problema: i due valori m_1 ed m_2 sono uno positivo ed uno negativo, quindi dovremo riscrivere l'uguaglianza come:
$-1 = m_2 \cdot m_1$
Ricavo m_1 :
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$
E questa e' la condizione di perpendicolarita' cercata:
Due rette sono perpendicolari se i loro coefficienti angolari sono opposti ed inversi.

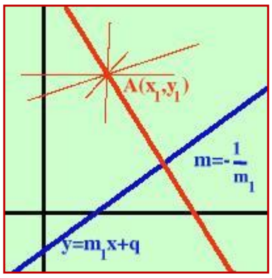
Opposti vuol dire di segno contrario. Inversi vuol dire che basta rovesciarne uno per ottenere l'altro come ad esempio 3 ed 1/3

(2) Equazione della retta perpendicolare ad una retta data e passante per un punto dato

Ho le coordinate di un punto
$A = (x_1, y_1)$
e l'equazione di una retta (non passante per il punto)
$y = m_1x + q$
voglio trovare l'equazione della retta passante per il punto e perpendicolare alla retta data

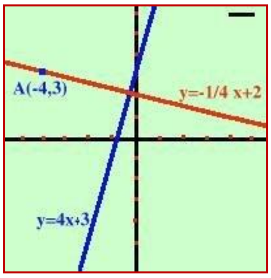
Prima facciamo il fascio di rette che passa per il punto $A = (x_1, y_1)$
$y - y_1 = m(x - x_1)$
poi tra tutte queste scegliamo quella che ha coefficiente angolare inverso ed opposto della retta data ($m= -1/m_1$)
Quindi la formula finale e' :

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_1}(x - x_1)$$



In pratica seguiamo quello che facciamo quando, in geometria, tracciamo per un punto una retta perpendicolare ad una retta data: posizioniamo la riga sul punto ruotandola leggermente (fascio di rette) finche' non e' perpendicolare (coefficiente angolare opposto ed inverso) con la retta data, poi tracciamo la perpendicolare

Vediamo un semplice esempio trovare l'equazione della retta passante per il punto $A(-4, 3)$ e perpendicolare alla retta $y = 4x + 3$
Ho:
$x_1 = -4$ $\quad y_1 = 3$ $\quad m_1 = 4$
Applico la formula:
$y - y_1 = -1/m_1(x - x_1)$
$y - 3 = -1/4\ (x + 4)$
$y - 3 = -1/4\ x - 1$
$y = -1/4\ x -1 + 3$
$y = -1/4\ x + 2$



E' sempre buona norma rappresentare il problema geometricamente per poi poter controllare l'esattezza dei risultati. La retta cercata taglia l'asse y nel punto 2 ed e' diretta dall'alto verso il basso con inclinazione 1/4 (ogni 4 spazi su x si ha uno spazio su y); a destra puoi vederne la rappresentazione grafica .

h) Distanza di un punto da una retta

E' un problema che potrebbe essere risolto con le nozioni che gia' abbiamo: basta fare

- perpendicolare dal punto alla retta
- intersezione fra la retta e la perpendicolare, trovo il piede della perpendicolare
- Distanza fra il punto ed il piede della perpendicolare

Pero' e' usata tanto spesso che merita una formula a se' stante, do solamente la formula finale, se vuoi dimostrarla devi fare il procedimento indicato sopra per la retta generica ed il punto $P(x_0,y_0)$

Distanza del punto $P(x_0,y_0)$
dalla retta $y = mx + q$
formula:

$$d = \frac{y_0 - mx_0 - q}{\pm\sqrt{(1 + m^2)}}$$

Essendo la distanza sempre positiva se sopra e' piu' sotto scegli il piu', se sopra hai meno sotto prendi meno. In questo modo il risultato sara' sempre positivo

---

Facciamolo anche per la retta in forma implicita
Distanza del punto $P(x_0,y_0)$
dalla retta $ax + by + c = 0$
formula:

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

Anche qui se sopra e' piu' sotto scegli il piu', se sopra hai meno sotto prendi meno. In questo modo il risultato sara' sempre positivo

---

Esempio:

Trovare la distanza fra la retta $y = -x - 2$ ed il punto $P(0,4)$ Applico la formula:

$$d = \frac{y_0 - mx_0 - q}{\pm\sqrt{(1 + m^2)}}$$

Sapendo che;

$x_0 = 0$ $y_0 = 4$ $m = -1$ $q = -2$

$$d = \frac{4 - (-1) \cdot 0 - (-2)}{\pm\sqrt{[1 + (-1)^2)]}}$$

$$d = \frac{6}{+\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Un po' piu' di 4 unita' di misura come puoi controllare dalla figura.

6. I problemi in geometria cartesiana

In geometria cartesiana la soluzione di un problema mostra con piu' evidenza che in altre discipline tre importanti caratteristiche:

- l'utilizzo della geometria per risolvere algebricamente il problema
- il poter dividere il problema in sottoproblemi elementari
- il poter controllare se i risultati sono esatti

Vediamo su un esercizio i punti sopraddetti:
I punti A = (0,4) B = (-4,1), C = (-1,-3) siano tre vertici consecutivi di un parallelogramma. Trovare le coordinate del quarto vertice.

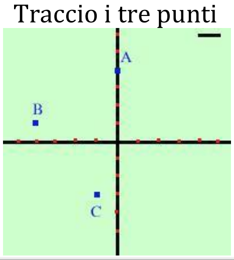
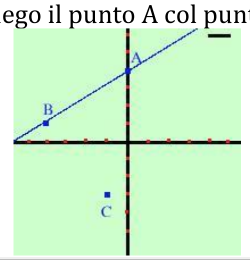
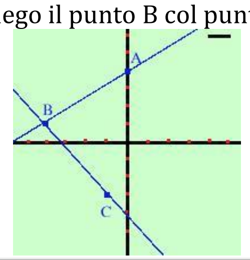
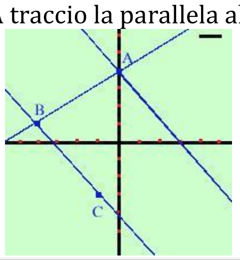
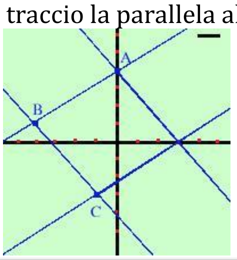
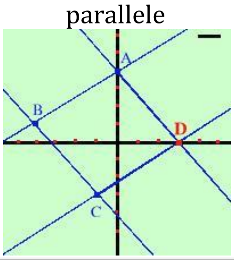
- Utilizzo della geometria per risolvere algebricamente il problema
- Dividere il problema in sottoproblemi elementari
- Controllare se i risultati sono esatti

Utilizzo della geometria per risolvere algebricamente il problema

---

Esiste una stretta equivalenza fra la soluzione algebrica e geometrica del problema e poiche' di solito la soluzione geometrica e' piu' facile ed intuitiva si puo' utilizzare questa per poter impostare l'equivalente soluzione algebrica.

I punti A = (0,4), B = (-4,1), C = (-1,-3) siano tre vertici consecutivi di un parallelogramma. Trovare le coordinate del quarto vertice

<table>
<tr><th colspan="2">Dovro' costruire geometricamente un parallelogramma conoscendone tre vertici consecutivi</th></tr>
<tr><th>Metodo geometrico</th><th>Procedimento algebrico</th></tr>
<tr><td>Traccio i tre punti

</td><td>Considero i tre punti:
A=(0,4)
B=(-4,1)
C=(-1,-3)</td></tr>
<tr><td>Collego il punto A col punto B

</td><td>Equazione della retta passante per i due punti A e B:
$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$</td></tr>
<tr><td>Collego il punto B col punto C

</td><td>Equazione della retta passante per i due punti B e C:
$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$</td></tr>
<tr><td>Dal punto A traccio la parallela alla retta BC

</td><td>Equazione della retta parallela alla retta BC passante per il punto A
$y - y_1 = m_1(x - x_1)$</td></tr>
<tr><td>Dal punto C traccio la parallela alla retta AB

</td><td>Equazione della retta parallela alla retta AB passante per il punto C
$y - y_1 = m_1(x - x_1)$</td></tr>
<tr><td>Individuo il punto d'incontro D all'incrocio delle parallele

</td><td>Sistema fra le rette parallele trovate: ho come soluzione le coordinate del punto D</td></tr>
</table>

Come hai visto ad ogni passaggio geometrico corrisponde un'operazione algebrica e viceversa; anzi, a tal proposito e' possibile costruire una tabella di conversione

Tabella di equivalenza fra geometria ed algebra

Operazione geometrica	**Operazione algebrica**
Calcolare la lunghezza di un segmento	Distanza fra due punti $\overline{AB} = \sqrt{[(x^2 - x1)^2 + (y^2 - y1)^2]}$ Utilizzo: calcolo di area e perimetro
Tracciare la retta passante per due punti	Equazione della retta per due punti: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
Tracciare la retta parallela per un punto ad una retta data	Retta parallela ad una retta data e passante per un punto dato $y - y_1 = m_1(x - x_1)$ utilizzo: nei problemi di parallelismo
Tracciare la retta perpendicolare per un punto ad una retta data	Retta perpendicolare ad una retta data e passante per un punto dato $y - y_1 = -1/m_1\,(x - x_1)$ utilizzo: nei problemi di perpendicolarita', determinare le altezze, gli assi ecc.
Segmento di perpendicolare da un punto ad una retta	Distanza da un punto ad una retta: $d = \frac{y_0 - mx_0 - q}{\pm\sqrt{(1 + m^2)}}$ utilizzo: trovare l'altezza di una figura geometrica, il raggio di una circonferenza,..
Segnare il punto di incrocio di due rette	Fare il sistema fra due rette per determinare le coordinate del loro punto di incontro

Dividere il problema in sottoproblemi elementari

In geometria cartesiana la suddivisione del problema in sottoproblemi risolvibili con una sola formula e' molto piu' evidente che in altre discipline: risolviamo passaggio per passaggio il problema dato

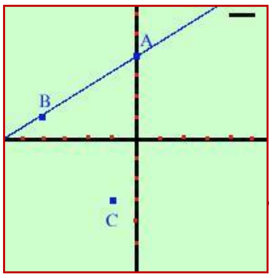
---

I punti A=(0,4) B=(-4,1), C=(-1,-3) siano tre vertici consecutivi di un parallelogramma. Trovare le coordinate del quarto vertice

- Equazione della retta passante per i due punti A(0,4) e B(-4,1):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 4}{1 - 4} = \frac{x - 0}{-4 - 0}$$



$$\frac{y-4}{-3}=\frac{x}{-4}$$

-4y + 16 = -3x

-4y = -3x - 16

4y = 3x + 16

y = 3/4 x + 4 (retta AB)

- Equazione della retta passante per i due punti B(-4,1) e C(-1,-3):

$$\frac{y - y^1}{y^2 - y^1}=\frac{x - x^1}{x^2 - x_1}$$

$$\frac{y-1}{-3-1}=\frac{x+4}{-1+4}$$

$$\frac{y-1}{-4}=\frac{x+4}{3}$$

3y - 3 = -4x - 16

3y = -4x - 16 + 3

3y = -4x - 13

y = -4/3 x - 13/3 (retta BC)

- Equazione della retta parallela alla retta BC (y = -4/3 x - 13/3) passante per il punto A(0,4)

$y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$x_1 = 0$

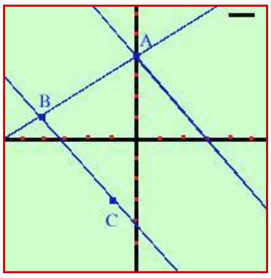
$y_1 = 4$

$m_1 = -4/3$

y - 4 = -4/3(x - 0)

y - 4 = -4/3 x

y = -4/3 x + 4 (parallela per A a BC)



- Equazione della retta parallela alla retta AB (y = 3/4 x + 4) passante per il punto C(-1,-3)

$y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$x_1 = -1$

$y_1 = -3$

$m_1 = 3/4$

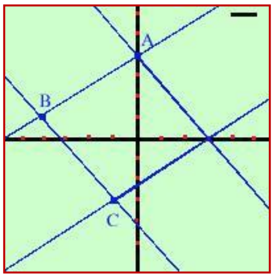
y -(-3) = 3/4[x - (-1)]

y + 3 = 3/4(x + 1)

y + 3 = 3/4 x + 3/4

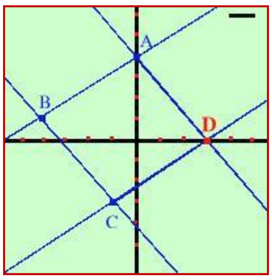
y = 3/4 x + 3/4 - 3

y = 3/4 x - 9/4 (parallela per C ad AB)



- Sistema fra le rette parallele individuate per trovare le coordinate del punto D

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} \\ y = -\frac{4}{3}x + 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = 3/4\,x - 9/4 \\ 3/4\,x - 9/4 = -4/3\,x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3/4\,x - 9/4 \\ \frac{9x-27}{12} = \frac{-16x+48}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3/4\,x - 9/4 \\ 9x - 27 = -16x + 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3/4\,x - 9/4 \\ 9x + 16x = 48 + 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3/4\,x - 9/4 \\ 25x = 75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3/4\,x - 9/4 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3/4 \cdot 3 - 9/4 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 9/4 - 9/4 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

coordinate del punto D(3,0)

Ogni problema si puo' ridurre, in pratica, ad una decina di problemi elementari

Controllare se i risultati sono esatti

Se hai seguito il problema con i vari calcoli ti sarai accorto che non solo il dato algebrico finale D(3,0) corrisponde al dato geometrico, ma anche che potevi controllare, retta per retta, se il risultato di ognuno degli esercizi era esatto guardando sia il termine noto che il coefficiente angolare.

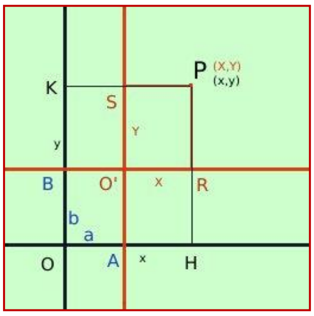
Questo e' valido per qualunque problema e quindi e' sempre conveniente affiancare allo sviluppo algebrico la rappresentazione geometrica corrispondente.

7. Trasformazione di coordinate

Talvolta serve cambiare il sistema di riferimento per vari problemi, quali ad esempio trasformare un'ellisse con equazione generica in ellisse con equazione canonica, oppure considerare una circonferenza qualunque come circonferenza con centro l'origine. Per cambiare il sitema di riferimento abbiamo le seguenti possibilita':

- Traslazione di coordinate
- Rotazione di coordinate
- Rototraslazione di coordinate

a) Traslazione di coordinate



Consideriamo in nero un sistema di coordinate in cui il punto P; abbia coordinate (che chiameremo vecchie coordinate):
P = (x,y)
Consideriamo poi in rosso un altro sistema di coordinate in cui il punto P sara' individuato da (nuove coordinate):
P = (X,Y)
Supponiamo inoltre che la nuova origine O ' abbia rispetto alla vecchia origine O coordinate (a,b).
Allora dalla figura possiamo dire che il segmento OH (x) e' uguale alla somma dei segmenti OA (a) e O'R (X).
Quindi posso scrivere:
x = a + X
O meglio, siccome cerco le nuove coordinate rispetto alle vecchie:

$X = x - a$

Anche per le y dalla figura possiamo dire:

OK (y) e' uguale alla somma dei segmenti OB (b) e O'S (Y)

Quindi posso scrivere:

$y = b + Y$

O meglio, siccome cerco le nuove coordinate rispetto alle vecchie:

$Y = y - b$

Raccogliendo, le equazioni per la traslazione di coordinate saranno:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

ma negli esercizi useremo:

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

Esercizi con queste formule, per essere significativi devono coinvolgere le coniche: sarebbe troppo semplice eseguire le traslazioni sulle rette; pertanto l'esercizio di esempio coinvolgera' una circonferenza

---

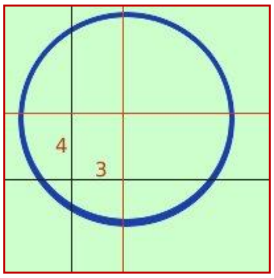
Eseguire la traslazione di coordinate tale che la circonferenza

$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$

abbia il centro nell'origine degli assi. Ecco la soluzione:

Le coordinate del centro sono $C=(3,4)$ quindi

$a = 3 \quad b = 4$



Ho le formule

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

cioe'

$$\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 4 \end{cases}$$

Pero' io nell'equazione ho le vecchie coordinate quindi devo usare

$$\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 4 \end{cases}$$

sostituisco le nuove coordinate nell'equazione della circonferenza al posto delle vecchie

$(X+3)^2 + (Y+4)^2 - 6(X+3) - 8(Y+4) - 11 = 0$

sviluppo i calcoli

$X^2 + 6X + 9 + Y^2 + 8Y + 16 - 6X - 18 - 8Y - 32 - 11 = 0$

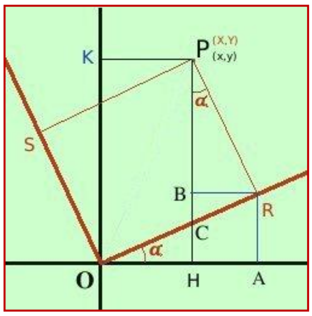
sommo ed ottengo

$X^2 + Y^2 - 36 = 0$

o meglio

$X^2 + Y^2 = 36$

b) Rotazione di coordinate



Consideriamo in nero un sistema di coordinate in cui il punto P abbia coordinate (che chiameremo vecchie coordinate):

$P = (x,y)$

Consideriamo poi in rosso un altro sistema di coordinate in cui il punto P sara' individuato da (nuove coordinate):

$P = (X,Y)$

Sappiamo inoltre che i nuovi assi sono ruotati attorno all'origine rispetto ai vecchi assi dell'angolo α.

Allora osserva la figura: dobbiamo trovare il segmento OH (x) utilizzando le nuove coordinate X e Y.

Calcoleremo OH come differenza fra OA ed AH.

Considerando il triangolo OAR per i teoremi sui triangoli rettangoli in trigonometria;

abbiamo:

OA = OR cosα = X cosα

Ora considero il triangolo PBR essendo BR = HA;

l'angolo BPR vale α

Per i teoremi sui triangoli rettangoli in trigonometria abbiamo

AH = BR = PR sen α = Y senα

Quindi abbiamo:

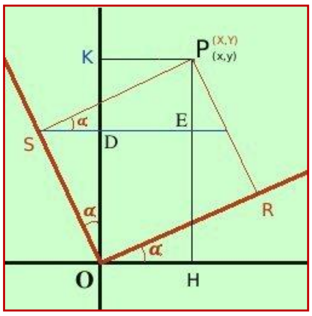
OH = OA - AH = X cosα - Y senα

Quindi posso scrivere:

x = X cos α- Y senα

Troviamo la formula equivalente per la **y.**
Osserva la figura a destra: dobbiamo trovare il segmento OK (y) utilizzando le nuove coordinate X e Y.
Calcoleremo OK come somma fra OD e DK,
Considerando il triangolo ODS per i teoremi sui triangoli rettangoli in trigonometria ;abbiamo:

OD = OS cosα = Y cosα



Ora considero il triangolo PES essendo PE = KD;
l'angolo PSE vale α
per i teoremi sui triangoli rettangoli in trigonometria abbiamo

KD = PE = PS senα = X senα

quindi abbiamo

OK = OD + DK = X senα + Y cosα

quindi posso scrivere

y = X senα + Y cosα

Poiche' negli esercizi dovremo sostituire le nuove coordinate alle vecchie conviene considerare solamente le formule con prima dell'uguale le vecchie coordinate; non conviene ricavare le formule inverse anche per la complessita' dei calcoli.

Raccogliendo, le equazioni per la rotazione di coordinate saranno:

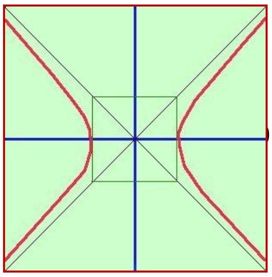
$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

Particolarmente importanti sono le formule per una rotazione di 45°
sapendo che:

sen α= $\sqrt{2/2}$ cos α= $\sqrt{2/2}$ avremo:

$$\begin{cases} x = X\sqrt{2/2} - Y\sqrt{2/2} \\ y = X\sqrt{2/2} + Y\sqrt{2/2} \end{cases}$$

Come esercizio dimostriamo che l'equazione dell'iperbole equilatera:
$x^2 - y^2 = a^2$
con una rotazione di 45° si trasforma nell'equazione dell'iperbole



equilatera riferita ai propri assi:
$XY = K$

Consideriamo le formule di trasformazione (rotazione di 45°)

$$\begin{cases} x = X\sqrt{2}/2 + Y\sqrt{2}/2 \\ y = -X\sqrt{2}/2 + Y\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

Andiamo a sostituire nell'equazione dell'iperbole

$(X\sqrt{2}/2 + Y\sqrt{2}/2)^2 - (-X\sqrt{2}/2 + Y\sqrt{2}/2)^2 = a^2$

Sviluppo i quadrati ricordando che $(\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$ ottengo

$X^2/2 + XY + Y^2/2 - (X^2/2 - XY + Y^2/2) = a^2$

Tolgo le parentesi

$X^2/2 + XY + Y^2/2 - X^2/2 + XY - Y^2/2 = a^2$

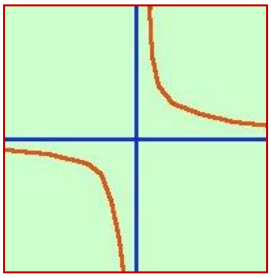
Sommo i termini simili: ottengo

$2XY = a^2$

$XY = a^2/2$

Se ora pongo $a^2/2 = K$ (Posso farlo perche' a e' una costante)
ottengo la formula finale

$XY = K$



c) Rototraslazione di coordinate

Metto qui di seguito le formule per la rototraslazione di coordinate: si tratta di sommare una traslazione con una rotazione, pertanto otterremo:

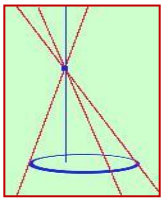
$$\begin{cases} x = a + X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ y = b + X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

Non saranno usate perche' si preferisce, nei rari casi in cui si usano, prima fare la traslazione e poi eseguire la rotazione.
Ho visto, invece di usare queste formule di rototraslazione, usare gli autovalori e gli autovettori; ma questo e' un argomento che trascende il nostro corso.

D. *Le coniche in generale e la circonferenza in particolare*

1. Le coniche come intersezione fra un piano ed un cono matematico

Definiamo un cono matematico come l'insieme di tutte le rette che congiungono i punti di una circonferenza con un punto non giacente nel piano della circonferenza stessa.
Le rette si chiamano generatrici del cono, il punto si chiama vertice, la circonferenza e' detta circonferenza di base, si definisce inoltre asse del cono la perpendicolare condotta dal vertice al piano della circonferenza di base

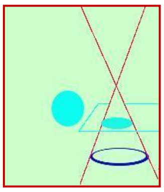


Se intersechiamo il cono con un piano non passante per il vertice otteniamo le varie coniche non degeneri.
Se prendiamo un piano passante per il vertice ed intersecante la circonferenza di base otteniamo una cosiddetta conica degenere.

Vediamo ora i vari casi possibili

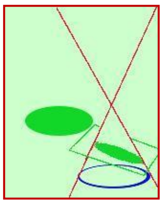
- Circonferenza
- Ellisse
- Iperbole
- Parabola

- Circonferenza



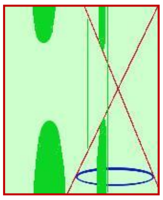
E' l'intersezione fra un cono matematico ed un piano parallelo alla circonferenza di base e non passante per il vertice

- Ellisse



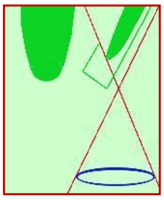
E' l'intersezione fra un cono matematico ed un piano compreso fra la circonferenza di base ed una generatrice

- Iperbole



E' l'intersezione fra un cono matematico ed un piano parallelo all'asse e non passante per il vertice

- Parabola



E' l'intersezione fra un cono matematico ed un piano parallelo ad una generatrice e non passante per il vertice

Naturalmente per le figure intendiamo solo il bordo (e' una curva, non un'area)

2. Equazione generale di una conica

E' l'equazione generale di secondo grado
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Il termine bxy si chiama *termine rettangolare*

Per sapere di quale tipo di conica si tratti si utilizza l'espressione:

$$b^2 - 4ac$$

- se $b^2 - 4ac > 0$ si tratta di un'iperbole
- se $b^2 - 4ac < 0$ si tratta di un'ellisse (caso particolare la circonferenza)
- se $b^2 - 4ac = 0$ si tratta di una parabola

Vediamo qualche esercizio.
Date le seguenti equazioni trovare di quale tipo di conica si tratta

Esercizio 1) $3x^2 + 6xy + 4y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$
Calcolo:
$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 36 - 48 = -12 < 0$
Si tratta di un'*ellisse*

Esercizio 2) $x^2 + 5xy + 2y^2 + 2x = 0$
Calcolo:
$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 25 - 8 = 17 > 0$
Si tratta di un '*iperbole*

Esercizio 3) $2x^2 + 4xy + 2y^2 + x = 0$
Calcolo
$b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$
Si tratta di una *parabola*

Si puo' ancora dire che essendo l'equazione di una conica individuata da 5 parametri indipendenti, una conica generica sara' individuata mediante 5 punti (o condizioni indipendenti): sarebbe a dire che per 5 punti passa una ed una sola conica.

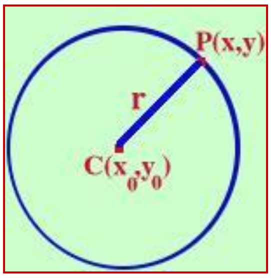
Essendo un'equazione di una conica piuttosto difficile da trattare, di solito alcune coniche si studiano in posizioni particolari: come ad esempio le ellissi riferite ai propri assi o le parabole con asse verticale.

3. Circonferenza

Si definisce ***circonferenza*** l'insieme dei punti del piano che hanno la stessa distanza da un punto fisso detto centro .

a) Equazione di una circonferenza dato il centro ed il raggio

Partiamo dalla definizione di circonferenza.
Si definisce circonferenza l'insieme dei punti del piano che hanno la stessa distanza da un punto fisso detto centro.
Fisso un punto $C(x_o , y_o)$.
Devo considerare tutti i punti $P(x , y)$ del piano che hanno distanza dal centro uguale ad r .



Ti ricordo che x_o significa un numero assegnato mentre x sta per un valore variabile come avevamo stabilito

Impongo che la distanza fra i due punti C e P sia uguale al raggio

$$\sqrt{[(x - xo)^2 + (y - yo)^2]} = r$$

Elevo al quadrato da una parte e dall'altra: prima dell'uguale sparisce la radice
Otteniamo la formula della circonferenza dato il centro $C(x_o, y_o)$ ed il raggio r

$$\boxed{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2}$$

Esempio:
Trovare l'equazione della circonferenza avente il centro $c(3,4)$ e raggio 6:
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

b) Equazione generale di una circonferenza

Vediamo ora come si giunge all'equazione generale della circonferenza.
Per capirla meglio facciamolo contemporaneamente sia in teoria che su un esempio pratico (l'equazione della pagina precedente).

Se ho l'equazione di una circonferenza dato il centro ed il raggio dovro' eseguire i calcoli

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$ eseguo i calcoli	$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$ eseguo i calcoli
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 36$	$x^2 - 2xx_o + x_o^2 + y^2 - 2yy_o + y_o^2 = r^2$
porto tutti i termini prima dell'uguale ed ordino	
$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 36 = 0$	$x^2 + y^2 - 2x_ox - 2\,y_oy + x_o^2 + y_o^2 - r^2 = 0$
Con i numeri sommo, con le lettere invece, per indicare che posso sommare, sostituisco ogni gruppo con un'altra lettera: al posto di $-2x_o$ scrivo a al posto di $-2y_o$ scrivo b al posto di $x_o^2 + y_o^2 - r^2$ scrivo c	
$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Equazione generale della circonferenza:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Confrontando l'equazione trovata con quella generale delle coniche possiamo dire che un'equazione di secondo grado rappresenta una circonferenza se sono verificate le tre condizioni:

- I termini al quadrato x^2 e y^2 hanno lo stesso coefficiente.

In modo che dividendo tutti i termini per il coefficiente possa ottenere $x^2 + y^2$

- Il termine rettangolare (bxy) non c'e'.
- Il raggio deve essere un numero reale (cioe' il quadrato del raggio deve essere un numero positivo).

Il raggio sara' calcolato nella prossima pagina a cui si rimanda per un esercizio.

c) Relazioni fra coefficienti, centro e raggio

Nell'equazione generale della circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

abbiamo posto:

$-2x_o = a$	$-2y_o = b$	$x_o^2 + y_o^2 - r^2 = c$

Se dato il centro ed il raggio riesco ad arrivare all'equazione della circonferenza, allora devo poter anche tornare indietro: cioe' data l'equazione di una circonferenza devo riuscire a trovare il raggio e le coordinate del centro; bastera' risolvere le uguaglianze scritte qui sopra ricavandone le coordinate del centro ed il raggio

---

In matematica ogni volta che si trova qualcosa si deve vedere come e' possibile anche tornare indietro: se infatti sviluppando un ragionamento si ottiene qualcosa da quel qualcosa si devono riottenere le condizioni iniziali: questo garantisce che, in matematica, sviluppando un ragionamento si ottiene un solo risultato, cioe' che e' valido il metodo logico-deduttivo

$x_0 = -\frac{a}{2}$	$y_0 = -\frac{b}{2}$	$r = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 - c)}$
Ecco i calcoli: $-2x_0 = a$ Devo ricavare x_0 Divido per -2 da entrambe le parti: $\frac{-2}{-2}x_0 = \frac{a}{-2}$ Semplifico ed ottengo: $x_0 = -\frac{a}{2}$	Ecco i calcoli: $-2y_0 = b$ Devo ricavare y_0 Divido per -2 da entrambe le parti: $\frac{-2}{-2}y_0 = \frac{b}{-2}$ Semplifico ed ottengo: $y_0 = -\frac{b}{2}$	Ecco i calcoli: $x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$ Devo ricavare r, lo isolo portando gli altri termini dopo l'uguale $- r^2 = c - x_0^2 - y_0^2$ Cambio di segno $r^2 = x_0^2 + y_0^2 - c$ Applico la radice da una parte e dall'altra $\sqrt{r^2} = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 - c)}$ Nel primo termine tolgo il primo quadrato con la radice $r = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 - c)}$ Talvolta si preferisce la formula equivalente $r = \sqrt{[(a/2)^2 + (b/2)^2 - c]}$

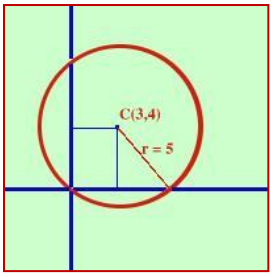
Vediamo ora qualche esercizio.
Date le seguenti equazioni indicare se rappresentano circonferenze ed in caso positivo trovarne il centro ed il raggio

Esercizio 1 - $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

So che

$a=-6$ $\quad$ $b= -8$ $\quad$ $c=0$

Come prima cosa devo vedere se sono verificate le condizioni perche' la curva sia una circonferenza:



- I termini al quadrato x^2 e y^2 hanno lo stesso coefficiente:
  - E' vero, valgono entrambe 1
- Il termine rettangolare (bxy) non c'e':
  - Giusto
- Il quadrato del raggio deve essere maggiore di zero:
  - Calcolo il raggio e vedo se viene un numero reale

Calcolo il centro:
Basta prendere a e b, dividerli per due e cambiarli di segno:

$x_0 = 3$ $\quad$ $y_0 = 4$ $\quad$ $C(3,4)$

Ora calcolo il raggio:

$$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2 - 0} =$$
$$= \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$$

Si tratta di una *circonferenza* di centro C(3,4) e raggio 5.
Di fianco la rappresentazione grafica

Esercizio 2 - $x^2 + 3y^2 + 2x + 4y + 6 = 0$

I termini al quadrato x^2 e y^2 non hanno lo stesso coefficiente quindi non e' una circonferenza.
Per curiosita' vediamo di quale tipo di conica si tratta.

Confrontando con l'equazione generale di una conica:
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
ho che:
$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 3$
Calcolo:
$b^2 - 4ac = -4(1)(3) = -12 < 0$
Si tratta di un'*ellisse.*

Esercizio 3 - $x^2 + y^2 + 4xy + 2 = 0$
C'e' il termine rettangolare 4xy
quindi non e' una circonferenza
Per curiosita' vediamo di quale tipo di conica si tratta.
Confrontando con l'equazione generale di una conica:
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
ho che
$a = 1 \qquad b = 4 \qquad c = 1$
Calcolo
$b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(1) = 12 > 0$
Si tratta di un'*iperbole* .

Esercizio 4 - $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 30 = 0$
So che:
$a = 4 \qquad b = 6 \qquad c = 30$
Come prima cosa devo vedere se sono verificate le condizioni perche' la curva sia una circonferenza:

- I termini al quadrato x^2 e y^2 hanno lo stesso coefficiente
  - E' vero, valgono entrambe 1
- il termine rettangolare (bxy) non c'e'
  - Giusto
- il quadrato del raggio deve essere maggiore di zero
  - Calcolo il raggio e vedo se viene un numero reale

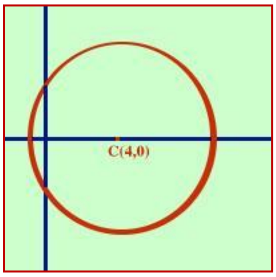
Calcolo il centro:
Basta prendere a e b, dividerli per due e cambiarli di segno:
$x_0 = -2 \qquad y_0 = -3 \qquad C(-2,-3)$
Ora calcolo il raggio
$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$
$= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 - 30} =$
$= \sqrt{(4 + 9 - 30)} = \sqrt{-17}$
Non si tratta di una circonferenza perche' il quadrato del raggio e' un numero negativo, cioe' il raggio e' un numero immaginario.
Per curiosita' vediamo di quale tipo di conica si tratta:
Confrontando con l'equazione generale di una conica:
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
ho che:
$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 1$
Calcolo:
$b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(1) = -4 < 0$
Si tratta di un'*ellisse*

Esercizio 5 - $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$

So che:

$a = -8$ $\quad b = 0$ $\quad c = -9$

Come prima cosa devo vedere se sono verificate le condizioni perche' la curva sia una circonferenza:



- I termini al quadrato x^2 e y^2 hanno lo stesso coefficiente:
  - E' vero, valgono entrambe 1
- Il termine rettangolare (bxy) non c'e':
  - Giusto
- il quadrato del raggio deve essere maggiore di zero:
  - Calcolo il raggio e vedo se viene un numero reale

Calcolo il centro:

Basta prendere a e b, dividerli per due e cambiarli di segno:

$x_o = 4$ $\quad y_o = 0$ $\quad C(4,0)$

Ora calcolo il raggio:

$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$

$= \sqrt{(4)^2 - (-9)} =$

$= \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25 = 5}$

Si tratta di una *circonferenza* di centro C(4,0) e raggio 5.

Di fianco la rappresentazione grafica.

Esercizio 6 - $2x^2 + 2y^2 - 50 = 0$

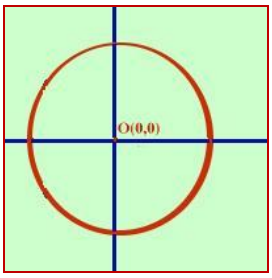
Prima riduco a forma normale dividendo tutto per 2

$x^2 + y^2 - 25 = 0$

So che:

$a = 0$ $\quad b = 0$ $\quad c = -25$

Come prima cosa devo vedere se sono verificate le condizioni perche' la curva sia una circonferenza:



- I termini al quadrato x^2 e y^2 hanno lo stesso coefficiente:
  - E' vero, valgono entrambe 1
- il termine rettangolare (bxy) non c'e':
  - Giusto
- il quadrato del raggio deve essere maggiore di zero
  - Calcolo il raggio e vedo se viene un numero reale

Calcolo il centro:

Basta prendere a e b, dividerli per due e cambiarli di segno:

$x_o = 0$ $\quad y_o = 0$ $\quad O(0,0)$

Ora calcolo il raggio:

$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$

$= \sqrt{(0)^2 + (0)^2 - (-25)} =$

$= \sqrt{25} = 5$

Si tratta di una *circonferenza* di centro l'origine O(0,0) e raggio 5.

Di fianco la rappresentazione grafica.

d) Rappresentazione grafica di una circonferenza

Per disegnare una circonferenza con equazione:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Come prima cosa si trovano le coordinate del centro:

$x_o = -a/2$ $y_o = -b/2$ $O(-a/2 , -b/2)$

Si calcola poi il raggio:

$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)}$

Quindi su un piano cartesiano si riportano le coordinate del centro e, con distanza uguale al raggio traccio la circonferenza.

Per qualche esempio puoi vedere gli esercizi 1, 5 e 6 della pagina precedente

---

e) Circonferenze in posizioni particolari

Se consideriamo l'equazione generale della circonferenza:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Se mancano uno o piu' dei termini che circonferenza avremo?

Vediamo quali termini possono mancare:

Se mancano x^2 e y^2 non e' piu' una circonferenza

Vediamo cosa succede, invece, quando valgono zero i coefficienti:

1 - Se nella circonferenza manca il termine ax

In tal caso $a = 0$ e l'equazione della circonferenza diventa:

$x^2 + y^2 + by + c = 0$

Poiche' le coordinate del centro sono:

$x_o = -a/2$ $y_o = -b/2$

Si avra'

$x_o = 0$

Cioe' se manca il termine ax la circonferenza ha il centro su un punto dell'asse delle y (equazione x=0)

Esempio:

Considero la circonferenza:

$x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0$

il centro vale

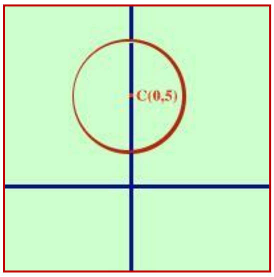
$x_o = -a/2 = 0$ $y_o = -b/2 = 5$

ed il raggio vale

$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$

$= \sqrt{(0 + 25 - 16)} = \sqrt{9} = 3$

E' la circonferenza di centro C(0,5) e raggio 3



---

2 - Se nella circonferenza manca il termine bx

In tal caso $b = 0$ e l'equazione della circonferenza diventa:

$x^2 + y^2 + ax + c = 0$

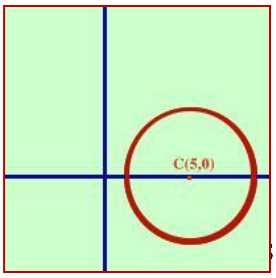
Poiche' le coordinate del centro sono:

$x_o = -a/2$ $y_o = -b/2$

Si avra':

$y_o = 0$

Cioe' se manca il termine by la circonferenza ha il centro su un punto dell'asse delle x (equazione y=0).



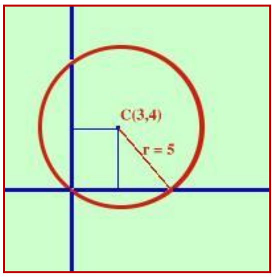
Esempio:
Considero la circonferenza:
$x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$
il centro vale
$x_o = -a/2 = 5$ $\qquad$ $y_o = -b/2 = 0$
ed il raggio vale
$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$
$= \sqrt{(25 + 0 - 9)} = \sqrt{16} = 4$
E' la circonferenza di centro C(5,0) e raggio 4

3 - Se nella circonferenza manca il termine noto c

In tal caso $c = 0$ e l'equazione della circonferenza diventa:
$x^2 + y^2 + ax + by = 0$
Poiche' manca il termine noto la circonferenza deve essere soddisfatta dal punto O = (0,0) cioe' la circonferenza passa per l'origine; infatti sostituendo al posto di **x** lo zero ed al posto di **y** lo zero, otteniamo zero = zero cioe' un'identita'.

Il fatto e' generale: ogni volta che una funzione non trascendente y=f(x) manca del termine noto allora essa passa per l'origine, infatti in tal caso sostituendo nella funzione al posto di x ed y il valore zero si ottiene 0=0.

Esempio:
Considero la circonferenza:
$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
il centro vale
$x_o = -a/2 = 3$ $\qquad$ $y_o = -b/2 = 4$
ed il raggio vale
$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$
$= \sqrt{(9 + 16 - 0)} = \sqrt{25} = 5$
E' la circonferenza di centro C(3,4) e raggio 5

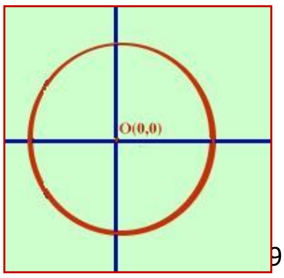


4 - Se nella circonferenza mancano i termini ax e by

In tal caso $a = 0$ e $b = 0$ e l'equazione della circonferenza diventa:
$x^2 + y^2 + c = 0$
La prima cosa che si puo' dire e' che c deve essere negativo altrimenti l'equazione non puo' rappresentare una circonferenza (terza condizione); infatti:
$x^2 + y^2 = -c$
e $-c$ come somma di due quadrati deve essere positivo.
In questo caso si preferisce scrivere l'equazione come:
$x^2 + y^2 = r^2$
E' l'equazione di centro l'origine O(0,0) e raggio r.

Infatti a=0 significa centro sull'asse y e contemporaneamente b=0 significa centro sull'asse x quindi il centro e' nel punto O(0,0) comune sia ad x che ad y

Esempio:
Considero la circonferenza:
$x^2 + y^2 = 25$
il centro vale:
$x_o = -a/2 = 0$ $\qquad$ $y_o = -b/2 = 0$
ed il raggio vale:
$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$



$= \sqrt{(0 + 0 - 25)} = \sqrt{25} = 5$

E' la circonferenza di centro O(0,0) e raggio 5.

5 - Se nella circonferenza mancano il termine ax ed il termine noto c

In tal caso $a = 0$ e $c = 0$ e l'equazione della circonferenza diventa:

$x^2 + y^2 + by = 0$

Basta sommare i due fatti:

Siccome manca il termine ax la circonferenza ha il centro su un punto dell'asse delle y (equazione x=0); inoltre poiche' manca il termine noto la circonferenza passa per l'origine;

Esempio:

Considero la circonferenza:

$x^2 + y^2 - 8y = 0$

il centro vale

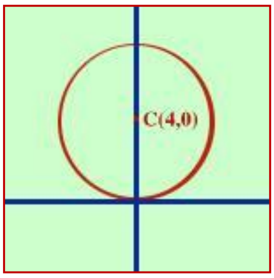
$x_o = -a/2 = 0$ $\quad$ $y_o = -b/2 = 4$

ed il raggio vale

$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$

$= \sqrt{(0 + 16 - 0)} = \sqrt{16} = 4$

E' la circonferenza di centro C(0,4) e raggio 4



6 - Se nella circonferenza mancano il termine by ed il termine noto c

In tal caso $b = 0$ e $c = 0$ e l'equazione della circonferenza diventa:

$x^2 + y^2 + ax = 0$

Basta sommare i due fatti:

Siccome manca il termine by la circonferenza ha il centro su un punto dell'asse delle x (equazione y=0); inoltre poiche' manca il termine noto la circonferenza passa per l'origine;

Esempio:

Considero la circonferenza:

$x^2 + y^2 - 6x = 0$

il centro vale

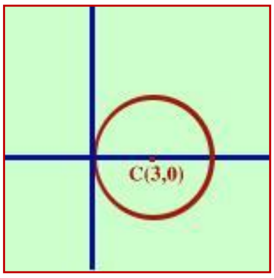
$x_o = -a/2 = 3$ $\quad$ $y_o = -b/2 = 0$

ed il raggio vale

$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$

$= \sqrt{(9 + 0 - 0)} = \sqrt{9} = 3$

E' la circonferenza di centro C(3,0) e raggio 3



7 - Se nella circonferenza mancano i termini ax, by ed il termine noto c

In tal caso $a=0$ $b = 0$ e $c = 0$ e l'equazione della circonferenza diventa:

$x^2 + y^2 = 0$

E' una circonferenza di centro l'origine e raggio zero (circonferenza degenere).

Si puo' pensare come il prodotto di due rette immaginarie:

$(x+iy)(x-iy)=0$

(1) Intersezione fra una retta ed una circonferenza

Data l'equazione di una retta e l'equazione di una circonferenza, se le due curve hanno dei punti in comune deve essere possibile trovarne le coordinate perche' geometricamente possiamo trovare i punti comuni.

I punti comuni appartengono contemporaneamente alla retta ed alla circonferenza, quindi bastera' imporre che l'equazione della retta e l'equazione della circonfernza valgano contemporaneamente, cio' equivale a fare il sistema fra le due equazioni.
Le coordinate dei punti che si trovano contemporaneamente sulla retta e sulla circonferenza saranno le soluzioni del sistema

---

Esercizio:
Trovare i punti comuni alla retta:
$y = -2x + 6$
ed alla circonferenza:
$2x^2 + 2y^2 - 6x - 7y = 0$

Possiamo dire subito che la circonferenza passa per l'origine perche' manca il termine noto c
Inoltre e' sempre consigliabile fare la rappresentazione geometrica per poter controllare se i risultati sono accettabili

---

Imposto il sistema:

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ 2x^2 + 2y^2 - 6x - 7y = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ 2x^2 + 2(-2x + 6)^2 - 6x - 7(-2x + 6) = 0 \end{cases}$$

Eseguo i calcoli:

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ 2x^2 + 2(4x^2 - 24x + 36) - 6x + 14x - 42 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ 2x^2 + 8x^2 - 48x + 72 - 6x + 14x - 42 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ 10x^2 + - 40x + 30 = 0 \end{cases}$$

Divido tutto per 10 (cosi' semplifico i calcoli):

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x^2 + - 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

Applico la formula risolutiva per l'equazione di secondo grado:

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x_{1,2} = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{[(-4)^2 - 4(1)(3)]}}{2(1)} \end{cases}$$

Eseguo i calcoli:

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{[16 - 12]}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \end{cases}$$

Otteniamo le due soluzioni:
$x_1 = (4+2)/2 = 6/2 = 3$
$x_2 = (4-2)/2 = 2/2 = 1$
Sostituisco la prima soluzione nel sistema:

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = -2 \cdot 3 + 6 \\ x = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

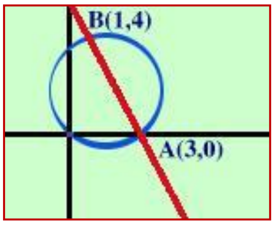
Primo punto di intersezione: A(3,0)

Sostituisco la seconda soluzione nel sistema:

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = -2 \cdot 1 + 6 \\ x = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Secondo punto di intersezione: B(1,4)

A destra la rappresentazione grafica.



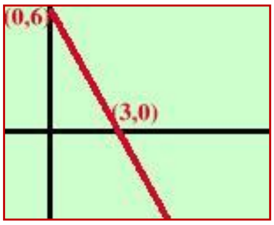
Come fare una rappresentazione grafica della circonferenza:

Traccio la retta

$y = -2x + 6$

diamo dei valori qualunque alla x e leggiamo i valori corrispondenti per la y; mi conviene dare alla x il valore 0 e poi un valore abbastanza lontano, tipo 3

x	y
0	6
3	0



Per tracciare la circonferenza trovo il centro ed il raggio

$2x^2 + 2y^2 - 6x - 7y = 0$

Metto la circonferenza in forma normale (divido ogni termine per 2)

$x^2 + y^2 - 3x - 7/2\, y = 0$

calcolo le coordinate del centro

$x_o = -a/2 = 3/2$

$y_o = -b/2 = 7/4$

C(3/2 , 7/4)

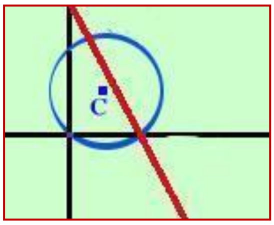
Calcolo poi il raggio

$r = \sqrt{(xo^2 + yo^2 - c)} =$

$= \sqrt{[(3/2)^2 + (7/4)^2 - 0)]} =$

$= \sqrt{(9/4 + 49/16)} =$

$= \sqrt{(85/16)} = 2{,}3$ (circa)

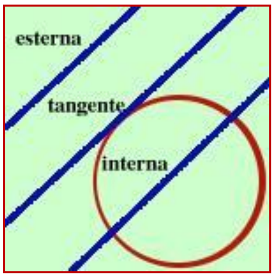


Dalla figura posso individuare in modo grossolano le coordinate e controllare se i risultati sono compatibili con quelli della figura stessa

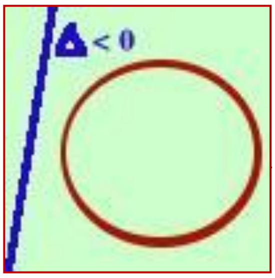
f) Posizione di una retta rispetto ad una circonferenza

Una retta rispetto alla circonferenza puo' essere:

- esterna
- tangente
- interna

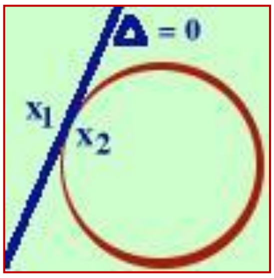


Facendo il sistema fra una retta ed una circonferenza otterremo un'equazione di secondo grado

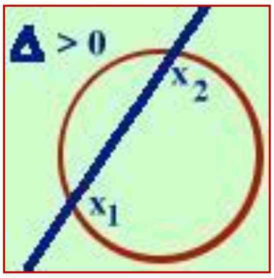


- se la retta e' esterna il sistema ha solo soluzioni immaginarie cioe' il delta del sistema sara' minore di zero, equivale a dire che la retta non ha punti comuni con la circonferenza

---

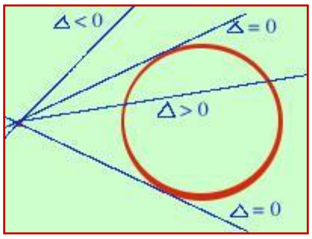


- se la retta e' tangente il sistema ha due soluzioni coincidenti cioe' il delta del sistema sara' uguale a zero e la retta ha con la circonferenza due punti coincidenti comuni $x_1 = x_2$



- se la retta e' interna il sistema ha soluzioni reali cioe' il delta del sistema sara' maggiore di zero e la retta taglia la circonferenza in due punti distinti x_1 e x_2

Equazioni delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza



Abbiamo visto che quando una retta e' tangente ad una circonferenza ha con essa 2 punti coincidenti in comune, cioe' facendo il sistema fra la retta e la circonferenza il discriminante del sistema e' uguale a zero.
Ma allora, se considero il fascio di rette che esce dal punto e fra tutte le rette scelgo quelle che in sistema con la circonferenza hanno il **Δ** uguale a zero trovero' le rette tangenti

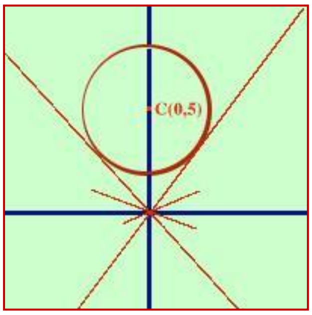
---

In pratica ho ribaltato la frittata:
retta tangente ⇒ **Δ** = 0
Δ= 0 ⇒ retta tangente

Per trovare le rette tangenti condotte da un punto ad una circonferenza:
- considero il fascio di rette passanti per il punto (dipendente da un parametro) e faccio il sistema fra il fascio di rette e la circonferenza (questo sistema mi rappresenta tutte le intersezioni fra il fascio di rette e la circonferenza)
- risolvo il sistema ed ottengo un'equazione detta equazione risolvente
- pongo il discriminante dell'equazione risolvente uguale a zero, ottengo un'equazione con il parametro come incognita
- risolvendo l'ultima equazione trovo i valori del parametro corrispondenti alle rette tangenti

---

Vediamo di capire meglio il metodo con un esempio pratico.
Trovare le tangenti alla circonferenza:
$x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0$
condotte dall'origine $O(0,0)$.
E' la circonferenza di centro $C(0,5)$ e raggio 3.



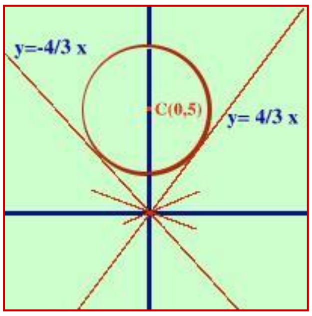
E' una circonferenza che abbiamo gia' incontrato

Per trovare l'equazione delle rette tangenti considero il fascio di rette con centro l'origine:
$y = mx$
Faccio il sistema fra la circonferenza ed il fascio di rette:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$
Sostituisco:
$$\begin{cases} x^2 + (mx)^2 - 10(mx) + 16 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$
Calcolo:
$$\begin{cases} x^2 + m^2x^2 - 10mx + 16 = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - - \end{cases}$$
Raccolgo i termini con x^2, con x ed i termini noti ed ottengo l'equazione risolvente:
$x^2(1 + m^2) - 10mx + 16 = 0$
Ora calcolo il discriminante (delta) $b^2 - 4ac$ e lo pongo uguale a zero; in tal modo determino i valori di **m** per cui le rette del fascio sono tangenti. Ecco i calcoli:

Equazione risolvente:
$x^2(1 + m^2) - 10mx + 16 = 0$
Ho che:
$a = 1 + m^2$
$b = -10m$
$c = 16$
Ora calcolo il discriminante e lo pongo uguale a zero:
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$
$\Delta = (-10m)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot (16) = 0$
$100m^2 - 64 - 64m^2 = 0$
$36m^2 - 64 = 0$
Posso semplificare per 4
$9m^2 - 16 = 0$

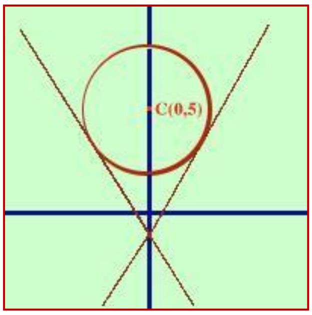
Per semplicita' siccome il termine b e' divisibile per due potevo considerare il $\Delta/4$ cioe'
$\Delta/4 = (b/2)^2 - ac = 0$
Nel nostro caso avremo
$\Delta/4 = (-5m)^2 - (1 + m^2) \cdot (16) = 0$
$25m^2 - 16 - 16m^2 = 0$
$9m^2 - 16 = 0$

$m^2 = 16/9$
$m = \pm\sqrt{16/9} = \pm 4/3$
Le due rette tangenti sono:
$y = 4/3\,x \qquad y = -4/3\,x$



Esercizio:
Trovare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza:
$x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$ condotte dal punto $A(0,-1)$
Considero il fascio di rette
$y - y_0 = m(x - x_0)$
passante per il punto $A(0,-1)$:
$y + 1 = m(x - 0)$

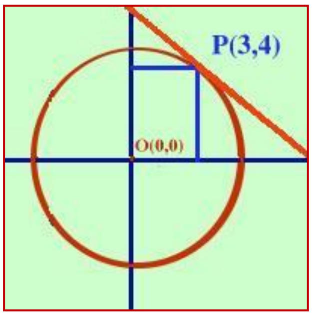
Eseguo i calcoli:
$y = mx - 1$
Metto a sistema l'equazione del fascio con l'equazione della circonferenza:
$\begin{cases} y = mx - 1 \\ x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0 \end{cases}$
Sostituisco per ottenere l'equazione risolvente:
$x^2 + (mx - 1)^2 - 10(mx - 1) + 9 = 0$
Sviluppo:
$x^2 + m^2x^2 - 2mx + 1 - 10mx + 10 + 9 = 0$
Raccolgo tra loro i termini con x^2 ed i termini con x per evidenziare l'equazione di secondo grado:
$(1 + m^2)x^2 - 12mx + 20 = 0$
Ora pongo il Delta (potrei fare il delta quarti) uguale a zero:
$\boldsymbol{\Delta} = b^2 - 4ac = 144m^2 - 80 - 80m^2 = 0$
$64m^2 - 80 = 0$
Semplifico per 16:
$4m^2 - 5 = 0$
$m = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}$
Le due rette tangenti sono:
$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - 1$ e $y = \frac{-\sqrt{5}}{2}x - 1$
A destra la rappresentazione grafica.



Equazioni della tangente condotta da un punto sulla circonferenza

Se il punto da cui inviare le tangenti si trova sulla circonferenza troveremo solo un'equazione, infatti le tangenti sono due coincidenti: Prova a pensare ad un punto esterno da cui mandi due tangenti ed immagina di avvicinarlo fino ad arrivare alla circonferenza Quindi il metodo sara' esattamente uguale al precedente, in piu' potremo dire che l'equazione che otterremo ponendo il Delta uguale a zero dovra' avere due soluzioni coincidenti, cioe' il primo membro dell'equazione dovra' essere un quadrato perfetto (le soluzioni coincidenti si hanno se e solo se i termini dell'equazione formano un quadrato)

Vediamo un esempio pratico.
Trovare l' equazione della tangente alla circonferenza:
$x^2 + y^2 - 25 = 0$
Condotte dal suo punto:
P(3,4)
E' la circonferenza di centro O(0,0) e raggio 5.
Per trovare l'equazione della retta tangente considero il fascio di rette passante per il punto P(3,4):
$y - 4 = m(x - 3)$



Faccio il sistema fra la circonferenza ed il fascio di rette:
$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ y = mx - 3m + 4 \end{cases}$
Sostituisco:
$\begin{cases} x^2 + (mx - 3m + 4)^2 - 25 = 0 \\ y = mx - 3m + 4 \end{cases}$
Calcolo: Formula del quadrato del trinomio
$\begin{cases} x^2 + m^2x^2 + 9m^2 + 16 - 6m^2x + 8mx - 24m - 25 = 0 \\ - \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + m^2x^2 - 6m^2x + 8mx + 9m^2 - 24m - 9 = 0 \\ - \end{cases}$$

Raccolgo i termini con x^2, con x ed i termini noti ed ottengo l'equazione risolvente:

$x^2(1 + m^2) - 2x(3m^2 - 4m) + 9m^2 - 24m - 9 = 0$

Ora calcolo il discriminante (anzi il Delta quarti essendo il termine con la x divisibile per 2) $(b/2)^2 - ac$ e lo pongo uguale a zero, in tal modo determino i valori di m per cui le rette del fascio sono tangenti:

$a = 1 + m^2$

$b = -2(3m^2 - 4m)$

$c = 9m^2 - 24m - 9$

$(b/2)^2 - ac = (3m^2 - 4m)^2 - (1 + m^2)(9m^2 - 24m - 9) = 0$

Sviluppo il quadrato ed il prodotto

$9m^4 + 16m^2 - 24m^3 - (9m^2 - 24m - 9 + 9m^4 - 24m^3 + 9m^2) = 0$

faccio cadere la parentesi

$9m^4 + 16m^2 - 24m^3 - 9m^2 + 24m + 9 - 9m^4 + 24m^3 - 9m^2 = 0$

Sommo i termini simili:

$16m^2 + 24m + 9 = 0$

Come ci aspettavamo e' un quadrato perfetto:

$(4m + 3)^2 = 0$

$4m + 3 = 0$

$$m = -\frac{3}{4}$$

Sostituisco m nell'equazione del fascio

$y = mx - 3m + 4$

$y = (-3/4)x - 3(-3/4) + 4$

L' equazione della retta tangente e':

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

Vediamo anche un altro metodo.

Si basa sul fatto che nella circonferenza la tangente in un suo punto e' perpendicolare al raggio nel punto di contatto.

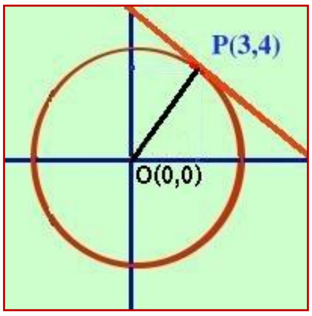
Come calcoli e' molto piu' semplice, ma ha il difetto di poter essere usato solo per la circonferenza e solo per la tangente ad un punto sulla circonferenza, mentre l'altro metodo e' generale e si puo' usare anche per tutte le coniche.

Trovare l' equazione della tangente alla circonferenza:

$x^2 + y^2 - 25 = 0$

condotte dal suo punto:

P(3,4)



Calcoliamo il coefficiente angolare della retta OP:

$$m = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

Quindi la tangente, essendo la perpendicolare avra' coefficiente angolare:

$$m = -\frac{3}{4}$$

Quindi per trovare la tangente bastera' prendere l'equazione della retta passante per P e con coefficiente angolare uguale a -3/4:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

Moltiplico tutto per 4 per togliere i denominatori:

4y - 16 = -3(x-3)

4y - 16 = -3x + 9

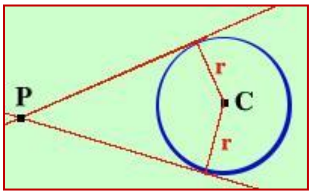
4y = -3x + 25

e quindi esplicitando:

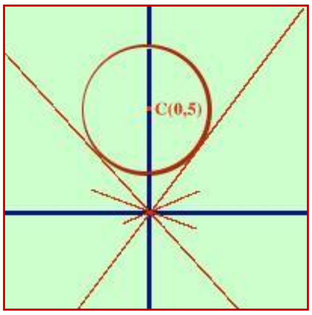
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

Altro metodo per calcolare le equazioni delle tangenti condotte da un punto alla circonferenza

Come hai visto il metodo indicato per trovare le equazioni dell rette tangenti condotte da un punto alla circonferenza e' piuttosto complicato come calcoli anche se interessante dal punto di vista teorico.



In alcuni istituti tecnici ho visto usare il metodo seguente:
la retta tangente alla circonferenza sara' la retta del fascio, tale che la sua distanza dal centro e' uguale al raggio.
Quindi, applicando la formula della distanza da un punto ad una retta impongo che nel fascio di rette la distanza dal centro sia uguale al raggio: trovero' cosi' i valori di m che sostituiti nel fascio mi danno l'equazione delle tangenti.
Particolarmente facile e' applicare questo metodo quando il centro del fascio e' sulla circonferenza.



Vediamo ad esempio di applicare questo metodo ad un esercizio gia' fatto in precedenza.
Trovare le tangenti alla circonferenza
$x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0$ condotte dall'origine $O(0,0)$.
E' la circonferenza di centro C(0,5) e raggio 3. Per trovare l'equazione delle rette tangenti considero il fascio di rette con centro l'origine:

$y = mx$

ed impongo che la distanza del fascio da C(0,5) sia uguale a 3 (raggio):

$$d = \frac{y_0 - mx_0 - q}{\pm\sqrt{(1 + m^2)}} = 3$$

Sostituisco i valori che ho:

$x_0=0 \qquad y_0=5 \qquad q=0 \qquad m=m$

$$\frac{5 - 0 \cdot 0 - 0}{\pm\sqrt{(1 + m^2)}} = 3$$

$$\frac{5}{\pm\sqrt{(1 + m^2)}} = 3$$

Faccio il minimo comune multiplo per togliere il denominatore (posso farlo senza condizioni perche' e' certamente diverso da zero essendo radice di somma di due quadrati):

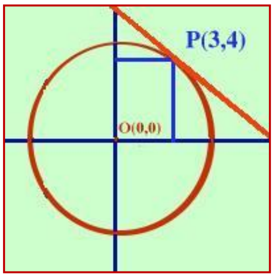
$$5 = \pm 3\sqrt{(1 + m^2)}$$

Elevo al quadrato da entrambe le parti:

$$25 = 9(1 + m^2)$$

$25 = 9 + 9m^2$
$9m^2 = 25 - 9$
$9m^2 = 16$
$m^2 = 16/9$
$m = \pm\sqrt{16/9} = \pm 4/3$
Le due rette tangenti sono:
$y = 4/3\,x \qquad y = -4/3\,x$

Vediamo anche un esempio con il punto sulla circonferenza (anche qui riprendiamo un problema gia fatto).
Trovare l' equazione della tangente alla circonferenza
$x^2 + y^2 - 25 = 0$ condotte dal suo punto $P(3,4)$.



E' la circonferenza di centro O(0,0) e raggio 5.
Per trovare l'equazione della retta tangente considero il fascio di rette passante per il punto P(3,4):
$y - 4 = m(x - 3)$
$y = mx - 3m + 4$
Impongo che la distanza del fascio da C(0,0) sia uguale a 5 (raggio):
$$d = \frac{y_0 - mx_0 - q}{\pm\sqrt{(1+m^2)}} = 5$$
Sostituisco i valori che ho:
$x_0=0 \quad y_0=0 \quad q= -3m + 4 \quad m=m$

$$\frac{0 - m\cdot 0 + 3m - 4}{\pm\sqrt{(1+m^2)}} = 5$$
Faccio il minimo comune multiplo per togliere il denominatore (anche qui posso farlo senza condizioni perche' e' certamente diverso da zero essendo radice di somma di due quadrati)
$3m - 4 = \pm 5\sqrt{(1 + m^2)}$
Elevo al quadrato da entrambe le parti per far sparire la radice
$9m^2 - 24m + 16 = 25 + 25m^2$
Porto i termini prima dell'uguale, sommo e cambio di segno
$16m^2 + 24m + 9 = 0$
Come c'era da aspettarsi il termine prima dell'uguale e' un quadrato essendo il punto sulla circonferenza :
$(4m + 3)^2 = 0$
$4m + 3 = 0$
$m = - 3/4$
Per ottenere la tangente sostituisco questo valore a m nel fascio:
$y = mx - 3m + 4$
$y = -3/4\,x - 3\cdot(-3/4) + 4$
L'equazione e':
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

g) Problemi vari sulla determinazione dell'equazione di una circonferenza

L'equazione generica di una circonferenza
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

dipende da tre parametri indipendenti: a b c.
Pertanto per trovare l'equazione di una particolare circonferenza dovro' sempre avere tre condizioni diverse che valgano contemporaneamente .

Significa che dovro' fare un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a,b,c

Le condizioni potranno essere:

- passaggio per un punto
- tangenza ad una retta
- valore di una coordinata del centro
  (il centro da solo vale 2 condizioni, una per ogni coordinata)
- misura del raggio
- valore di uno dei parametri a b c

Passaggio per un punto

Imporre la condizione di passaggio per un punto significa prendere l'equazione della circonferenza:
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
e sostituire al posto di x e y le coordinate del punto dato.

Esempio :
Condizione per il passaggio della circonferenza:
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
per il punto A(2,3)
$(2)^2 + (3)^2 + a(2) + b(3) + c = 0$
$4 + 9 + 2a + 3b + c = 0$
Condizione:
$2a + 3b + c + 13 = 0$

Da notare che il passaggio per l'origine:
O=(0,0)
Porta alla condizione
$c = 0$
Infatti sostituendo le coordinate nell'equazione della circonferenza ottengo:
$(0)^2 + (0)^2 + a(0) + b(0) + c = 0$
Condizione
$c = 0$

Tangenza ad una retta

Imporre la condizione di tangenza ad una retta significa fare il sistema fra la retta e la circonferenza e porre il Delta uguale a zero

---

Esempio:
Trovare la condizione perche' la circonferenza:
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
sia tangente alla retta:
$y = 2x + 3$
Faccio il sistema:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$
Equazione risolvente:
$x^2 + (2x+3)^2 + ax + b(2x+3) + c = 0$
$x^2 + 4x^2 + 12x + 9 + ax + 2bx + 3b + c = 0$
$5x^2 + x(a + 2b + 12) + 3b + c + 9 = 0$
Pongo il Delta = 0
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$
Condizione di tangenza:
$(a + 2b + 12)^2 - 4(5)(3b + c + 9) = 0$

Se vuoi vedere la formula del quadrato del trinomio
$a^2 + 4b^2 + 144 + 4ab + 24a + 48b - 60b - 20c - 180 = 0$
Condizione di tangenza:
$a^2 + 4b^2 + 4ab + 24a - 12b - 20c - 36 = 0$
Come vedi i calcoli sono piuttosto complicati, quindi viene usata abbastanza raramente, od almeno con rette mancanti di qualche termine.

Valore di una coordinata del centro

Per imporre la condizione del valore di una coordinata del centro basta ricordare le relazioni fra le coordinate del centro ed i coefficienti a e b della circonferenza:
$a = -2x_o$
$b = -2y_o$

Esempio:
Trovare la condizione perche' la circonferenza:
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
abbia il centro sulla retta:
$x = 3$
significa che il centro ha coordinata x uguale a 3.
Impongo la condizione:
$a = -2x_o$
$a = -2(3)$
Condizione:
$a = -6$

Altro esempio:
Trovare la condizione perche' la circonferenza:
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
abbia il centro sull'asse delle x.
l'asse x ha equazione
$y = 0$
Significa che la coordinata y del centro vale zero.
Impongo la condizione:
$b = -2y_o$
$b = -2(0)$
Condizione:
$b = 0$

Valore del raggio

Per imporre la condizione del valore del raggio basta ricordare le relazioni fra i coefficienti a b c ed il raggio r della circonferenza:
$(a/2)^2 + (b/2)^2 - c = r^2$
o meglio:
$a^2 + b^2 - 4c = 4r^2$

Esempio:
Trovare la condizione perche' la circonferenza:
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
abbia il raggio d misura:
$r = 3$
$a^2 + b^2 - 4c = 4r^2$
$a^2 + b^2 - 4c = 4(3)^2$
$a^2 + b^2 - 4c = 4 \cdot 9$
Condizione:
$a^2 + b^2 - 4c = 36$

Valore di uno dei parametri

E' il caso piu' semplice: basta scrivere
parametro= valore

Esempio:
Se so che la circonferenza:
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
ha il coefficiente della x uguale a 4 scrivero' la
Condizione:
$a = 4$

Quindi potremo avere i seguenti problemi:
Trovare l'equazione della circonferenza:

- passante per tre punti assegnati
- passante per due punti assegnati e tangente ad una retta data
- passante per un punto e tangente a due rette date
- tangente a tre rette date

Equazione della circonferenza passante per tre punti assegnati

Per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza.
Date le coordinate di tre punti vogliamo risalire all'equazione della circonferenza.

(Naturalmente il problema si può anche risolvere geometricamente).

Per semplicita' risolviamo il problema su un esempio pratico.
Se hai bisogno anche della spiegazione teorica.
Trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti:
O(0,0)   A(6,0)   B(0,3)
Prendo l'equazione generica della circonferenza:
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

- Prima condizione: passaggio per O=(0,0)
  Sostituisco le coordinate nell'equazione della circonferenza:
  $0^2 + 0^2 + a(0) + b(0) + c = 0$
  $c = 0$
- Seconda condizione: passaggio per A=(6,0)
  Sostituisco le coordinate nell'equazione della circonferenza:
  $6^2 + 0^2 + a(6) + b(0) + c = 0$
  $36 + 6a + c = 0$
  $6a + c = -36$
- Terza condizione: passaggio per B=(0,3)
  Sostituisco le coordinate nell'equazione della circonferenza:
  $0^2 + 3^2 + a(0) + b(3) + c = 0$
  $9 + 3b + c = 0$
  $3b + c = -9$

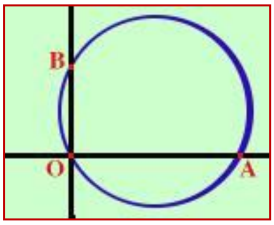
Le tre condizioni devono valere contemporaneamente; faccio il sistema:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 6a + c = -36 \\ 3b + c = -9 \end{cases}$$

Sostituisco c = 0 nella seconda e nella terza:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 6a = -36 \\ 3b = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ a = -6 \\ b = -3 \end{cases}$$



L'equazione cercata e':
$x^2 + y^2 - 6x - 3y = 0$

Equazione della circonferenza passante per due punti assegnati e tangente ad una retta data

Trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti:
$O(0,0)$ $A(0,4)$
e tangente alla retta:
$y = x$
Prendo l'equazione generica della circonferenza:
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

- Prima condizione: passaggio per $O=(0,0)$
  Sostituisco le coordinate nell'equazione della circonferenza
  $0^2 + 0^2 + a(0) + b(0) + c = 0$
  $c = 0$
- Seconda condizione: passaggio per $A=(0,4)$
  Sostituisco le coordinate nell'equazione della circonferenza
  $0^2 + 4^2 + a(0) + b(4) + c = 0$
  $16 + 4b + c = 0$
  $4b + c = -16$
- Terza condizione: tangenza alla retta $y = x$
  Devo fare il sistema ed imporre che il delta sia uguale a zero
  $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = x \end{cases}$
  sostituisco
  $\begin{cases} x^2 + (x)^2 + ax + b(x) + c = 0 \\ y = x \end{cases}$
  calcolo l'equazione risolvente
  $x^2 + x^2 + ax + bx + c = 0$
  $2x^2 + x(a + b) + c = 0$
  pongo il delta uguale a zero
  $(a+b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0$
  $a^2 + b^2 + 2ab - 8c = 0$

Le tre condizioni devono valere contemporaneamente; faccio il sistema:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4b + c = -16 \\ a^2 + b^2 + 2ab - 8c = 0 \end{cases}$$

Sostituisco $c = 0$ nella seconda e nella terza:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4b = -16 \\ a^2 + b^2 + 2ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = -4 \\ a^2 + (-4)^2 + 2a \cdot (-4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = -4 \\ a^2 - 8a + 16 = 0 \end{cases}$$

Soluzione dell'equazione
$a^2 - 8a + 16 = 0$
applico la formula risolutiva
I coefficienti sono:
1° coeff. = 1
2° coeff. = - 8
3° coeff. = 16

$$a_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$

$$a_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2}$$

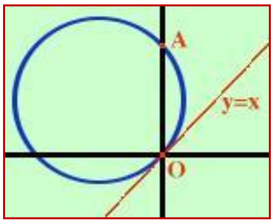
Meglio, avresti potuto usare la formula ridotta oppure avresti potuto notare che l'equazione e' un quadrato perfetto

Dall'equazione di secondo grado, ottengo due soluzioni coincidenti:

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = -4 \\ a = 4 \end{cases}$$

L'equazione cercata e':

$x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$



Equazione della circonferenza passante per un punto e tangente a due rette assegnate

Trovare l'equazione della circonferenza passante per il punto:

A(1,0)

e tangente alle rette:

$y = 0$

$y = -x$

E' difficile incontrare un problema del genere per le difficolta' di calcolo che si incontrano: infatti la tangenza ad una retta si traduce in una condizione di secondo grado, quindi l'equazione risolvente sara' generalmente di quarto grado; noi facciamo un caso particolare.

Prendo l'equazione generica della circonferenza:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

- Prima condizione: passaggio per A=(1,0)
  Sostituisco le coordinate nell'equazione della circonferenza:
  $1^2 + 0^2 + a(1) + b(0) + c = 0$
  $1 + a + c = 0$
  $a + c = -1$
- Seconda condizione: tangenza alla retta $y = 0$
  Devo fare il sistema ed imporre che il delta sia uguale a zero:
  $$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
  Sostituisco:
  $$\begin{cases} x^2 + (0)^2 + ax + b(0) + c = 0 \\ y = x \end{cases}$$
  calcolo l'equazione risolvente:
  $x^2 + ax + c = 0$
  pongo il delta uguale a zero:
  $a^2 - 4c = 0$
- Terza condizione: tangenza alla retta $y = -x$
  Devo fare il sistema ed imporre che il delta sia uguale a zero:
  $$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = -x \end{cases}$$
  Sostituisco:
  $$\begin{cases} x^2 + (-x)^2 + ax + b(-x) + c = 0 \\ y = -x \end{cases}$$
  Calcolo l'equazione risolvente:
  $x^2 + x^2 + ax - bx + c = 0$
  $2x^2 + x(a - b) + c = 0$
  Pongo il delta uguale a zero:
  $(a - b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0$
  $a^2 - 2ab + b^2 - 8c = 0$
  $a^2 + b^2 - 2ab - 8c = 0$

Le tre condizioni devono valere contemporaneamente; faccio il sistema:

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ a^2 - 4c = 0 \\ a^2 + b^2 - 2ab - 8c = 0 \end{cases}$$

Ricavo c dalla prima equazione e sostituisco nelle altre:

$$\begin{cases} c = -1 - a \\ a^2 - 4(-1 - a) = 0 \\ b^2 - 2ab - 4(-1 - a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - a \\ a^2 + 4 + 4a = 0 \\ b^2 - 2ab + 4 + 4a = 0 \end{cases}$$

Il primo termine della seconda equazione e' un quadrato:

$$\begin{cases} c = -1 - a \\ (a + 2)^2 = 0 \\ b^2 - 2ab + 4 + 4a = 0 \end{cases}$$

Risolvo la seconda equazione:

$$\begin{cases} c = -1 - a \\ a = -2 \\ b^2 - 2ab + 4 + 4a = 0 \end{cases}$$

Sostituisco il valore di a trovato nella prima e nella terza equazione:

$$\begin{cases} c = -1 + 2 \\ a = -2 \\ b^2 + 4b + 4 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = -2 \\ b^2 + 4b - 4 = 0 \end{cases}$$

Risolvo la terza equazione del sistema con la formula per le equazioni di secondo grado:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = -2 \\ b_{1,2} = -2 \pm \sqrt{(2^2 + 4)} \end{cases}$$

Ho usato la formula ridotta:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = -2 \\ b_{1,2} = -2 \pm \sqrt{8} \end{cases}$$

Estraggo di radice:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = -2 \\ b_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Ottengo due soluzioni (significa che due circonferenze diverse soddisfano le condizioni richieste):

$$\text{I Sol} = \begin{cases} c = 1 \\ a = -2 \\ b = -2 + 2\sqrt{2} \end{cases} \qquad \text{II Sol} = \begin{cases} c = 1 \\ a = -2 \\ b = -2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Le equazioni delle due circonferenze sono:

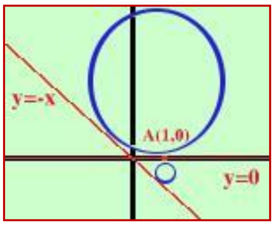
$x^2 + y^2 - 2x + (-2+2\sqrt{2})y + 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x + (-2-2\sqrt{2})y + 1 = 0$

cioe'

$x^2 + y^2 - 2x - (2-2\sqrt{2})y + 1 = 0$

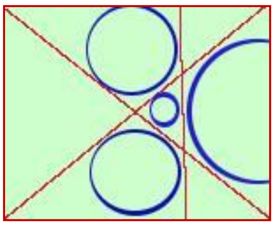
$x^2 + y^2 - 2x - (2+2\sqrt{2})y + 1 = 0$



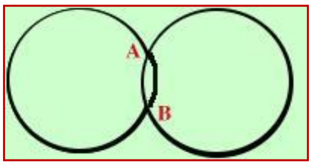
Equazione della circonferenza tangente a tre rette assegnate

Un problema del genere presenta grosse difficolta' di calcolo: infatti la tangenza ad una retta si traduce in una condizione di secondo grado, quindi l'equazione risolvente sara', in questo caso, di grado 8; teoricamente e' possibile pensarlo, in pratica un problema del genere non e' assegnabile

L'equazione di ottavo grado avra' quattro soluzioni complesse e quattro soluzioni reali; alle soluzioni reali corrisponderanno le equazioni delle quattro circonferenze tangenti a tre rette non parallele nel piano



h) Intersezione fra due circonferenze



Osservando due circonferenze nel piano puoi vedere che, se si intersecano, hanno due punti in comune.
Quindi, facendo il sistema fra le due circonferenze deve essere possibile trovare le coordinate dei punti.
Pero' un'equazione di una circonferenza e' di secondo grado; quindi il sistema fra le due circonferenze sarebbe di quarto grado, ed io non sono capace di risolvere un'equazione di quarto grado.
Per risolvere il problema possiamo utilizzare una proprieta' delle equazioni: la somma o la differenza termine a termine fra due equazioni valide e' ancora un'equazione valida (per valida intendo che non deve essere ne' impossibile ne' indeterminata).
Se noi sottraiamo termine a termine un'equazione dall'altra otteniamo un'equazione di primo grado che possiamo sostituire nel sistema ad una qualunque delle due equazioni di partenza e quindi il nostro sistema e' diventato di secondo grado.
Viene pero' da chiedersi: cosa rappresenta quest'equazione di primo grado?
Ed ancora : se il sistema di partenza e' di quarto grado cosa rappresentano le soluzioni che non corrispondono ai due punti?

Vediamo tutto nei particolari:

- Determinazione dei punti di intersezione
- Dimostrazione teorica
- L'asse radicale
- I punti ciclici di una circonferenza

(1) Determinazione dei punti di intersezione

Vediamo ora di applicare il metodo direttamente su un esempio.
Trovare i punti comuni alle circonferenze:
$x^2 + y^2 - 2x = 0$
$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$
Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Sottraggo le due equazioni termine a termine; per non sbagliare prima cambiamo di segno tutti i termini della seconda equazione poi facciamo la somma in verticale:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \qquad\qquad = 0 \\ -x^2 - y^2 + 4x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$// \quad // \quad + 2x \quad + 2y \quad - 4 \quad = 0$

Posso ancora semplificarla dividendola per 2:
$x + y - 2 = 0$
Sostituisco ora questa equazione alla seconda equazione del sistema (perche' e' la piu' difficile):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Ricavo la x dalla seconda equazione:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x = 2 - y \end{cases}$$

Sostituisco il valore della x nella prima equazione (io faccio tutti i calcoli, tu puoi abbreviare):

$$\begin{cases}(2 - y)^2 + y^2 - 2(2 - y) = 0 \\ x = 2 - y\end{cases}$$

Eseguo i calcoli:

$$\begin{cases}4 - 4y + y^2 + y^2 - 4 + 2y = 0 \\ x = 2 - y\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y^2 - 2y = 0 \\ x = 2 - y\end{cases}$$

Divido per 2 la prima equazione:

$$\begin{cases}y^2 - y = 0 \\ x = 2 - y\end{cases}$$

La prima equazione e' spuria:

$y(y-1) = 0$

ed ha soluzioni:

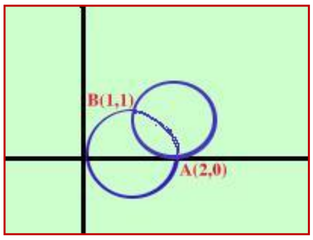
$y_1 = 0 \quad y_2 = 1$

Sostituisco il primo valore nella seconda equazione del sistema e trovo le coordinate del primo punto:

$$\text{I sol.} = \begin{cases}y = 0 \\ x = 2 - 0\end{cases}$$

$$\text{I sol.} = \begin{cases}y = 0 \\ x = 2\end{cases}$$

Sostituisco il secondo valore nella seconda equazione del sistema e trovo le coordinate del secondo punto:



$$\text{I sol.} = \begin{cases}y = 1 \\ x = 2 - 1\end{cases}$$

$$\text{I sol.} = \begin{cases}y = 1 \\ x = 1\end{cases}$$

I punti cercati sono:

$A(2,0) \quad B(1,1)$

A fianco una rappresentazione grafica del problema.

(2) Dimostrazione teorica

Quello che abbiamo fatto come esercizio facciamolo in modo teorico:

Considero le due circonferenza:

$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0\end{cases}$$

Sottraggo le due equazioni termine a termine; per non sbagliare prima cambiamo di segno tutti i termini della seconda equazione poi facciamo la somma in verticale:

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ -x^2 - y^2 - a_2x - b_2y - c_2 = 0\end{cases}$$

// // $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$

e questa e' un'equazione di primo grado che sostituita ad una delle due equazioni del sistema rende il sistema di secondo grado:

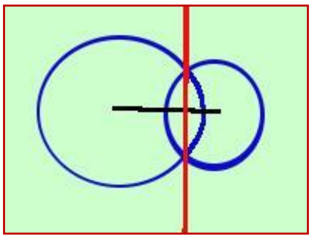
$$\begin{cases}(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + a^2x + b^2y + c^2 = 0\end{cases}$$

---

(3) L'asse radicale

L'equazione di primo grado che abbiamo ottenuto nella pagina precedente sottraendo termine a termine le due circonferenze e':

$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$



ed e' l'equazione di una retta perche' e' di primo grado nelle incognite x e y.
Viene da chiedersi cosa rappresenta questa retta.
Poiche' risolvendo il sistema si ottengono i punti comuni alle due circonferenze, la retta deve passare per quei due punti. In pratica e' la perpendicolare nei punti comuni alla retta che congiunge i raggi delle due circonferenze; viene chiamata: Asse radicale

Nella figura l'asse radicale e' indicato in rosso.

(4) I punti ciclici di una circonferenza

Poiche' il sistema fra le due circonferenze:

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0\end{cases}$$

e' di quarto grado; cioe' ha quattro soluzioni, mentre il sistema che otteniamo:

$$\begin{cases}(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0 \\ x2 + y2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0\end{cases}$$

e' di secondo grado, viene da chiedersi quali siano le due soluzioni sparite.
La risposta e' che si tratta di due punti immaginari all'infinito per cui passano tutte le circonferenze: l'insieme di questi due punti ha equazione:

$x^2+ y^2 = 0$

Questa si chiama equazione del cerchio assoluto. Infatti e' l'equazione del cerchio con centro l'origine e raggio zero e, come tutti i cerchi, passante per i punti ciclici

---

Per poter rappresentare i punti ciclici in un piano complesso servira' un particolare sistema di coordinate, le coordinate omogenee, ma questi argomenti trascendono il normale programma delle scuole medie superiori.

i) Fasci di circonferenze

Analogamente a quanto abbiamo fatto per il fascio di rette estendiamo il concetto di fascio alla circonferenza:

- Definizione
- Asse radicale del fascio di circonferenze
- Vari tipi di fasci di circonferenze
- Esercizi

(1) Definizione

Diremo che abbiamo un fascio di circonferenze se, all'interno dell'equazione, esiste un parametro che puo' variare senza alterare le condizioni per cui l'equazione e' una circonferenza.

Equivale a dire che quando il parametro varia, non devono mutare le condizioni per cui l'equazione rappresenta una circonferenza (di solito basta controllare la prima condizione: i coefficienti di x^2 e y^2 devono essere uguali).
Trovi le condizioni in fondo alla pagina Equazione generale della circonferenza

---

Esempio:
Consideriamo l'equazione:
$(1+ k)x^2 + (1+ k)y^2 + 2kx -2y + k -1= 0$
Controllo che i coefficienti di x^2 e y^2 siano uguali: $(1+k) = (1+k)$.
Posso separare i termini contenenti k da quelli che non lo contengono ed ottengo $x^2 + y^2 - 2y -1 + k (x^2 + y^2 + 2x + 1) = 0$.
Si tratta della combinazione lineare di due circonferenze che, per ogni di k, mi danno una circonferenza particolare:
se $k = 0$ ottengo la circonferenza
$x^2 + y^2 -2y -1 =0$
se $k = \infty$ ottengo la circonferenza:
$x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$
Infatti se k tende ad oo allora il termine con k diventa preponderante ed il termine senza k diventa trascurabile e si annulla per il valore $k = \infty$.
Viene allora spontaneo chiamare **fascio di circonferenze** l'insieme, al variare di k, rappresentato dal sistema:

$$\begin{cases}(1+k)x^2 + (1+k)y^2 + x(a_1 + ka_2) + y(b_1 + kb_2) + c_1 + kc_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0\end{cases}$$

od anche, per semplicita' (ma con meno precisione) dall'equazione:
$(1+ k)x^2 + (1+ k)y^2 + x(a_1 + ka_2) +y(b_1 + kb_2) + c_1 + kc_2= 0$

Le due circonferenze
$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$
$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2= 0$
Saranno chiamate circonferenze di base del fascio.
Comunque lo stesso fascio si puo' ottenere considerando due qualunque circonferenze del fascio stesso come circonferenze di base; e, per ottenere una circonferenza del fascio, bastera' sostituire a k un valore qualsiasi.

(2) Asse radicale del fascio di circonferenze

Consideriamo il fascio di circonferenze:
$(1+ k)x^2 + (1+ k)y^2 + x(a_1 + ka_2) +y(b_1 + kb_2) + c_1 + kc_2= 0$
Tra le varie circonferenze del fascio scegliamo quella data da k=-1
$(1-1)x^2 + (1-1)y^2 + x(a_1 -a_2) + y(b_1 - b_2) + c_1 - c_2= 0$
Ottengo:
$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2= 0$
Questa e' un'equazione di primo grado che rappresenta una retta: tale retta e' l'asse radicale del fascio
Puoi pensare l'asse radicale come una circonferenza di raggio infinito, quindi anche questa e' una circonferenza: ***la circonferenza degenere*** del fascio.

In effetti la circonferenza degenere e' effettivamente una circonferenza del fascio; infatti indicata con **C** una delle circonferenza di base e con **C'** l'altra, abbiamo che posso scrivere il fascio come:

$C + kC' = 0$

e posso indicare l'asse radicale come:

$C - C' = 0$

Prendo l'equazione del fascio con h al posto di k:

$C + hC' = 0$

aggiungo e tolgo **hC**

$C + hC' + hC - hC = 0$

Ordino:

$C + hC + hC' - hC = 0$

Raccolgo i termini due a due:

$C(1+ h) +h(C'- C) = 0$

$$C + \frac{h}{(1+h)}(C' - C) = 0$$

Ora chiamo:

$$\frac{h}{(1+h)} = k$$

ed ottengo:

$C + k(C - C') = 0$

Cioe' posso semplificare un po' l'equazione del fascio sostituendo ad una delle due equazioni di circonferenza l'asse radicale del fascio stesso.

Facciamo un esempio; considero il fascio della pagina precedente:

$x^2 + y^2 -2y -1 +k(x^2 + y^2 + 2x + 1) = 0$

L'asse radicale lo trovo ponendo k=-1:

$x^2 + y^2 -2y -1 -1(x^2 + y^2 + 2x + 1) = 0$

Ottengo:

$-2x -2y -2 = 0$

o meglio, dividendo per 2 e cambiando di segno:

$x + y + 1 = 0$

Posso quindi sostituire all'equazione originale del fascio l'equazione:

$x^2 + y^2 -2y -1 +k(x + y + 1) = 0.$

(3) Vari tipi di fasci di circonferenze

Avremo per il fascio di circonferenze, varie possibilita' dipendenti da quali suoi termini contengono il parametro oppure anche dalle varie posizioni che possono assumere tra loro le due circonferenze di base

Esplicitiamo i seguenti casi:

Le due circonferenze di base sono:

- circonferenze concentriche
- circonferenze senza punti comuni e non concetriche
- circonferenze secanti
- circonferenze tangenti

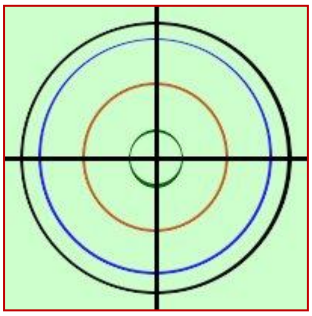
Se consideriamo il parametro k di primo grado e quindi consideriamo una famiglia oo^1 di circonferenze allora non possiamo prendere in considerazione il caso di tutte le circonferenze passanti per un punto che fornisce un insieme oo^2 di circonferenze.

Infatti il passaggio per un punto blocca solamente uno dei 3 parametri della circonferenza.

(a) Circonferenze concentriche

Quando il parametro si trova solamente nel termine noto allora avremo un fascio di circonferenze concentriche.
L'equazione di un fascio di circonferenze concentriche si puo' ridurre a :
$x^2 + y^2 + ax + by + k = 0$
Infatti al variare di k varia il raggio della circonferenza mentre non variano le coordinate del centro.

Notiamo che, dividendo i termini con parametro da quelli senza parametro il fascio ha una sola circonferenza di base, mentre l'altra e' rappresentata da una costante.
L'asse radicale stavolta si riduce ad un punto: il centro della circonferenza di base.

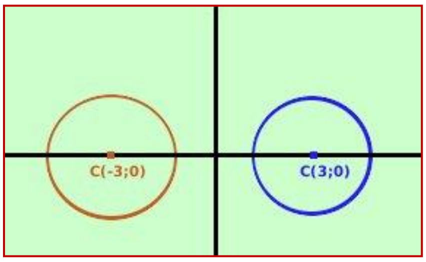


Come esempio consideriamo il fascio di circonferenze concentriche con centro l'origine:
$x^2 + y^2 + k = 0$
Che possiamo anche scrivere:
$x^2 + y^2 = r^2$
essendo **r** il raggio della circonferenza.
Da notare, nella prima equazione, che, per la realta' della circonferenza (condizione sul raggio), il termine k puo' assumere solamente valori negativi **($-\infty < k < 0$).**

(b) Circonferenze senza punti comuni e non concentriche

In questo caso le due circonferenze di base non hanno punti comuni fra loro. Chiameremo sempre asse radicale la retta:
$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$
e la congiungente i centri di due circonferenze del fascio saranno sempre perpendicolari a questa retta.

Esempio:
Facciamo un esempio semplice:
consideriamo il fascio di circonferenze:
$(1+ k)x^2 + (1+ k)y^2 + 6(k-1)x + 5(1-k) = 0$
Sviluppo:
$x^2 + kx^2 + y^2 + ky^2 - 6x + 6kx + 5 + 5k = 0$
Raccolgo i termini senza la k ed i termini con la k:
$x^2 + y^2 - 6x + 5 + k(x^2 + y^2 + 6x + 5) = 0$
Le circonferenze base del fascio sono:
$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$
Circonferenza blu: e' la circonferenza di centro (3;0) e raggio 2
$x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$
Circonferenza rossa: e' la circonferenza di centro (-3;0) e raggio 2
L'asse radicale e' la retta
$x = 0$
cioe' l'asse delle y.



(c) Circonferenze secanti

E' il caso classico: in questo caso le due circonferenze di base hanno due punti comuni fra loro.

Esercizio:

Dato il fascio di circonferenze:

$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + 4(1 - 2k)x + 2(k-1)y - 4(5 + 7k) = 0$

Trovare i punti base del fascio e controllare che la retta dei centri e' perpendicolare all'asse radicale delle due circonferenze.

Prima separiamo i termini contenenti il parametro da queli non contenenti il parametro:

$x^2 + kx^2 + y^2 + ky^2 + 4x - 8kx + 2ky - 2y - 20 - 28k = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 + k(x^2 + y^2 - 8x + 2y - 28) = 0$

Abbiamo quindi le due circonferenze di base:

- $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
- $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 28 = 0$

Per trovare i punti base del fascio sostituiamo una delle due equazioni con l'asse radicale per avere un sistema piu' facile da risolvere.

Calcolo l'asse radicale sottraendo fra loro le due equazioni membro a membro:

$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 28 = 0$

$12x - 4y + 8 = 0$

Posso dividere per 4 ed ottengo l'equazione dell'asse radicale:

$3x - y + 2 = 0$

Quindi, per trovare i punti comuni (punti base del fascio) risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

Sviluppo il sistema e trovo come risultato

A(-2;-4) B(1;5) . Ecco tutti i passaggi:

Ricavo **y** dalla prima equazione e lo sostituisco nella seconda:

$$\begin{cases} 3x + 2 = y \\ x^2 + (3x+2)^2 + 4x - 2(3x+2) - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ x^2 + 9x^2 + 12x + 4 + 4x - 6x - 4 - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ----------- \\ 10x^2 + 10x - 20 = 0 \end{cases}$$

Divido tutto per 10

$$\begin{cases} -------- \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione di secondo grado.

Applichiamo la formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Abbiamo:

$a = 1$

$b = 1$

$c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Ora prendo una volta il piu' ed una volta il meno:

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Adesso sostituiamo i valori trovati nella prima equazione

- $$\begin{cases} \mathbf{y = 3x + 2} \\ \mathbf{x = -2} \end{cases}$$

  $$\begin{cases} \mathbf{y = 3(-2) + 2 = -6 + 2 = -4} \\ \mathbf{x = -1} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \mathbf{y = 3x + 2} \\ \mathbf{x = 1} \end{cases}$$

  $$\begin{cases} \mathbf{y = 3(1) + 2 = 3 + 2 = 5} \\ \mathbf{x = -1} \end{cases}$$

Ho quindi le soluzioni
A(-2;-4) B(1;5)

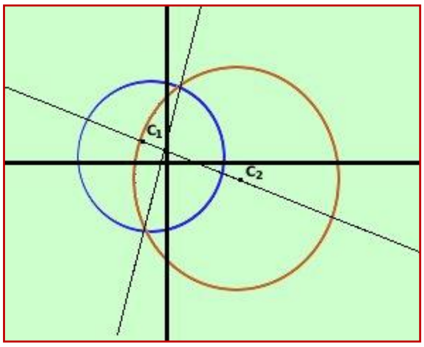
Troviamo ora i centri delle due circonferenze e, quindi, la retta dei centri.

- Prima circonferenza:
  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
  troviamo il centro $C_1(-a/2;-b/2)$
  essendo $a = 4$ e $b = -2$
  $C_1(-2;1)$
- Seconda circonferenza:
  $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 28 = 0$
  troviamo il centro $C_2(-a/2;-b/2)$
  essendo $a = -8$ e $b = 2$
  $C_1(4;-1)$

Ora, per trovare la retta dei centri applichiamo la formula della retta per due punti

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Ho: $x_1 = -2$ $\quad y_1 = 1$ $\quad x_2 = 4$ $\quad y_2 = -1$



$$\frac{y-1}{-1-1} = \frac{x-(-2)}{4-(-2)}$$

$$\frac{y-1}{-2} = \frac{x+2)}{6}$$

$6y - 6 = -2x - 4$
$2x + 6y - 2 = 0$
Divido per 2:
$x + 3y - 1 = 0$
La pongo in forma esplicita:
$y = -1/3\, x + 1/3$
La confronto con la forma esplicita dell'asse radicale:
$y = 3x + 2$
Essendo i coefficienti angolari **$-^1/_3$** e **3** uno inverso ed opposto dell'altro le due rette sono perpendicolari fra loro. Come dovevamo verificare.

(d) *Circonferenze tangenti*

In questo caso le due circonferenze di base sono tangenti alla stessa retta e quindi tra loro e, di conseguenza, hanno due punti coincidenti in comune.

Anche qui vediamo un esercizio completo.
Dato il fascio di circonferenze tangenti:
$(1+ k)x^2 + (1+ k)y^2 + 2(k - 4)x + 2(2 - 3k)y +2(1+ k) = 0$
mostrare che l'asse radicale e' la retta tangente comune alle due circonferenze di base.

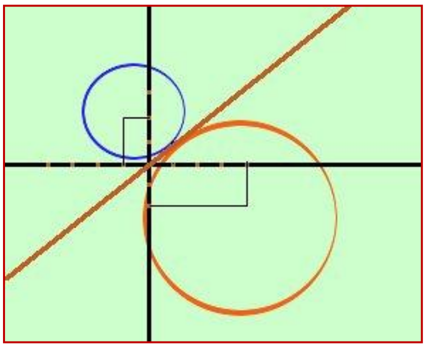
Prima separiamo i termini contenenti il parametro da queli non contenenti il parametro:
$x^2 + kx^2 + y^2 +ky^2 + 2kx -8x +4y -6ky +2 +2k = 0$
$x^2 + y^2 - 8x +4y +2 + k(x^2 + y^2 +2x -6y +2) = 0$
Abbiamo quindi le due circonferenze di base:

- $x^2 + y^2 - 8x +4y +2 = 0$
- $x^2 + y^2 +2x -6y +2 = 0$

Per mostrare che l'asse radicale e' la tangente comune alle due circonferenze troviamo l'asse radicale, poi facciamo il sistema prima con una circonferenza e poi con l'altra: troveremo solo un punto (due punti coincidenti comuni) essendo il delta del sistema uguale a zero per la condizione di tangenza.

Calcolo l'asse radicale sottraendo fra loro le due equazioni membro a membro:
$x^2 + y^2 - 8x +4y +2 = 0$
$x^2 + y^2 \quad -2x -6y +2 = 0$

$\qquad -10x + 10y \quad = 0$
Posso dividere per 10 ed ottengo l'equazione dell'asse radicale:
$-x + y = 0$
$y = x$ (Bisettrice del primo e terzo quadrante)
Quindi, risolviamo i sistemi per mostrare che vale la condizione di tangenza nello stesso punto ed alla stessa retta:



- $\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0 \end{cases}$
  Risolviamo il sistema; sostituisco ad y nella seconda equazione il valore x:
  $\begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 + 2x - 6x + 2 = 0 \end{cases}$

  $\begin{cases} - - - - - - - - - - \\ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$
  Divido tutti i termini per 2:
  $\begin{cases} - - - - - - - - - - \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$
  Il termine prima dell'uguale e' un quadrato perfetto (comer ci aspettavamo essendovi la condizione di tangenza):
  $\begin{cases} - - - - - - - \\ (x - 1)^2 = 0 \end{cases}$

  $\begin{cases} y = x \\ x = 1 \end{cases}$
  Soluzione doppia
  Sostituisco sopra il valore trovato:
  $\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$
  ed ottengo il risultato finale:
  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$
  Trovo come risultato un solo punto, cioe' due punti coincidenti (il delta del sistema

e' uguale a zero), essendo il punto trovato il punto di tangenza:
T(1;1)

- $\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$

Risolviamo il sistema; sostituisco ad **y** nella seconda equazione il valore x:

$\begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 - 8x + 4x + 2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} - - - - - - - - - - \\ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$

Divido tutti i termini per 2:

$\begin{cases} - - - - - - - - - \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$

Il termine prima dell'uguale e' un quadrato perfetto (come ci aspettavamo essendovi la condizione di tangenza):

$\begin{cases} - - - - - - - \\ (x - 1)^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = x \\ x = 1 \end{cases}$

Soluzione doppia

Sostituisco sopra il valore trovato:

$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

ed ottengo il risultato finale:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Trovo come risultato un solo punto, cioe' due punti coincidenti (il delta del sistema e' uguale a zero), essendo il punto trovato il punto di tangenza
T(1;1)

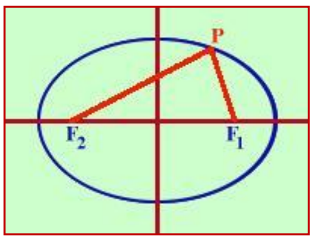
Quindi l'asse radicale **y = x** e' la tangente comune alle due circonferenze base del fascio nello stesso punto **T(1;1)**

E. *Ellisse*

Vediamo ora di studiare l'ellisse: come prima approssimazione studieremo l'ellisse come conica a centro, cioe' riferita ai propri assi

1. Definizione di ellisse

L'***ellisse*** e' il luogo geometrico dei punti del piano per cui e' costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi

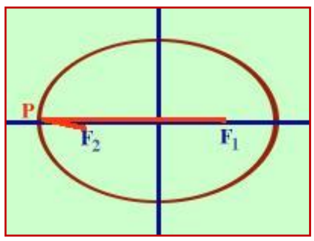


Significa che per tutti i punti P della figura avremo che:

$$PF_1 + PF_2 = \text{costante}$$

Per sapere quanto vale la costante spostiamo il punto P fino a portarlo sull'asse orizzontale, allora si vede che la somma

$$PF_1 + PF_2$$

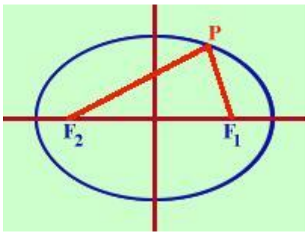


e' uguale alla distanza fra i due punti dell'ellisse che tagliano l'asse delle x (asse orizzontale). Chiamiamo questa distanza 2a (a per indicare che e' una costante e 2 perche', essendo l'ellisse simmetrica spesso ci servira' la meta' della distanza, cioe' il semiasse orizzontale); quindi avremo per tutte le ellissi

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

con **a** semiasse orizzontale.

2. Equazione dell'ellisse riferita ai propri assi



Per trovare l'equazione dell'ellisse consideriamone la definizione: prendiamo un punto generico P(x,y) ed imponiamo che la somma delle distanze di P dai due punti fissi $F_1(c,0)$ ed $F_2(-c,0)$ sia uguale a 2°.

Chiamiamo le coordinate orizzontali di F con +c e -c, questo perche' sviluppando l'equazione avremo bisogno di un'altra lettera (che chiameremo b) e questa comparira' nell'equazione finale; in questo modo nell'equazione finale avremo le prime due lettere dell'alfabeto: a, b.

$PF_1 + PF_2 = 2a$

Applico la formula della distanza fra due punti nel piano ed ottengo:

$\sqrt{[(x-c)^2 + y^2]} + \sqrt{[(x+c)^2 + y^2]} = 2a$

E' un' equazione irrazionale quindi isolo una radice.

Se lasci prima dell'uguale il radicale con il termine x+c , alla fine non dovrai cambiare di segno; altrimenti dovrai cambiare di segno:

$\sqrt{[(x+c)^2 + y^2]} = 2a - \sqrt{[(x-c)^2 + y^2]}$

Elevo al quadrato da entrambe le parti dell'uguale:

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x-c)^2 + y^2]} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

Sommo i termini simili e isolo la radice prima dell'uguale:

$4a\sqrt{[(x-c)^2 + y^2]} = 4a^2 - 4cx$

Divido tutti i termini per 4:

$a\sqrt{[(x-c)^2 + y^2]} = a^2 - cx$

Elevo a quadrato da entrambe le parti:

$a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

Termini con la x e la y prima dell'uguale, gli altri dopo l'uguale:

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2y^2 + 2a^2cx - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$

Tolgo i due termini uguali e di segno opposto:

$a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$

Metto in evidenza la x^2 prima dell'uguale ed a^2 dopo l'uguale:

$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Ora pongo $a^2 - c^2 = b^2$ posso farlo perche' $a > c$:

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Divido tutti i termini per a^2b^2:

$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$

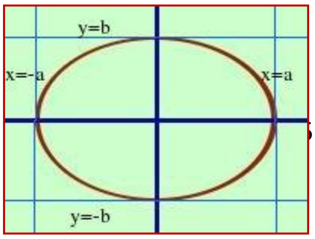
Semplifico ed ottengo l'equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3. Principali proprieta'

Sulle proprieta' dell'ellisse non c'e' molto da dire: e' una curva a centro simmetrica rispetto all'origine, tutta compresa fra le rette orizzontali:

$y = b$ e $y = -b$



e fra le rette verticali
$x = a$ e $x = -a$
Abbastanza interessante e' considerare il rapporto:

$$e = \frac{c}{a}$$

chiamato ***eccentricita'***: nell'ellisse e' sempre un numero positivo inferiore ad 1 ed e' legato allo "schiacciamento" dell'ellisse stessa.
L'eccentricita' serve per collegare fra loro le varie coniche a centro: nella circonferenza vale 0 e nell'iperbole e' un numero positivo superiore a 1.

Diremo conica a centro una conica per cui possiamo trovare un centro di simmetria.

---

4. Problemi sull'ellisse

Se osserviamo l'equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vediamo che vi sono due parametri indipendenti, a e b; quindi per determinarne l'equazione saranno sufficienti due condizioni tra le seguenti:

- passaggio per un punto (condizione anche ripetuta)
- valore di c (coordinate del fuoco)
- Valore dell'eccentricita'

Esempio:
Trovare l'equazione canonica dell'ellisse passante per i punti A(9/5,4) B(12/5,3).
Devo prendere l'equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e sostituire alla x ed alla y :

- i valori 9/5 e 4 (condizione di passaggio per il punto A)
- i valori 12/5 e 3 (condizione di passaggio per il punto B)

Ottengo due equazioni nelle incognite a e b; risolvo e trovo i valori di a e b:

- Condizione di passaggio per A(9/5;4)
  $$\frac{(\frac{9}{5})^2}{a^2} + \frac{4^2}{b^2} = 1$$
  cioe'
  $$\frac{81}{25a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$
- Condizione di passaggio per B(12/5;3)
  $$\frac{(\frac{12}{5})^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$$
  cioè
  $$\frac{144}{25a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$$

Devo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{81}{25a^2} + \dfrac{16}{b^2} = 1 \\ \dfrac{144}{25a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Siccome la soluzione di questo sistema e' piuttosto complicata (e' un sistema di quarto grado) conviene ricorrere ad un artificio. Poniamo:

$$\frac{1}{a^2} = u \qquad \frac{1}{b^2} = v$$

Il sistema diventa:

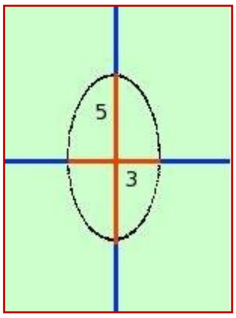
$$\begin{cases} \dfrac{81u}{25} + 16v = 1 \\ \dfrac{144u}{25} + 9v = 1 \end{cases}$$

e facendo il minimo comune multiplo:

$$\begin{cases} 81u + 400v = 1 \\ 144u + 225v = 1 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{9} \\ v = \frac{1}{25} \end{cases}$$



Quindi sostituendo le condizioni poste possiamo scrivere:

$a^2 = 9 \quad b^2 = 25$

e l'equazione dell'ellisse e'

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

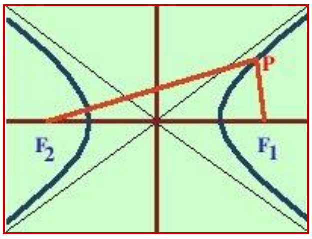
Con equazione canonica intendiamo l'ellisse nella forma appena studiata.

F. Iperbole

Parliamo dell'iperbole: come prima approssimazione studieremo l'iperbole come conica a centro, cioe' riferita ai propri assi

1. Definizione

L'ellisse si otteneva come somma; l'iperbole si ottiene come differenza.



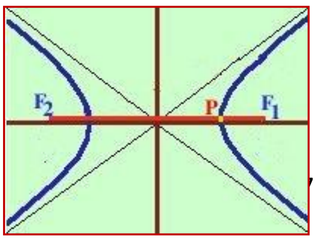
L'***iperbole*** e' il luogo geometrico dei punti del piano per cui e' costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi

Significa che per tutti i punti P della figura avremo che

$PF_2 - PF_1 = \text{costante}$

Per sapere quanto vale la costante spostiamo il punto P fino a portarlo sull'asse orizzontale, allora si vede che la differenza:

$PF_2 - PF_1$

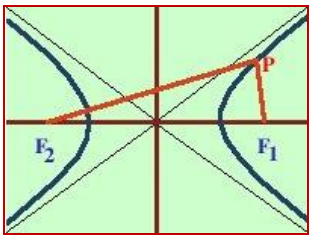


e' uguale alla distanza fra i due punti dell'iperbole che tagliano l'asse delle x (asse orizzontale). Chiamiamo questa distanza 2a (a per indicare che e' una costante e 2 perche', essendo l'iperbole simmetrica spesso ci servira' la meta' della distanza, cioe' il

semiasse orizzontale); quindi avremo per tutte le iperboli
$PF_2 - PF_1 = 2°$
con a semiasse orizzontale

2. Equazione canonica dell'iperbole

Canonica significa regolare



Per trovare l'equazione dell'iperbole consideriamone la definizione: prendiamo un punto generico $P(x,y)$ ed imponiamo che la differenza delle distanze di P dai due punti fissi $F_1(c,0)$ ed $F_2(-c,0)$ sia uguale a $2°$.

Chiamiamo le coordinate orizzontali di F con +c e -c, questo perche' sviluppando l'equazione avremo bisogno di un'altra lettera (che chiameremo b) e questa comparira' nell'equazione finale; in questo modo nell'equazione finale avremo le prime due lettere dell'alfabeto: a, b .

$\underline{PF_2} - \underline{PF_1} = 2a$

Applico la formula della distanza fra due punti nel piano ed ottengo:

$\sqrt{[(x-c)^2 + y^2]} + \sqrt{[(x+c)^2 + y^2]} = 2a$

E' un' equazione irrazionale quindi isolo una radice:

$\sqrt{[(x+c)^2 + y^2]} = 2a - \sqrt{[(x-c)^2 + y^2]}$

Elevo al quadrato da entrambe le parti dell'uguale:

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x-c)^2 + y^2]} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

Sommo i termini simili e isolo la radice dopo l'uguale:

$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{[(x-c)^2 + y^2]}$

Divido tutti i termini per 4:

$cx - a^2 = a\sqrt{[(x-c)^2 + y^2]}$

Elevo a quadrato da entrambe le parti:

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] =$

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

Termini con la x e la y prima dell'uguale, gli altri dopo l'uguale:

$c^2x^2 - 2a^2cx - a^2x^2 + 2a^2cx - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

Tolgo i due termini uguali e di segno opposto:

$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

Metto in evidenza la x^2 prima dell'uguale ed a^2 dopo l'uguale:

$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Ora pongo $c^2 - a^2 = b^2$ posso farlo perche' $c > a$:

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

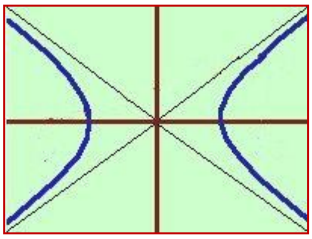
Divido tutti i termini per a^2b^2:

$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$

Semplifico ed ottengo l'equazione canonica dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3. Principali proprieta'



L'iperbole nella forma canonica e' una curva a centro simmetrica rispetto all'origine, tutta compresa fra le rette (asintoti)

$$y = \frac{b}{a}x$$

e

$$y = -\frac{b}{a}x$$

Sono quelle disegnate in nero in figura

Anche qui abbastanza interessante e' considerare il rapporto:

$$e = \frac{c}{a}$$

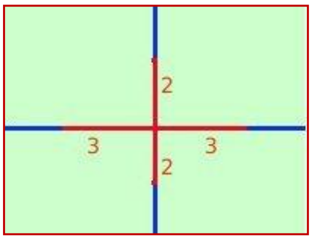
chiamato ***eccentricita'***: nell'iperbole e' sempre un numero positivo superiore ad 1 ed e' legato al "ventaglio" dell'iperbole stessa:

Successivamente (quando avremo fatto la traslazione e la rotazione delle coordinate) vedremo come trasformare un'iperbole data in formula generale in un'iperbole riferita ai propri assi: visto che l'argomento e' trattato in un numero esiguo di scuole per ora lo trascuriamo

---

Disegnare l'iperbole:

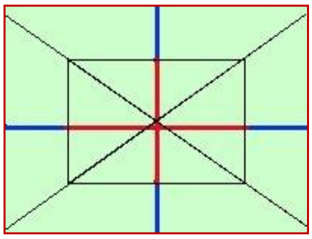
Esempi:



Rappresentare graficamente:

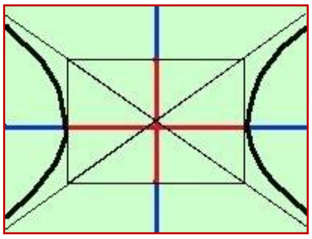
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

dall'equazione so che $a = 3$ e $b = 2$



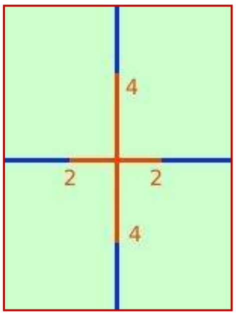
Partendo dall'origine riporto il segmento 3 a destra ed a sinistra sull'asse delle x.

Partendo dall'origine riporto il segmento 2 in alto ed in basso sull'asse delle y.



Ottengo un rettangolo le cui diagonali sono gli asintoti dell'iperbole; costruisco gli asintoti.

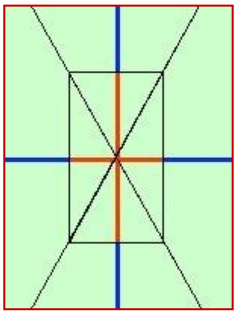
Ora parto dall'asintoto, arrivo fino al punto di intersezione con l'asse delle x e torno all'asintoto.



Rappresentare graficamente

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

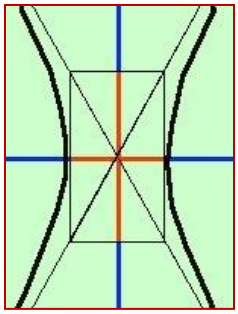
Considero un sistema di coordinate cartesiane ortogonali
dall'equazione so che $a = 2$ e $b = 4$



Partendo dall'origine riporto il segmento 2 a destra ed a sinistra sull'asse delle x

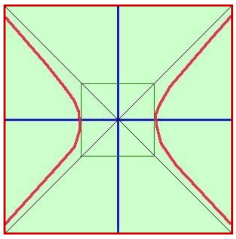
Partendo dall'origine riporto il segmento 4 in alto ed in basso sull'asse delle y

Ottengo un rettangolo le cui diagonali sono gli asintoti dell'iperbole; costruisco gli asintoti.



Ora parto dall'asintoto, arrivo fino al punto di intersezione con l'asse delle x e torno all'asintoto.

4. Iperbole equilatera



Consideriamo un'iperbole in cui siano uguali i valori a e b cioe' :

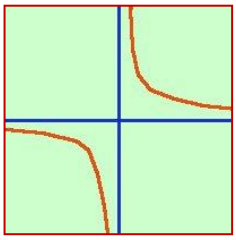
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Otterremo quindi, facendo il minimo comune multiplo, l'equazione:
$x^2 - y^2 = a^2$
In questa iperbole gli asintoti saranno le bisettrici del primo e terzo quadrante cioe':
$y = x$ $\qquad$ $y = - x$
sono segnate in nero nel grafico.

Poiche' l'iperbole equilatera dipende da un solo parametro (a) i problemi a cui puo' dar luogo sono piuttosto semplici.

---

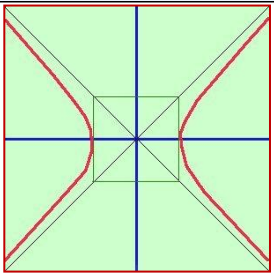
5. Equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti



Presa l'equazione dell'iperbole equilatera se operiamo una rotazione di assi di 45° avremo che gli asintoti corrisponderanno agli assi cartesiani ortogonali ed otterremo l'equazione

$$xy = k$$

Dimostrazione:
Dimostriamo che l'equazione dell'iperbole equilatera:
$x^2 - y^2 = a^2$
con una rotazione di 45°, si trasforma nell'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri assi:
$XY = K$
Consideriamo le formule di trasformazione (rotazione di 45°):



$$\begin{cases} x = X\sqrt{2/2} + Y\sqrt{2/2} \\ y = -X\sqrt{2/2} + Y\sqrt{2/2} \end{cases}$$

Andiamo a sostituire nell'equazione dell'iperbole:

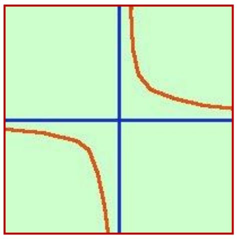
$$(X\sqrt{2/2} + Y\sqrt{2/2})^2 - (-X\sqrt{2/2} + Y\sqrt{2/2})^2 = a^2$$

Sviluppo i quadrati ricordando che $(\sqrt{2/2}\,)^2 = 1/2$ ottengo:

$X^2/2 + XY + Y^2/2 - (X^2/2 - XY + Y^2/2) = a^2$

Tolgo le parentesi:

$X^2/2 + XY + Y^2/2 - X^2/2 + XY - Y^2/2 = a^2$



Sommo i termini simili; ottengo:

$2XY = a^2$

$XY = a^2/2$

Se ora pongo $a^2/2 = K$ (Posso farlo perche' a e' una costante),
ottengo la formula finale:

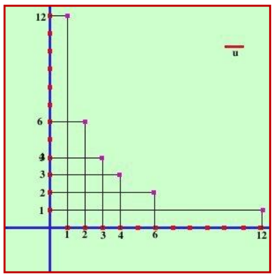
$XY = K$

Questa curva e' importantissima perche' rappresenta la proporzionalita' inversa: cioe' mantenendo k costante se raddoppio la x ottengo che si dimezza la y e se prendo la x cinque volte piu' grande la y si riduce ad un quinto.
Tra le applicazioni la piu' intuitiva e' la rappresentazione del legame fra i lati dei rettangoli aventi la stessa area

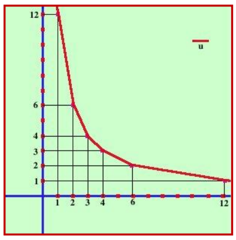
Proviamo ad esempio a disegnare la relazione fra i lati dei rettangoli che hanno area 12

Scelgo 12 perche' ha molti divisori quindi ottengo vari valori interi: potrei prendere qualunque altro numero pero' dovrei lavorare con i decimali o le frazioni

Chiamiamo la base del rettangolo x e l'altezza y
Limitiamoci a trovare solo i lati interi per semplicita' se l'area e' 12 le possibilita' per x e y sono



x	y
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1



Pongo questi valori in un grafico.
Ora, se congiungo i punti ottenuti con una curva continua, ottengo il ramo superiore dell'iperbole equilatera riferita ai propri assi.

In fisica l'applicazione piu' appariscente e' nella legge delle isoterme:

$PV = nRT$

in cui le variabili sono P e V mentre nRT corrisponde alla k

n e' il numero di moli
R e' la costante di Reynolds
T e' il valore (fisso) della temperatura se la curva e' un'isoterma

Se invece consideriamo anche T variabile allora abbiamo la legge di Boyle

6. Problemi sull'iperbole con equazione canonica

Se osserviamo l'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vediamo che, come nell'ellisse, vi sono due parametri indipendenti, a e b; quindi, similmente a quanto abbiamo fatto nell'ellisse, per determinarne l'equazione saranno sufficienti due condizioni tra le seguenti:

- passaggio per un punto (condizione anche ripetuta)
- valore di c (coordinate del fuoco)
- Valore dell'eccentricita'

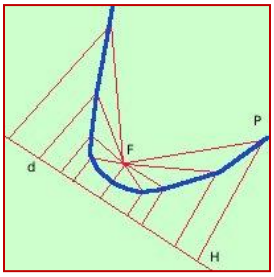
Esempio:

- Trovare l'equazione canonica dell'iperbole passante per i punti A(3,15/4) B(2, 3/2 $\sqrt{5}$)

G. *Parabola*

Parliamo della parabola: prima studieremo la parabola con vertice l'origine ed asse coincidente con l'asse y; poi vedremo la parabola con asse parallelo all'asse delle y e vedremo che l'equazione della parabola ha tanti punti di contatto con l'equazione di secondo grado.

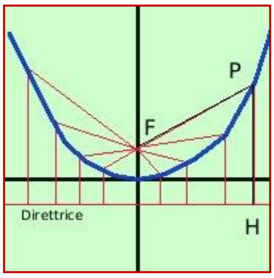
1. Definizione



La ***parabola*** e' il luogo geometrico dei punti del piano per cui e' uguale la distanza da un punto fisso F detto ***fuoco*** e da una retta fissa detta ***direttrice.***

Significa che per tutti i punti P della figura avremo che:
$PF = PH$

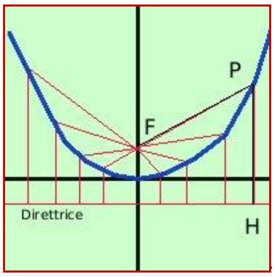
2. Parabola con vertice nell'origine ed asse verticale



Consideriamo il Fuoco sull'asse y e la direttrice come retta orizzontale da banda opposta dell'origine rispetto al fuoco e avente dall'origine la stessa distanza che il fuoco:

$PF = PH$

a) Equazione della parabola con asse verticale e vertice nell'origine



Applichiamo la definizione considerando il Fuoco sull'asse y e la direttrice come retta orizzontale da banda opposta dell'origine rispetto al fuoco ed avente dall'origine la stessa distanza del fuoco:
$PF = PH$
Ora dobbiamo decidere quanto vale la distanza dall'origine del fuoco e della direttrice.

Abbiamo il solito problema: se mettiamo semplice la costante avremo poi un'equazione complicata, mentre conviene porre la costante in un certo modo in maniera che poi l'equazione resti semplice.

Negli anni '60 si preferiva procedere cosi' .

Per avere il risultato semplice poniamo:

$$F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$$

Quindi la direttrice avra' equazione:

$$y = -\frac{1}{4a}$$

Siccome devo porre PF=PH ricaviamo PF e PH.

Per ricavare PF uso la formula della distanza fra due punti:

$P = (x,y)$ $\qquad F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2}$$

Per trovare PH mi servono le coordinate di H.

Osservando la figura, vedo che la x di H e' uguale a quella di P mentre la y si trova sulla direttrice quindi vale -1/4a:

$P = (x,y)$ $\qquad H = \left(x, -\frac{1}{4a}\right)$

Anche qui applico la distanza fra due punti .

Potevo fare anche la distanza punto retta, oppure osservare che il segmento e' verticale quindi si puo' ottenere come differenza fra le coordinate y:

$$PH = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

(x-x) vale zero e sparisce; posso semplificare il quadrato con la radice; ottengo:

per fare prima posso uguagliare le radici e poi eliminarle prima e dopo l'uguale e quindi saltare un paio di passaggi

$$PH = y + \frac{1}{4a}$$

Imposto l'uguaglianza PF = PH:

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} = y + \frac{1}{4a}$$

Per togliere la radice elevo al quadrato prima e dopo l'uguale, cosi' la radice si elimina con il quadrato:

$$(x)^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2$$

Eseguo i quadrati:

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2} = y^2 + \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2}$$

Elimino i termini uguali da parti opposte dell'uguale:

$$x^2 - \frac{y}{2a} = \frac{y}{2a}$$

Faccio il minimo comune multiplo 2a:

$$\frac{2ax^2 - y}{2a} = \frac{y}{2a}$$

Elimino i denominatori:

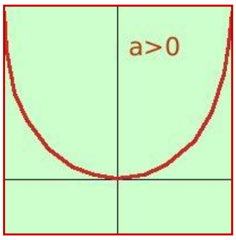
$2ax^2 - y = y$

$2ax^2 = y + y$
$2ax^2 = 2y$
$2y = 2ax^2$ ho usato la proprieta' simmetrica
e, dividendo per 2, ottengo la formula finale:

$$y = ax^2$$

---

b) Proprieta' della parabola con asse verticale e vertice nell'origine



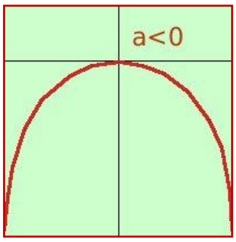
Matematicamente sull'equazione della parabola:

$$y = ax^2$$

non c'e' molto da dire.

Se a e' maggiore di zero, la parabola per valori di x che si discostano da 0 (aumentano o diminuiscono) aumenta verso piu' infinito, cioe' assume valori positivi sempre piu' grandi, quindi la curva si trova tutta sopra l'asse orizzontale.

La curva va ad infinito senza che sia possibile pensare una retta che accompagni la curva come abbiamo visto per l'iperbole.



Se a e' minore di zero, la parabola per valori di x che si discostano da 0 (aumentano o diminuiscono) diminuisce verso meno infinito, cioe' assume valori sempre piu' piccoli (piu' grandi in valore assoluto ma negativi) quindi la curva si trova tutta sotto l'asse orizzontale.

---

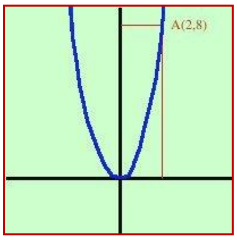
c) Esercizi sulla parabola con vertice nell'origine ed asse verticale

Se osserviamo l'equazione della parabola:

$$y = ax^2$$

vediamo che esiste solo un parametro a; pertanto bastera' una sola condizione per determinarne l'equazione.
Vediamone un semplice esempio.

Determinare l'equazione della parabola con vertice nell'origine ed asse verticale che passa per il punto A=(2,8)
Consideriamo la parabola $y = ax^2$
Imponiamo il passaggio della curva per A (basta sostituire ad x e y le coordinate di A):



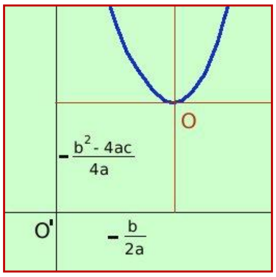
$8 = a(2)^2$
$8 = 4a$
$4a = 8$
$a = 2$
Quindi l'equazione cercata e':
$y = 2\,x^2$

A destra la rappresentazione grafica.

3. Parabola con asse parallelo all'asse y

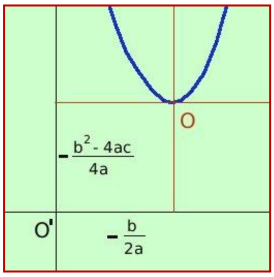
Iniziamo ora a studiare la parabola eseguendo una traslazione di coordinate in modo che la parabola non abbia piu' il vertice nell'origine ma in un punto qualunque nel piano.

a) Introduzione alla parabola con asse parallelo all’asse y



Consideriamo l'equazione della parabola con vertice nell'origine O:
$y = ax^2$
faremo una traslazione di coordinate in modo da avere la nuova origine nel punto O'.
Vedremo che con un'opportuna scelta delle coordinate della nuova origine otterremo l'equazione:
$y = ax^2 + bx + c$

b) Equazione della parabola con asse verticale



Consideriamo l'equazione della parabola con vertice nell'origine O,
$Y = aX^2$
Spostiamo la nuova origine degli assi nel punto:
$$O' = \left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$
Faremo quindi la traslazione di coordinate:
$$\begin{cases} X = x + \dfrac{b}{2a} \\ Y = y + \dfrac{b^2-4ac}{4a} \end{cases}$$
Sostituiamo nell'equazione di partenza:
$$y + \frac{b^2-4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$
Sviluppo il quadrato e semplifico il 2 nel doppio prodotto:
$$y + \frac{b^2-4ac}{4a} = a\left(x^2 + \frac{2bX}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right)$$
Moltiplico al secondo termine per **a** e semplifico ove possibile:
$$y + \frac{b^2-4ac}{4a} = ax^2 + \frac{abX}{a} + \frac{ab^2}{4a^2}$$
Ottengo:
$$y + \frac{b^2-4ac}{4a} = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$$
Faccio il m.c.m. = 4°:
$$\frac{4ay+b^2-4ac}{4a} = \frac{4a^2x^2+4abx+b^2}{4a}$$
Tolgo il denominatore ed elimino quello che posso:
$4ay + \cancel{b^2} - 4ac = 4a^2x^2 + 4abx + \cancel{b^2}$
$4ay = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac$
Ora divido tutti i termini per 4a ed ottengo la formula finale:
$$y = ax^2 + bx + c$$

c) Proprieta' della parabola con asse parallelo all'asse y

Consideriamo l'equazione:
$y = ax^2 + bx + c$
Vediamo ora di fissare le principali conoscenze per poterla studiare al meglio.

(1) Vertice, fuoco, asse e direttrice

Se consideriamo l'equazione:
$y = ax^2 + bx + c$
per ottenere le equazioni del vertice, del fuoco e della direttrice bastera' considerare che la traslazione interessa tutti i dati, quindi bastera' applicare la traslazione di coordinate ai dati che avevamo per la parabola con il vertice nell'origine.

Coordinate del vertice

Siccome nella parabola:
$y = ax^2$
il vertice e' nel punto:
$O = (X,Y) = (0,0)$
Applicando la traslazione di coordinate:

$$\begin{cases} x = X + \dfrac{b}{2a} \\ y = Y - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

otterremo le coordinate del vertice sostituendo 0 ad X e ad Y, quindi avremo:

$$V = V_x, V_y = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

Un buon metodo mnemonico per ricordarsi le coordinate del vertice e' confrontare le coordinate con la soluzione dell'equazione di secondo grado:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Il termine V_x corrisponde alla parte fuori di radice mentre nel temine V_y al numeratore c'e' il temine che e' sotto radice con davanti il segno - e sotto devi mettere 4a

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Esercizio - Determinare le coordinate del vertice della parabola di equazione
$y = x^2 - 5x + 6$
le coordinate del vertice sono:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Abbiamo:
$a = 1$
$b = -5$
$c = 6$
Calcoliamo la coordinata x del vertice V_x:

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$$

Calcoliamo la coordinata y del vertice V_y:

$$V_y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{-5^2 - 4(1)(6)}{4} = -\frac{1}{4}$$

Attenzione!! Un errore molto comune e' quello di sbagliare il segno di V_y : prima devi calcolare tutto il numeratore e solo dopo devi cambiare di segno; e' facile sbagliare soprattutto se non metti il segno meno al livello giusto; te lo dice uno che purtroppo questo errore ai tempi del liceo l'ha fatto piu' volte prima di accorgersene e correggerlo.

Otteniamo quindi:

$$V = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$$

Coordinate del fuoco

Siccome nella parabola: $y = ax^2$
il fuoco e' nel punto:

$$F = (X, Y) = \left(0, \quad \frac{1}{4a}\right)$$

applicando la traslazione di coordinate:

$$\begin{cases} x = X - \dfrac{b}{2a} \\ y = Y - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

otterremo le coordinate del fuoco sostituendo 0 ad X e -1/4a ad Y, quindi avremo:

$$F = \left(-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Esercizio - Determinare le coordinate del fuoco della parabola di equazione:
$y = x^2 - 5x + 6$
le coordinate del fuoco sono:

$$F = \left(-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

abbiamo
$a = 1$
$b = -5$
$c = 6$
Calcoliamo la coordinata x del fuoco: F_x
La coordinata e' la stessa del vertice

$$F_x = -\frac{b}{2a} = \frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$$

Calcoliamo la coordinata y del fuoco: F_y

$$F_y = \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{1}{4} - \frac{-5^2 - 4(1)(6)}{4} = 0$$

Otteniamo quindi:

$$V = \left(\frac{5}{2}; \ 0\right)$$

Equazione dell'asse

Siccome nella parabola: $y = ax^2$ l'asse ha equazione: $X = 0$
applicando la traslazione di coordinate:

$$\begin{cases} x = X - \frac{b}{2a} \\ y = Y - \frac{b^2-4ac}{4a} \end{cases}$$

otterremo la nuova equazione sostituendo 0 ad X nella prima delle due equazioni, quindi avremo:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Esercizio - Determinare l'equazione dell'asse della parabola di equazione:
$y = x^2 - 5x + 6$
L'equazione dell'asse e':

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Abbiamo:
$a = 1$
$b = -5$
Quindi sostituendo abbiamo:

$$y = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$$

si calcola come la coordinata V_x del vertice.

Equazione della direttrice

Siccome nella parabola:
$y = ax^2$
la direttrice ha equazione:

$$Y = -\frac{1}{4a}$$

applicando la traslazione di coordinate:

$$\begin{cases} x = X - \frac{b}{2a} \\ y = Y - \frac{b^2-4ac}{4a} \end{cases}$$

otterremo la nuova equazione della direttrice sostituendo -1/4a ad Y nella seconda delle due equazioni, quindi avremo:

$$y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Esercizio - Determinare l'equazione della direttrice della parabola di equazione:
$y = x^2 - 5x + 6$
l'equazione della direttrice e':

$$y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Abbiamo:
$a = 1$
$b = -5$

$c = 6$

Sostituiamo ed otteniamo:

$$y = -\frac{1}{4} - \frac{(-5)^2 - 4(1)(6)}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

Otteniamo quindi:

$$y = -\frac{1}{2}$$

---

(2) Condizioni necessarie per individuare l'equazione

Se consideriamo l'equazione completa di una parabola con asse verticale:

$$y = ax^2 + bx + c$$

vediamo che dipende da tre parametri indipendenti:

a b c

Pertanto, per determinarne l'equazione dovremo considerare 3 condizioni scelte fra le seguenti:

- passaggio per un punto
- tangenza ad una retta
- conoscenza del vertice (condizione doppia)
- conoscenza del fuoco (condizione doppia)
- equazione della direttrice

Condizione di passaggio per un punto

Per scrivere la condizione di passaggio della parabola: $y = ax^2 + bx + c$

per il punto: $P = (x_0, y_0)$

basta sostituire alle variabili x, y nell'equazione le coordinate x_0, y_0, cioe':

$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$

Esempio: scrivere la condizione di passaggio della parabola:

$y = ax^2 + bx + c$

per il punto $P = (2, 3)$

Sostituisco a x il valore 2 ed a y il valore 3

$3 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c$

$3 = 4a + 2b + c$

quindi la condizione richiesta e'

$4a + 2b + c = 3$

Condizione di tangenza ad una retta

Per scrivere la condizione di tangenza della parabola: $y = ax^2 + bx + c$

alla retta $y = mx + q$

bisogna fare il sistema fra la retta e la parabola ed imporre che il delta del sistema sia zero.

Come abbiamo gia' visto sulla circonferenza ma qui c'e' da dire che siccome l'equazione della parabola e' piu' semplice di quello della circonferenza, il metodo e' piu' semplice

---

Esempio:

Scrivere la condizione di tangenza della parabola
$y = ax^2 + bx + c$
alla retta $y = 2x + 3$
Faccio il sistema fra la retta e la parabola:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

Sostituisco:

$$\begin{cases} 2x + 3 = ax^2 + bx + c \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

Raggruppo nella prima equazione:

$$\begin{cases} ax^2 + (b-2)x + (c-3) = 0 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

Ora calcolo il delta nella prima equazione e lo pongo uguale a zero:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Fai attenzione! Le **a, b** e **c** hanno un significato diverso: quelle in rosso sono i parametri da trovare mentre quelli blu sono quelli della formula:

Nel nostro caso abbiamo:
$a = a$ $b = (b-2)$ $c = (c-3)$
quindi:

$$\Delta = (b-2)^2 - 4a(c-3) = 0$$

Calcolo:
$b^2 - 4b + 4 - 4ac + 12a = 0$
e questa e' la condizione cercata.

Nota che la condizione e' di secondo grado, cioe' di solito questa condizione ti puo' portare a determinare due parabole diverse

---

<u>Condizioni per le coordinate del vertice</u>

Le coordinate del vertice mi forniscono due condizioni.
Se abbiamo le coordinate del vertice: $V = (x_0, y_0)$
della generica parabola: $y = ax^2 + bx + c$
sapendo che tale parabola ha vertice:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

- allora, come prima, scriviamo la prima condizione eguagliando le coordinate x del vertice:
  $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- per la seconda condizione, invece di eguagliare le coordinate facciamo la condizione di passaggio per un punto (vertice):
  $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$

Esempio:

Calcolare le condizioni per cui la parabola: $y = ax^2 + bx + c$
ha il vertice nel punto: $V(2, 3)$

- prima condizione:

$$2 = -\frac{b}{2a}$$

- moltiplico tutto per 2a (cioe' faccio il m.c.m. e semplifico):
  $4a = -b$
  $4a + b = 0$
- seconda condizione:
  $3 = a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + c$
  $3 = 4a + 2b + c$
  $4a + 2b + c - 3 = 0$
  Attenzione: una volta usata una condizione non si puo' riusare, cioe' se per il vertice segui questo metodo non puoi usare come ulteriore condizione quella della seconda coordinata, perche' essa e' contenuta nel passaggio per il vertice: se facessi il sistema con le tre condizioni:
  - uguaglianza prima coordinata
  - uguaglianza seconda coordinata
  - passaggio per il vertice

  otterrei un sistema indeterminato,
  Viceversa, se ottieni ad un certo punto 0=0, vuol dire che hai usato due volte la stessa condizione.

Condizioni utilizzando le coordinate del fuoco

Anche il fuoco, come il vertice, da' luogo a due condizioni
Se abbiamo le coordinate del fuoco: $F = (x_0, y_0)$
della generica parabola: $y = ax^2 + bx + c$
sapendo che tale parabola ha fuoco:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Allora possiamo scrivere le due condizioni eguagliando le coordinate omonime:

- prima condizione:
  $$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
- seconda condizione:
  $$y_0 = \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Esempio:

Calcolare le condizioni per cui la parabola: $y = ax^2 + bx + c$
ha il fuoco nel punto $F(2, 3)$

- prima condizione:
  $$2 = -\frac{b}{2a}$$
- moltiplico tutto per 2a (cioe' faccio il m.c.m. e semplifico):
  $4a = -b$
  $4a + b = 0$
- seconda condizione:
  $$3 = \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
- moltiplico tutto per 4a (cioe' faccio il m.c.m. e semplifico)
  Attenzione: il meno e' davanti alla linea di frazione quindi anche 4ac cambia di segno
  $12a = 1 - b^2 + 4ac$
  $b^2 + 12a - 4ac = 1$

Condizione utilizzando l'equazione della direttrice

Se abbiamo l'equazione della direttrice: $y = k$ con k valore noto
della generica parabola: $y = ax^2 + bx + c$
sapendo che tale parabola ha direttrice:

$$y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

allora possiamo scrivere la condizione eguagliando i due valori:

$$k = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Esempio:

Calcolare la condizioni per cui la parabola: $y = ax^2 + bx + c$
ha direttrice: $y = 3$

$$3 = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

moltiplico tutto per 4a (cioe' faccio il m.c.m. e semplifico):
Attenzione: il meno e' davanti alla linea di frazione quindi anche 4ac cambia di segno
$12a = - 1 - b^2 + 4ac$
$b^2 + 12a - 4ac = - 1$

d) Problemi elementari sulla parabola con asse verticale

(1) Rappresentare graficamente una parabola di una data equazione

Per disegnare una parabola conviene:
1) Trovare le coordinate del vertice
2) Trovare l'intersezione della parabola con l'asse delle y
3) Trovare le intersezioni, se esistono, della parabola con l'asse delle x
4) Riportare i punti trovati su un sistema di assi cartesiani e collegarli con una curva continua.

Vediamone l'applicazione su alcuni esempi.
Esempio 1 - Rappresentare graficamente la parabola di equazione: $y = x^2 - 6x + 8$
1) Troviamo le coordinate del vertice.
Abbiamo:
$a = 1$ $b = -6$ $c = 8$
Calcoliamo la coordinata x del vertice V_x :

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

Calcoliamo la coordinata y del vertice: V_y

$$V_y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{-6^2 - 4(1)(8)}{4} = -1$$

Otteniamo quindi:
$V = (3; -1)$
2) Troviamo l'intersezione C con l'asse y .
Teoricamente dovremmo fare il sistema fra l'asse y (equazione x=0) e la parabola; pero' e' sufficiente prendere come prima coordinata 0 e come seconda coordinata il termine noto

della parabola:
C = (0; 8)
3) Troviamo le intersezioni con l'asse x, se esistono.
Devo fare il sistema fra la parabola e l'equazione dell'asse x (y=0):

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 8 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:

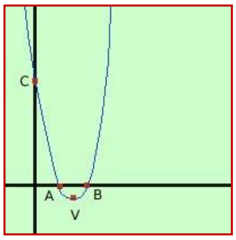
$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$x^2 - 6x + 8 = 0$
Applico la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{[36 - 4(1)(8)]}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Quindi:
$x_1 = 2$ $x_2 = 4$
Ottengo le soluzioni:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$



Quindi avremo A=(2,0) B=(4,0)
Ora devo mettere i punti in un sistema di assi cartesiani e tracciarne la congiungente ricordando che il vertice e' sempre il punto di massimo o di minimo della curva (vuol dire che sul vertice devo fare la conca).

Esempio 2 - Rappresentare graficamente la parabola di equazione:
$y = x^2 - 6x + 9$
1) Troviamo le coordinate del vertice.
Abbiamo:
a = 1 b = -6 c = 9
Calcoliamo la coordinata x del vertice V_x :

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

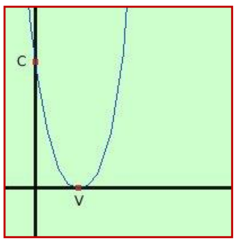
Calcoliamo la coordinata y del vertice V_y :

$$V_y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{-6^2 - 4(1)(9)}{4} = 0$$

Otteniamo quindi:
V = (3; 0)
2) Troviamo l'intersezione C con l'asse y.
Teoricamente dovremmo fare il sistema fra l'asse y (equazione x=0) e la parabola; pero' e' sufficiente prendere come prima coordinata 0 e come seconda coordinata il termine noto della parabola:
C = (0; 9)
3) Troviamo le intersezioni con l'asse x, se esistono.
Devo fare il sistema fra la parabola e l'equazione dell'asse x (y=0):

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:



$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ottengo le soluzioni coincidenti:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi avremo la soluzione doppia A=V=(3,0). Soluzione doppia vuol dire che la parabola e' tangente all'asse delle x nel vertice.

Ora devo mettere i punti in un sistema di assi cartesiani e tracciarne la congiungente ricordando che il vertice e' sempre il punto di massimo o di minimo della curva (vuol dire che sul vertice devo fare la conca).

Esempio 3 - Rappresentare graficamente la parabola di equazione:

$y = x^2 - 6x + 10$

1) Troviamo le coordinate del vertice.

Abbiamo:

a = 1 b = -6 c = 10

Calcoliamo la coordinata x del vertice V_x :

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

Calcoliamo la coordinata y del vertice V_y :

$$V_y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{-6^2 - 4(1)(10)}{4} = 1$$

Otteniamo quindi:

V = (3; 1)

2) Troviamo l'intersezione C con l'asse y.

Teoricamente dovremmo fare il sistema fra l'asse y (equazione x=0) e la parabola; pero' e' sufficiente prendere come prima coordinata 0 e come seconda coordinata il termine noto della parabola:

C = (0; 10)

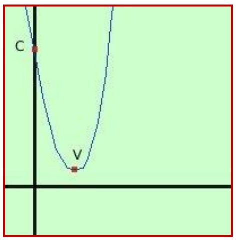
3) Troviamo le intersezioni con l'asse x, se esistono.

Devo fare il sistema fra la parabola e l'equazione dell'asse x (y=0):

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 10 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Risolvendo calcoli l'equazione di secondo grado otteniamo che il termine sotto radice e' negativo quindi la parabola non taglia l'asse x ma e' tutta sopra o tutta sotto l'asse.

Ora devo mettere i punti in un sistema di assi cartesiani e tracciarne la congiungente ricordando che il vertice e' sempre il punto di massimo o di minimo della curva (vuol dire che sul vertice devo fare la conca).

Nota: di solito basta il vertice ed un altro punto per disegnare la parabola, comunque, se ne hai bisogno, puoi trovare altri punti per cui passa la parabola sostituendo un qualunque valore ad x e controllando che valore ottieni per y;
Ad esempio nella nostra parabola
se metto x=2 ottengo
$y = 2^2 - 6(2) + 10 = 4 - 12 + 10 = 2$
la parabola passa per il punto (2,2)
se metto x=5 ottengo

$y = 5^2 - 6(5) + 10 = 25 - 30 + 10 = 5$
la parabola passa per il punto (5,5).

---

(2) Trovare l'equazione della parabola date tre condizioni

Facciamo alcuni esercizi sulla determinazione della parabola date 3 condizioni:
Esercizio 1 **-** Trovare l'equazione della parabola con asse verticale che passa per i punti:
$A = (1,0)$, $B = (0,2)$ e $C = (3,2)$
L'equazione generica della parabola con asse verticale e':
$y = ax^2 + bx + c$

- Condizione di passaggio per il punto $A = (1, 0)$
  Sostituisco a **x** il valore 1 ed a **y** il valore 0 :
  $0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
  Quindi la condizione richiesta e':
  $a + b + c = 0$
- Condizione di passaggio per il punto $B = (0, 2)$
  Sostituisco a **x** il valore 0 ed a **y** il valore 2:
  $2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
  Quindi la condizione richiesta e':
  $c = 2$
- Condizione di passaggio per il punto $C = (3, 2)$
  Sostituisco a **x** il valore 3 ed a **y** il valore 2:
  $2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$
  Quindi la condizione richiesta e':
  $9a + 3b + c = 2$

Poiche' le tre condizioni devono valere contemporaneamente facciamo il sistema per trovare le incognite a,b e c

---

In questo primo sistema faro' tutti i passaggi; naturalmente tu puoi abbreviare.

$$\begin{cases} a + b + b = 0 \\ c = 2 \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases}$$

Sostituisco il valore di **c** ricavato dalla seconda equazione nella prima e terza equazione; al posto della seconda equazione mettiamo una linea(conviene farlo perche' una volta usata un'equazione non devi piu' usarla sino alla soluzione, altrimenti il sistema diventa indeterminato):

$$\begin{cases} a + b + b = 0 \\ --- \; ---- \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases}$$

Ricavo a dalla prima equazione:

$$\begin{cases} a = -b - c \\ --- \; ---- \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases}$$

Sostituisco nella terza equazione; al posto della prima metto una linea:

$$\begin{cases} --- \; ---- \\ --- \; ---- \\ 9(-b - 2) + 3b + 2 = 2 \end{cases}$$

Calcolo:

$$\begin{cases} - - - \quad - - - - \\ - - - \quad - - - - \\ -9b - 18 + 3b + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - \quad - - - - \\ - - - \quad - - - - \\ -9b + 3b = -2 + 18 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - \quad - - - - \\ - - - \quad - - - - \\ -6b = +18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - \quad - - - - \\ - - - \quad - - - - \\ b = -3 \end{cases}$$

Ora riscrivo al posto dell'ultima linea che ho messo l'equazione relativa:

$$\begin{cases} a = -b - 2 \\ - - - \quad - - - - \\ b = -3 \end{cases}$$

Sostituisco il valore di **b:**

$$\begin{cases} a = -(-3) - 2 \ = 3 - 2 = 1 \\ - - - \quad - - - - \\ b = -3 \end{cases}$$

Quindi ottengo:

$$\begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

o meglio (ordino):

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Quindi l'equazione cercata e'

$y = x^2 - 3x + 2$ Disegniamola:

Rappresentare graficamente la parabola di equazione:

$y = x^2 - 3x + 2$

1) Troviamo le coordinate del vertice.

Abbiamo:

$a = 1$

$b = -3$

$c = 2$

Calcoliamo la coordinata x del vertice V_x :

$$V_x = \frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

Calcoliamo la coordinata y del vertice V_{ym} :

$$V_y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-3)^2 - 4(1)(2)}{4} = -\frac{1}{4}$$

Otteniamo quindi:

$$V = \left(\frac{3}{2}; \quad -\frac{1}{4}\right)$$

2) Troviamo l'intersezione D con l'asse y.

E' sufficiente prendere come prima coordinata 0 e come seconda coordinata il termine noto della parabola:

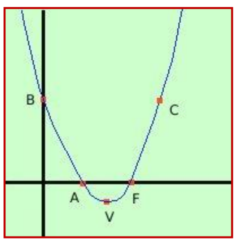
D = B = (0; 2)

3) Troviamo le intersezioni E ed F con l'asse x, se esistono.

Devo fare il sistema fra la parabola e l'equazione dell'asse x (y=0)

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:



$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Ottengo le soluzioni:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Quindi avremo E = A =(1,0) F=(2,0)

Ora devo mettere i punti in un sistema di assi cartesiani e tracciarne la congiungente ricordando che il vertice e' sempre il punto di massimo o di minimo della curva (vuol dire che sul vertice devo fare la conca).

Il disegnare la parabola puo' servirti per vedere se hai fatto giusto: prova a disegnare i punti che avevi all'inizio dell'esercizio e controlla che siano sulla parabola.

Esercizio 2 - Trovare l'equazione della parabola con asse verticale che passa per i punti: A = (4, 0) , B = (1, - 3) ed e' tangente alla retta y = -4

L'equazione generica della parabola con asse verticale e':

$y = ax^2 + bx + c$

- Condizione di passaggio per il punto A = (4, 0)
  Sostituisco a x il valore 4 ed a y il valore 0 :
  $0 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c$
  Quindi la condizione richiesta e':
  $16a + 4b + c = 0$
- Condizione di passaggio per il punto B = (1, -3)
  Sostituisco a x il valore 1 ed a y il valore -3
  $-3 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c$
  Quindi la condizione richiesta e':
  $a + b + c = -3$
- Condizione di tangenza alla retta y = -4

Devo fare il sistema fra la retta e la parabola e quindi porre il delta dell'equazione risolvente uguale a zero:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = -4 \end{cases}$

Sostituisco y = -4 nella prima equazione:

$\begin{cases} -4 = ax^2 + bx + c \\ - - - - \end{cases}$

$\begin{cases} ax^2 + bx + (c+4) = 0 \\ - - - - - - \end{cases}$

Calcolo il *delta* dell'equazione risolvente e lo pongo uguale a zero:

$\Delta = b^2 - 4a(c+4) = 0$

$b^2 - 4ac - 16a = 0$ quindi la condizione richiesta e':

$b^2 - 4ac - 16a = 0$

Poiche' le tre condizioni devono valere contemporaneamente, facciamo il sistema per trovare le incognite a,b e c :

$\begin{cases} 16a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = -3 \\ b^2 - 4ac - 16a = 0 \end{cases}$

Sostituisco il valore di c ricavato dalla seconda equazione nella prima e terza equazione:

$\begin{cases} 16a + 4b + (-a - b - 3) = 0 \\ c = -a - b - 3 \\ b^2 - 4a(-a - b - 3) - 16a = 0 \end{cases}$

Calcolo:

$$\begin{cases} 16a + 4b + -a - b - 3 = 0 \\ ----------------- \\ b^2 + 4a^2 + 4ab + 12a - 16a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a + 3b - 3 = 0 \\ ---------------- \\ b^2 + 4a^2 + +4ab - 4a = 0 \end{cases}$$

Posso semplificare per 3 la prima equazione:

$$\begin{cases} 5a + b - 1 = 0 \\ -------------- \\ b^2 + 4a^2 + +4ab - 4a = 0 \end{cases}$$

Ricavo b dalla prima equazione e sostituisco nella terza:

$$\begin{cases} b = 1 - 5a \\ -------------- \\ (1-5a)^2 + 4a^2 + +4a(1-5a) - 4a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ------ ---------------- \\ ---------------------- \\ 1 - 10a + 25a^2 + 4a^2 + +4a - 20a^2 - 4a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ------- --- \\ ---------- \\ 9a^2 - 10a + 1 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione ottengo due soluzioni:

$a = 1$ $\qquad a = 1/9$

Significa che sono due le parabole che soddisfano le condizioni date; troviamole.

Prima parabola: sostituisco ad a il valore 1:

$$\begin{cases} b = 1 - 5a = 1 - 5 = -4 \\ -------------- \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4 \\ c = -a - b - 3 = -1 + 4 - 3 = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4 \\ c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ordino:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 0 \end{cases}$$

Quindi la prima parabola e' $y = x^2 - 4x$ Disegniamola:

Rappresentare graficamente la parabola di equazione:

$y = x^2 - 4x$

1) Troviamo le coordinate del vertice.

Abbiamo:

$a = 1$

$b = -4$

$c = 0$

Calcoliamo la coordinata x del vertice V_x :

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

Calcoliamo la coordinata y del vertice V_y :

$$V_y = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2-4(1)(0)}{4} = -4$$

Otteniamo quindi:

V = (2; - 4)

2) Troviamo l'intersezione con l'asse y.

Siccome manca il termine noto la parabola interseca l'asse y nell'origine:

O = (0; 0)

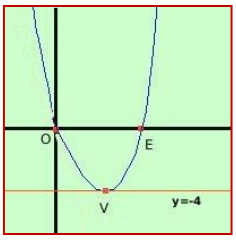
3) Troviamo le intersezioni con l'asse x, se esistono.

Devo fare il sistema fra la parabola e l'equazione dell'asse x (y=0):

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:

$$\begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Ottengo le soluzioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi avremo O =(0,0) E=(4,0)

Ora devo mettere i punti in un sistema di assi cartesiani e tracciarne la congiungente ricordando che il vertice e' sempre il punto di massimo o di minimo della curva (vuol dire che sul vertice devo fare la conca)

Seconda parabola: sostituisco ad a il valore 1/9

$$\begin{cases} b = 1 - 5(1/9) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \\ -------------- \\ a = 1/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4/9 \\ c = -a - b - 3 = -1/9 - 4/9 - 3 = -32/9 \\ a = 1/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4/9 \\ c = -32/9 \\ a = 1/9 \end{cases}$$

Ordino

$$\begin{cases} a = 1/9 \\ b = 4/9 \\ c = -32/9 \end{cases}$$

quindi la seconda parabola e':

$y = 1/9\, x^2 + 4/9\, x - 32/9$

$9y = x^2 + 4x - 32$ Disegniamola:

Rappresentare graficamente la parabola di equazione:

$y = 1/9\, x^2 - 4/9\, x - 32/9$

1) Troviamo le coordinate del vertice.

Abbiamo:

a = 1/9

b = 4/9

c = -32/9

Calcoliamo la coordinata x del vertice V_x :

$$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4/9}{2/9} = -2$$

Calcoliamo la coordinata y del vertice V_y :

$$V_y = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{(4/9)^2-4(1/9)(-32/9)}{4/9} = -4$$

Otteniamo quindi:
V = (- 2; - 4)
2) Troviamo l'intersezione D con l'asse y.
Basta prendere come y il termine noto:
D = (0; -32/9) circa (0 ; -3,5)
3) Troviamo le intersezioni con l'asse x, se esistono.
Devo fare il sistema fra la parabola e l'equazione dell'asse x (y=0):

$$\begin{cases} y = 1/9\,x^2 + 4/9\,x - 32/9 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:

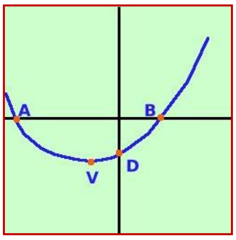
$$\begin{cases} 1/9\,x^2 + 4/9\,x - 32/9 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Divido per 9

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 32 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ottengo le soluzioni

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$



Quindi avremo A =(-8,0) B=(4,0)
Ora devo mettere i punti in un sistema di assi cartesiani e tracciarne la congiungente ricordando che il vertice e' sempre il punto di massimo o di minimo della curva (vuol dire che sul vertice devo fare la conca).

Esercizio 3 - Trovare l'equazione della parabola con asse verticale che passa per il punto A=(0,3) , ed ha il vertice nel punto V=(2, -1)

Usiamo il metodo piu' semplice

L'equazione generica della parabola con asse verticale e' :
$y = ax^2 + bx + c$

- Condizione di passaggio per il punto $A = (0, 3)$
  Sostituisco a x il valore 0 ed a y il valore 3:
  $3 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c$
  quindi la condizione richiesta e':
  $c = 3$
- La prima coordinata del vertice vale 2:
  $$-\frac{b}{2a} = 2$$
  $-b = 4a$
  quindi la condizione richiesta e':
  $4a + b = 0$
- Condizione di passaggio per il vertice $V = (2, -1)$
  sostituisco a x il valore 2 ed a y il valore -1:
  $-1 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c$
  quindi la condizione richiesta e':
  $4a + 2b + c = -1$

Poiche' le tre condizioni devono valere contemporaneamente facciamo il sistema per trovare le incognite a,b e c :

$$\begin{cases} c = 3 \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

Sostituisco il valore di c ricavato dalla prima equazione nella terza equazione; al posto della prima equazione mettiamo una linea(conviene farlo perche' una volta usata un'equazione non devi piu' usarla sino alla soluzione altrimenti il sistema diventa indeterminato):

$$\begin{cases} - - - - - - - - - \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - - \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases}$$

Ricavo **b** dalla seconda equazione e sostituisco nella terza:

$$\begin{cases} - - - - - - - - \\ b = -4a \\ 4a + 2(-4a) = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - - \\ - - - - - - - - \\ 4a - 8a = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - \\ - - - - - - \\ -4a = -4 \end{cases}$$

Divido da entrambe le parti per -4 ed ottengo:

$$\begin{cases} - - - \\ - - - \\ a = 1 \end{cases}$$

Riscrivo la seconda e vi sostituisco il valore di **a**

$$\begin{cases} c = 3 \\ b = -4a = -4(1) = -4 \\ a = 1 \end{cases}$$

Quindi ottengo:

$$\begin{cases} c = 3 \\ b = -4 \\ a = 1 \end{cases}$$

o meglio (ordino):

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Quindi l'equazione cercata e':

$y = x^2 - 4x + 3$ Disegniamola:

Rappresentare graficamente la parabola di equazione:

$y = x^2 - 4x + 3$

1) Vertice

Il vertice ci e' stato dato con il problema $V = (2; -1)$

2) troviamo l'intersezione con l'asse y

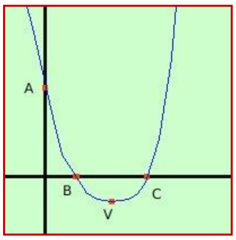
e' sufficiente prendere come prima coordinata 0 e come seconda coordinata il termine noto della parabola

$A = (0; 3)$

Anche questo era fra i dati del problema

3) troviamo le intersezioni B ed C con l'asse x, se esistono

Devo fare il sistema fra la parabola e l'equazione dell'asse x (y=0):



$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

sostituisco

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ottengo le soluzioni

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

quindi avremo B =(1,0) C=(3,0)
Ora devo mettere i punti in un sistema di assi cartesiani e tracciarne la congiungente ricordando che il vertice e' sempre il punto di massimo o di minimo della curva (vuol dire che sul vertice devo fare la conca)

Esercizio 4 - Trovare l'equazione della parabola con asse verticale che passa per i punti A=(0, -4) , B=(3, -1) ed ha come asse la retta y = 2
L'equazione generica della parabola con asse verticale e'
$y = ax^2 + bx + c$

- Condizione di passaggio per il punto A = (0, -4)
  Sostituisco a x il valore 0 ed a y il valore -4 :
  $-4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
  Quindi la condizione richiesta e':
  $c = -4$
- Condizione di passaggio per il punto B = (3, -1)
  Sostituisco a x il valore 0 ed a y il valore -4 :
  $-1 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$
  Quindi la condizione richiesta e':
  $9a + 3b + c = -1$
- L' asse vale y = 2
  L'asse della generica parabola vale:
  $y = -\frac{b}{2a}$
  Quindi avro':
  $-\frac{b}{2a} = 2$
  $-b = 4a$
  Quindi la condizione richiesta e':
  $4a + b = 0$

Poiche' le tre condizioni devono valere contemporaneamente facciamo il sistema mettere link per trovare le incognite a,b e c

$$\begin{cases} c = -4 \\ 9a + 3b + c = -1 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

Sostituisco il valore di c ricavato dalla prima equazione nella seconda e terza equazione; al posto della prima equazione mettiamo una linea(conviene farlo perche' una volta usata un'equazione non devi piu' usarla sino alla soluzione altrimenti il sistema diventa indeterminato):

$$\begin{cases} -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ 9a + 3b - 4 = -1 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\,-\,-\,-\,-\,- \\ 9a + 3b = 3 \\ b = -4a \end{cases}$$

Sostituisco b, ricavato dalla terza equazione, nella seconda:

$$\begin{cases} -\,-\,-\,-\,-\,- \\ 9a + 3(-4a) = 3 \\ b = -4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} ---- \\ 9a - 12a = 3 \\ ---- \end{cases}$$

$$\begin{cases} ---- \\ -3a = 3 \\ ---- \end{cases}$$

Divido da entrambe le parti per -3 ed ottengo:

$$\begin{cases} ---- \\ a = -1 \\ ---- \end{cases}$$

Riscrivo la terza e vi sostituisco il valore di a:

$$\begin{cases} c = -4 \\ a = -1 \\ b = -4a = -4(-1) = 4 \end{cases}$$

Quindi ottengo:

$$\begin{cases} c = -4 \\ a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

o meglio (ordino):

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{cases}$$

Quindi l'equazione cercata e':

$y = -x^2 + 4x - 4$ Disegniamola:

Rappresentare graficamente la parabola di equazione:

$y = -x^2 + 4x - 4$

1) Troviamo le coordinate del vertice.

Abbiamo:

$a = -1$

$b = 4$

$c = -4$

Calcoliamo la coordinata x del vertice V_x :

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$$

Calcoliamo la coordinata y del vertice V_y :

$$V_y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(4)^2 - 4(-1)(-4)}{4} = 0$$

Otteniamo quindi:

V = (-2; 0)

2) Troviamo l'intersezione con l'asse y.

E' sufficiente prendere come prima coordinata 0 e come seconda coordinata il termine noto della parabola:

A = (0; -4)

A era fra i dati del problema.

3) Troviamo le intersezioni con l'asse x (nel nostro caso essendo il vertice nel punto V(-2,0) abbiamo che la parabola taglia l'asse nei due punti coincidenti B=C=V=(-2,0).

Se non te ne accorgi subito, te ne accorgi facendo il sistema.

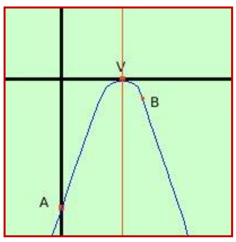
Devo fare il sistema fra la parabola e l'equazione dell'asse x (y=0):

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:

$$\begin{cases} 0 = -x^2 + 4x - 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Ottengo le soluzioni coincidenti:
$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$
quindi avremo $B = C = V = (2,0)$
Ora devo mettere i punti in un sistema di assi cartesiani e tracciarne la congiungente ricordando che il vertice e' sempre il punto di massimo o di minimo della curva (vuol dire che sul vertice devo fare la conca, stavolta verso il basso essendo a negativo $a=-1$)

(3) Intersezioni fra la parabola ed una curva

Per curva intendiamo non solo una conica ma anche una retta

Per trovare le intersezioni fra una parabola ed una curva sara' sufficiente trovare i punti che soddisfano contemporaneamente le due funzioni, pertanto per trovare le coordinate sara' sufficiente risolvere il sistema fra la parabola e la curva data.

Le possibili intersezioni fra una parabola ed una curva possono essere:

- parabola - retta
- parabola - circonferenza
- parabola - ellisse
- parabola - iperbole
- parabola - parabola con asse verticale
- parabola - parabola con asse orizzontale

- ***Intersezioni fra una retta ed una parabola***

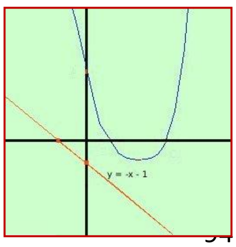
Una retta rispetto ad una parabola puo' essere esterna, tangente oppure secante, quindi avremo:

retta esterna	nessun punto comune il sistema non ha soluzioni reali
retta tangente	1 solo punto comune (doppio) il sistema ha 2 soluzioni reali coincidenti
retta secante	2 punti distinti il sistema ha 2 soluzioni reali distinte

Facciamo un esempio per tipo:

- Trovare le intersezioni fra la parabola $y = x^2 - 4x + 3$ e la retta $y = -x - 1$

Devo fare il sistema fra le due curve:
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$
Sostituisco il valore della y ricavato dalla prima nella seconda equazione; al posto della prima metto una linea:
$$\begin{cases} ------------ \\ x^2 - 4x + 3 = -x - 1 \end{cases}$$
Conviene sostituire in modo che x^2 sia positivo: cosi' non devi cambiare: di segno:
$$\begin{cases} ---------- \\ x^2 - 3x + 4 = 0 \end{cases}$$
risolvo l'equazione di secondo grado:



$$X_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{[9 - 4(1)(4)]}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-7)}}{2}$$

Essendo il termine sotto radice minore di zero il sistema non ammette soluzioni reali. A destra la rappresentazione grafica.

- Trovare le intersezioni fra la parabola $y = x^2 - 4x + 3$ e la retta $y = -2x + 2$

Devo fare il sistema fra le due curve:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y ricavato dalla prima nella seconda equazione; al posto della prima metto una linea:

$$\begin{cases} - - - - - - - - - - - - - - \\ x^2 - 4x + 3 = -2x + 2 \end{cases}$$

Conviene sostituire in modo che x^2 sia positivo: cosi' non devi cambiare di segno:

$$\begin{cases} - - - - - - - - - \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione di secondo grado:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{[4 - 4(1)(1)]}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

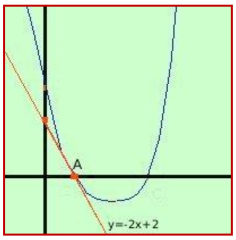
Ottengo le due soluzioni coincidenti:

$x = 1$ $x = 1$

Sostituisco il valore trovato in una delle due equazioni del sistema (conviene prendere la piu' semplice):

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2(1) + 2 = -2 + 2 = \end{cases}$$



Ottengo due punti di intersezione coincidenti :

$A = (1, 0)$

A destra la rappresentazione grafica.

- Trovare le intersezioni fra la parabola $y = x^2 - 4x + 3$ e la retta $y = x + 3$.

Devo fare il sistema fra le due curve:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y ricavato dalla prima nella seconda equazione; al posto della prima metto una linea:

$$\begin{cases} - - - - - - - - - - - - - \\ x^2 - 4x + 3 = x + 3 \end{cases}$$

Conviene sostituire in modo che x^2 sia positivo: cosi' non devi cambiare di segno:

$$\begin{cases} - - - - - - \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione di secondo grado: e' un'equazione spuria:

$x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

Ottengo le due soluzioni:

$x = 0$ $x = 5$

Sostituisco il valore 0 in una delle due equazioni del sistema (conviene prendere la piu' semplice):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x + 3 = 3 \end{cases}$$

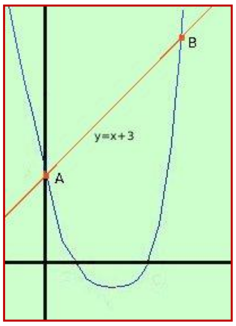
Primo punto A=(0, 3)

sostituisco il valore 5 in una delle due equazioni del sistema

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = x + 3 = 5 + 3 = 8 \end{cases}$$

Secondo punto B=(5, 8)

A destra la rappresentazione grafica

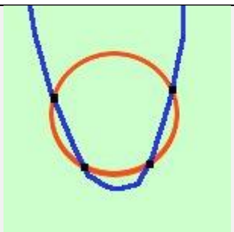
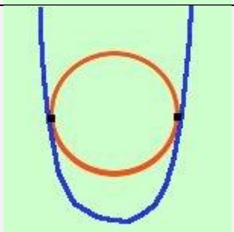
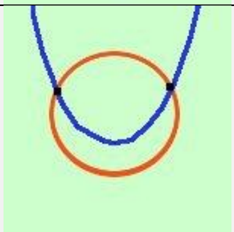


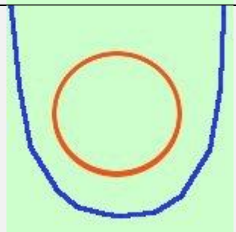
- ***Intersezioni fra una parabola ed una circonferenza***

Essendo le equazioni della parabola e della circonferenza entrambe di secondo grado, se facciamo il sistema per trovare i punti comuni otterremo come equazione risolvente un'equazione di quarto grado.

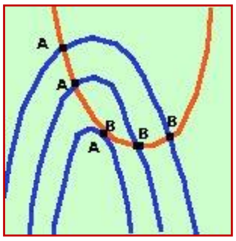
Poiche' e' piuttosto complicato risolvere un'equazione di quarto grado, sono pochi i problemi in cui si parla di intersezioni fra parabola e circonferenza e, in questi, di solito, si tratta di equazioni particolari e semplici. Qualche esercizio sara' trattato fra gli esercizi di riepilogo sulle coniche.

Comunque vediamo per esercizio quali sono i casi possibili.
Essendo l'equazione risolvente di quarto grado per il teorema fondamentale dell'algebra avremo 4 soluzioni che possono essere:

4 soluzioni reali e distinte	4 punti distinti	
4 soluzioni reali 2 distinte e 2 coincidenti	2 punti distinti ed un punto doppio	
4 soluzioni reali 2 a 2 coincidenti	2 punti doppi	
2 soluzioni reali distinte e 2 complesse coniugate	2 punti reali	

2 soluzioni reali coincidenti e 2 complesse coniugate	1 punto doppio	
4 soluzioni complesse 2 a 2 coniugate	nessun punto comune	

Nota: che cos'e' un punto doppio? Ecco:



Consideriamo 2 curve, una rossa ed una blu che si intersechino in 2 punti A e B; spostiamo ora la curva blu in modo che i due punti di intersezione A e B si avvicinino fra loro.
Quando le due curve diventano tangenti i due punti A e B si fondono in un unico punto che si dice punto doppio (oppure si dice anche che le due curve hanno un contatto del secondo ordine).

- ***Intersezioni fra una parabola ed un'ellisse***

Essendo le equazioni della parabola e dell'ellisse entrambe di secondo grado, se facciamo il sistema per trovare i punti comuni otterremo come equazione risolvente un'equazione di quarto grado.

Poiche' e' piuttosto complicato risolvere un'equazione di quarto grado, sono pochi i problemi in cui si parla di intersezioni fra parabola e ellisse e, in questi, di solito, si tratta di equazioni particolari e semplici. Un esercizio sara' trattato fra gli esercizi di riepilogo sulle coniche.

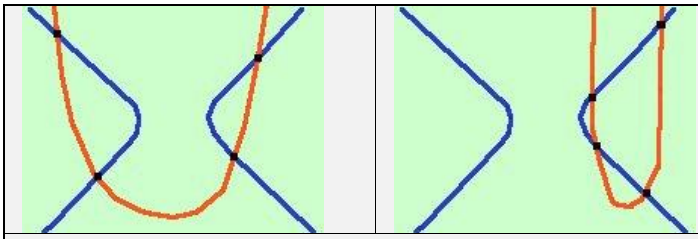
I casi possibili sono gli stessi gia' visti nella pagina precedente per la circonferenza (l'ellisse e' una circonferenza schiacciata).

- ***Intersezioni fra una parabola ed un'iperbole***

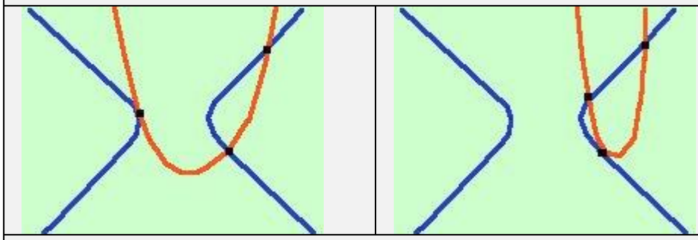
Dobbiamo vedere in che forma si presenta l'iperbole:

- Se l'iperbole e' in forma canonica oppure anche come iperbole equilatera (quindi espressa come equazione di secondo grado in x e y) otterremo sempre come equazione risolvente un'equazione di quarto grado.

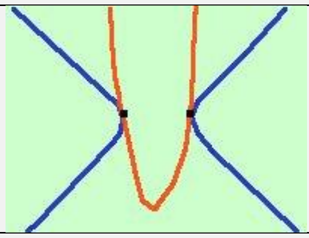
Esercizio: Disegna i possibili casi di intersezione fra una parabola con asse verticale ed un'iperbole in forma canonica. Soluzione:
Disegnare le possibili intersezioni fra un'iperbole in forma canonica ed una parabola con asse verticale.
Distinguiamo nelle figure se le intersezioni reali sono fra la parabola e un solo ramo dell'iperbole oppure fra la parabola ed entrambe i rami dell'iperbole.
Fissato questo passiamo a vedere quali sono le possibili soluzioni .



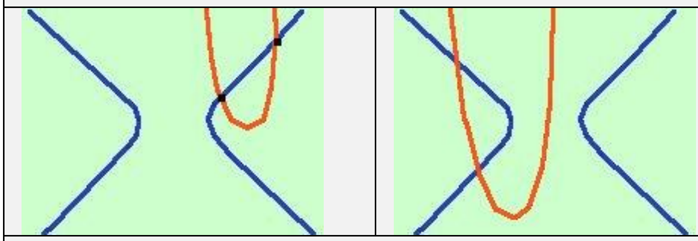
4 soluzioni reali e distinte



4 soluzioni reali, 2 distinte e due coincidenti

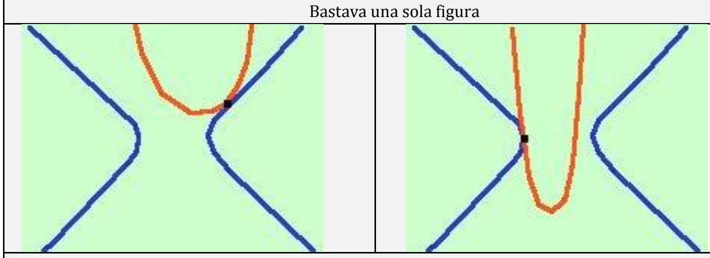


4 soluzioni reali, due a due coincidenti



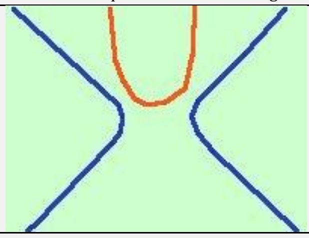
2 soluzioni reali distinte

Bastava una sola figura



2 soluzioni reali coincidenti

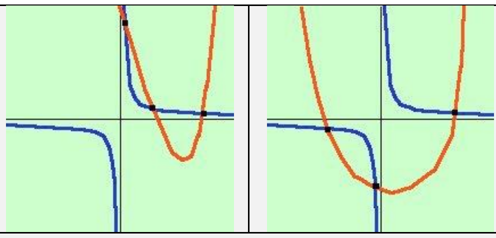
Anche qui bastava una sola figura



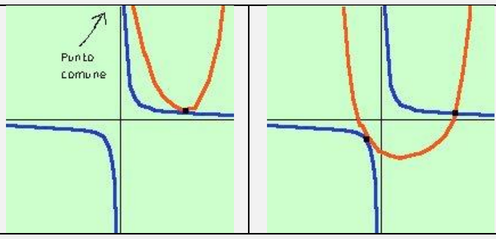
Nessuna soluzione reale

- Se l'iperbole e' in forma di iperbole equilatera riferita ai propri assi otterremo come equazione risolvente un'equazione di terzo grado, quindi avremo sempre come intersezione almeno un punto reale.
  Esercizio - Disegna i possibili casi di intersezione fra una parabola con asse verticale ed un'iperbole equilatera riferita ai propri assi Soluzione
  Disegnare le possibili intersezioni fra un'iperbole equilatera ed una parabola con asse verticale.
  Distinguiamo nelle figure se le intersezioni reali sono fra la parabola e un solo ramo dell'iperbole oppure fra la parabola ed entrambe i rami dell'iperbole.
  Fissato questo passiamo a vedere quali sono le possibili soluzioni.

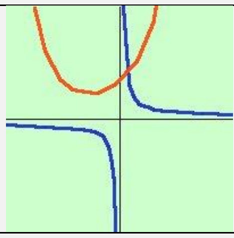
Attenzione: mentre l'iperbole si avvicina in verticale ad una retta, la parabola cresce sempre, quindi, anche se non riesci a vederla, quando la figura e' abbastanza grande, la parabola taglia il braccio verticale dell'iperbole; per questo esiste sempre una soluzione in concordanza col fatto che un'equazione di terzo grado ha sempre una soluzione reale; qui hai un esempio nella terza figura dove ho indicato il punto comune con una freccia.



3 soluzioni reali e distinte



3 soluzioni reali, di cui 2 coincidenti



Solo una soluzione reale

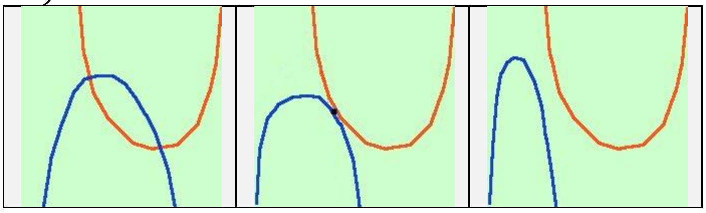
- ***Intersezioni fra una parabola ed un'altra parabola con asse verticale***

E' il caso piu' utilizzato anche perche' il sistema fra le due curve ha l'equazione risolvente di secondo grado, non solo ma se le soluzioni sono reali abbiamo una zona comune alle due parabole che verra' spesso usata in analisi per problemi sugli integrali definiti.

Esercizio 1
Disegnare i casi possibili per le intersezioni fra due parabole con asse verticale.
Soluzione:

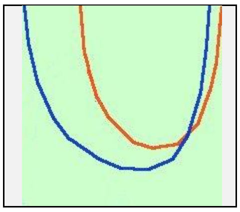
Dobbiamo distinguere se le due parabole hanno entrambe la stessa concavita' o concavita' opposta.

1. Concavita' opposta
   Facendo il sistema fra le equazioni delle due parabole otteniamo come equazione risolvente un'equazione di secondo grado le cui soluzioni possono essere reali distinte (due punti comuni), reali coincidenti (un punto doppio comune)oppure complesse e coniugate (nessun punto comune).

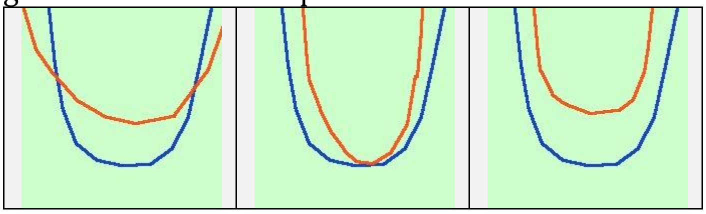


2. Stessa concavita'

- se il termine a e' identico: Facendo il sistema fra le due equazioni il termine di secondo grado viene eliminato e quindi otteniamo solamente un punto comune.



- se i termini a sono diversi allora risolvendo il sistema otteniamo un'equazione di secondo grado ed otteniamo gli stessi casi di cui al punto 1 .



Esercizio2

Trovare l'intersezione fra le due parabole:

$y = x^2 - 6x$

$y = -x^2 + 2x$

Soluzione:

Trovare l'intersezione fra le due parabole:

$y = x^2 - 6x$

$y = -x^2 + 2x$

Possiamo subito osservare che siccome manca il termine noto uno dei due punti comuni deve essere l'origine delgli assi O=(0,0)

Facciamo il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$

Sostituisco il valore di y della prima nella seconda equazione.

Se sostituisci in modo che prima dell'uguale x^2 sia positiva ti risparmi un passaggio:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ x^2 - 6x = -x^2 + 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - - - - - - \\ x^2 + x^2 - 2x - 6x = 0 \end{cases}$$

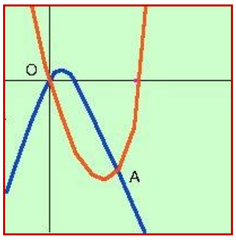
$$\begin{cases} - - - - - - - \\ 2x^2 - 8x = 0 \end{cases}$$

Semplifico per 2 :

$$\begin{cases} - - - - - - - \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

E' un'equazione spuria $x(x-4) = 0$ che ammette le soluzioni:

$x = 0$ $\quad$ $x=4$



Sostituisco il valore 0 in una delle due equazioni del sistema (conviene prendere la piu' semplice):

$$\begin{cases} y = 0^2 - 6 \cdot 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Primo punto $O=(0, 0)$

Sostituisco il valore 4 in una delle due equazioni del sistema:

$$\begin{cases} y = 4^2 - 6 \cdot 4 = 16 - 24 = -8 \\ x = 4 \end{cases}$$

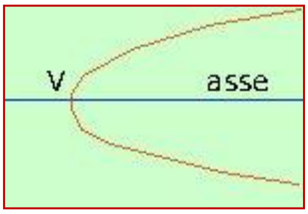
Secondo punto $A=(4, -8)$

A destra la rappresentazione grafica

- ***Intersezioni fra una parabola ed un'altra parabola con asse orizzontale***

Veramente la parabola con asse orizzontale sara' il prossimo argomento, ma per i nostri ragionamenti basta pensarne l'equazione e la rappresentazione grafica

equazione $\quad$ $x = ay^2 + by + c$



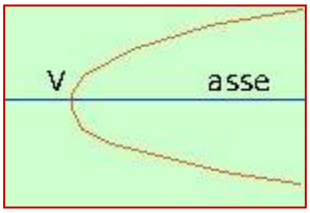
Di solito e' raro che in un problema si chiedano le intersezioni fra due parabole una con asse verticale ed una con asse orizzontale perche'l'equazione risolvente del sistema che si ottiene e' di quarto grado.
Quindi avremo che le possibili soluzioni sono le stesse che abbiamo gia' visto per l' intersezione fra una parabola ed una circonferenza (non saranno possibili pero' le 4 soluzioni due a due coincidenti) .

4. Equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle x

Possiamo considerare la parabola con asse orizzontale come la parabola con asse verticale in cui scambiamo le y con le x:

$x = ay^2 + by + c$

Quindi per avere le varie formule del vertice, dei fuochi dell'asse, della direttrice bastera' sostituire la x al posto della y e viceversa.



Ad esempio le coordinate del vertice saranno:

$$V = \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a} ; \quad -\frac{b}{2a} \right)$$

Esercizio: Trovare il vertice della parabola:

$x = y^2 - 4y + 3$ $\qquad$ Soluzione:

Determinare le coordinate del vertice della parabola di equazione:
$x = y^2 - 4x + 3$
Le coordinate del vertice sono:

$$V = \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}; \quad -\frac{b}{2a}\right)$$

Abbiamo:
a = 1
b = -4
c = 3
Calcoliamo la coordinata x del vertice V_x :

$$V_x = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4(1)(3)}{4} = -1$$

Calcoliamo la coordinata y del vertice V_y :

$$V_y = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

Otteniamo quindi:
V = (-1,2)

C'e' da notare che la parabola con asse orizzontale (come anche la circonferenza) non e' una funzione in senso stretto perche' ogni retta verticale che la intersechi la intersechera' in due punti, mentre nella funzione ad ogni valore di x deve corrispondere un solo valore di y e quindi un solo punto sulla verticale.

---

5. Problemi sulla parabola

Vediamo ora quali sono i principali problemi, oltre a quelli gia' visti, che si possono presentare con la parabola e, per ognuno di essi, facciamo un paio di esercizi:

- Tangenza ad una parabola
- Famiglia di parabole
- Problemi con parametro

Esercizi sulla tangenza ad una parabola

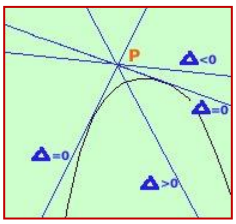
Vediamo quali sono i principali tipi di esercizi sul concetto di tangenza

- Rette tangenti ad una parabola condotte da un punto esterno
- Rette tangenti ad una parabola condotte da un punto della parabola stessa
- Altri tipi di problemi su rette tangenti ad una parabola
- Tangenza fra una parabola e una conica

Esercizi sulle rette tangenti ad una parabola condotte da un punto esterno

---

Quando farai analisi matematica vedrai un metodo diverso molto piu' semplice, ma, per ora, devi applicare il metodo del determinante .



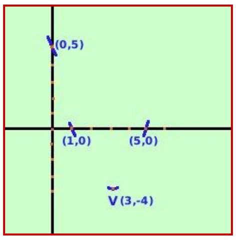
Presa una parabola ed un punto esterno alla parabola stessa considereremo il fascio di rette nel punto e fra queste rette sceglieremo quelle che hanno due punti coincidenti comuni con la parabola, cioe' quelle che messe a sistema con la parabola ci forniscono due soluzioni coincidenti, ossia il delta del sistema fra fascio di rette e parabola deve essere uguale a zero
Dai anche un'occhiata a questo link:
se il **delta e' minore di zero** la retta e' esterna rispetto alla parabola e le due soluzioni del sistema sono complesse e coniugate;
se il **delta e' maggiore di zero** la retta taglia la parabola in due punti e le due soluzioni del sistema sono reali e

distinte;
se il **delta e' uguale a zero** la retta e' tangente alla parabola e le due soluzioni del sistema sono reali coincidenti

---

Esercizio 1
Data la parabola:
$y= x^2 - 6x + 5$
trovare le equazioni delle tangenti condotte alla parabola dal punto A(-1,-3). Soluzione:
Prima disegniamo la parabola ed il punto.

Disegniamo la parabola di equazione:
$y= x^2 - 6x + 5$
Troviamo prima le coordinate del vertice **V** :



$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Abbiamo:
$a = 1$
$b = -6$
$c = 5$
Quindi:

$$V = \left(-\frac{-6}{2 \cdot 1}, -\frac{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 1}\right)$$

$$V = \left(\frac{6}{2}, -\frac{36 - 20}{4}\right)$$

$V = (3, -4)$
Intersezioni con gli assi:

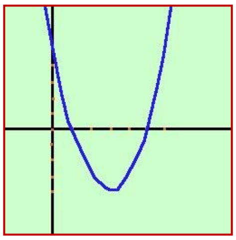
- Intersezioni asse x: faccio il sistema fra l'asse x (y=0) e l'equazione della parabola:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione di secondo grado ed ottengo:
$x_1 = 1$
$x_2 = 5$
Quindi i punti di intersezione con l'asse delle x sono
(1,0) (5,0)

- Intersezioni asse y: faccio il sistema fra l'asse y (x=0) e l'equazione della parabola:



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 = 0 \end{cases}$$

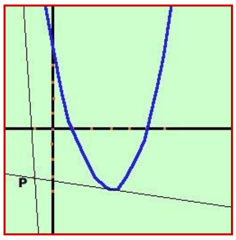
Quindi il punto di intersezione con l'asse delle y e':
(0,5)
Adesso congiungo i punti con una curva continua ed ottengo il grafico della parabola.

Considero il fascio di rette passante per il punto A(-1,-3):
$y-(-3) = m[x-(-1)]$
$y + 3= m(x + 1)$
Faccio il sistema fra il fascio di rette e la parabola:

$$\begin{cases} y + 3 = m(x + 1) \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx + m - 3 \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo l'equazione risolvente:

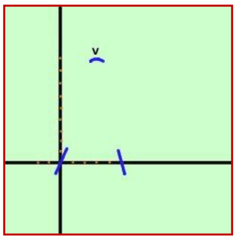


$mx + m - 3 = x^2 - 6x + 5$
$0 = x^2 - 6x - mx - m + 5 + 3$
meglio:

$x^2 - 6x - mx - m + 5 + 3 = 0$ usando la proprieta' riflessiva dell'uguaglianza: se a=b anche b=a
Raccolgo ad equazione di secondo grado:
$x^2 - x(6+m) - m + 8 = 0$
Questa e' l'equazione risolvente il sistema: per avere due soluzioni coincidenti devo porre il delta dell'equazione uguale a zero:
$\Delta = b^2-4ac = 0$
Ho:
$a = 1 \qquad b = -(6+m) \qquad c = -m + 8$
$\Delta = b^2-4ac = [-(6+m)]^2 - 4\,(1)(-m+8) = 0$
$36 + 12m + m^2 + 4m - 32 = 0$
Se non seiconvinto dei segni del quadrato ferma il mouse sul risultato
metto in ordine
$m^2 + 16m + 4 = 0$
Risolvo l'equazione di secondo grado ed ottengo:
$m_1 = - 8 - 2\sqrt{18}$
$m_2 = - 4 + 2\sqrt{15}$
Ho quindi le due tangenti:

- Prima tangente
  $y + 3 = (-8 - 2\sqrt{15})(x+1)$
  $y = (-8 - 2\sqrt{15})x - 8 - 2\sqrt{15} - 3$
  $y = (-8 - 2\sqrt{15})x - 11 - 2\sqrt{15}$
- Seconda tangente
  $y + 3 = (-8 + 2\sqrt{15})(x+1)$
  $y = (-8 + 2\sqrt{15})x - 8 + 2\sqrt{15} - 3$
  $y = (-8 + 2\sqrt{15})x - 11 + 2\sqrt{15}$

Esercizio 2
Data la parabola:
$y = -x^2 + 6x$
trovare le equazioni delle tangenti condotte alla parabola dal punto A(-2,0) e determinarne i punti di tangenza. Soluzione:
Prima disegniamo la parabola ed il punto A(-2,0):



Disegniamo la parabola di equazione:
$y = - x^2 + 6x$
Troviamo prima le coordinate del vertice **V:**
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$
Abbiamo:
$a = -1$
$b = 6$
$c = 0$
Quindi:
$$V = \left(-\frac{6}{2\cdot(-1)}, -\frac{6^2 - 4\cdot(-1)\cdot 0}{4\cdot(-1)}\right)$$
$$V = \left(-\frac{6}{-2}, -\frac{36}{-4}\right)$$
$V = (3, 9)$
Intersezioni con gli assi:

- Intersezioni asse x: faccio il sistema fra l'asse x (y=0) e l'equazione della parabola:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -x^2 + 6x \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 0 \\ -x^2 + 6x = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(x-6) = 0 \end{cases}$$

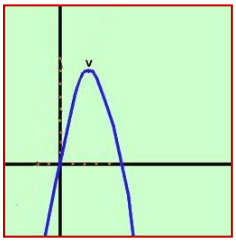
ed ottengo:

$x_1 = 0$

$x_2 = 6$

quindi i punti di intersezione con l'asse delle x sono

(0,0) **(6,0)**



- Intersezioni asse y: faccio il sistema fra l'asse y (x=0) e l'equazione della parabola:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -x^2 + 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi il punto di intersezione con l'asse delle y e' l'origine:

(0,0)

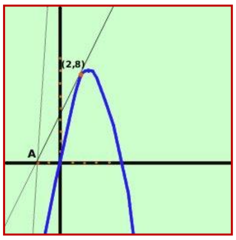
Adesso congiungo i punti con una curva continua ed ottengo il grafico della parabola.

Considero il fascio di rette passante per il punto A(-2,0):

$y - 0 = m(x+2)$

$y = mx + 2m$

Faccio il sistema fra il fascio di rette e la parabola:



$$\begin{cases} y = mx - 4m \\ y = -x^2 + 6x \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo l'equazione risolvente:

$mx + 2m = -x^2 + 6x$

$x^2 - 6x + mx + 2m = 0$

Ordino:

$x^2 - x(6-m) + 2m = 0$

Questa e' l'equazione risolvente il sistema: per avere due soluzioni coincidenti devo porre il delta dell'equazione uguale a zero:

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Ho:

$a = 1$ $b = -6+m$ $c = 2m$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6+m)^2 - 4(1)(2m) = 0$

$36 - 12m + m^2 - 8m = 0$

Metto in ordine:

$m^2 - 20m + 36 = 0$

Risolvo l'equazione di secondo grado ed ottengo:

$m_1 = 2$

$m_2 = 18$

Ho quindi le due tangenti:

- Prima tangente
  $y = 2x + 4$
- Seconda tangente
  $y = 18x + 36$

Ora devo trovare i punti di tangenza: e' sufficiente risolvere il sistema tangente-parabola:

- primo sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x^2 + 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ 2x + 4 = -x^2 + 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} ------------ \\ x^2 - 6x + 2x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ---------- \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases}$$

Essendo la tangente la soluzione e' doppia (delta uguale a zero e si tratta di un quadrato perfetto):

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ (x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2(2) + 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 8 \\ x = 2 \end{cases}$$

il primo punto e' **(2,8)**

- secondo sistema:

$$\begin{cases} y = 18x + 36 \\ y = -x^2 + 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 18x + 36 \\ 18x + 36 = -x^2 + 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - - - - - - - - \\ x^2 - 6x + 18x + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - - - - - \\ x^2 + 12x + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - \\ (x+6)^2 = 0 \end{cases}$$

Essendo la tangente la soluzione e' doppia (delta uguale a zero e si tratta di un quadrato perfetto):

$$\begin{cases} y = 18x + 36 \\ (x+6) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 18(-6) + 36 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 72 \\ x = -6 \end{cases}$$

il secondo punto e' **(-6,72)**

Naturalmente e' fuori grafico

Esercizio 3

Data la parabola $y = x^2 + 1$

trovare le equazioni delle tangenti condotte alla parabola dall'origine **O(0,0)** e, indicati con **A** e **B** i punti in cui tali tangenti toccano la parabola, trovare l'area del triangolo **OAB** . Soluzione:

Prima disegniamo la parabola:

Disegniamo la parabola di equazione:

$y = -x^2 + 6x$

Troviamo prima le coordinate del vertice **V** :

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Abbiamo:

a = -1

b = 6

c = 0

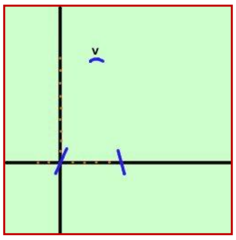
Quindi:

$$V = \left(-\frac{6}{2 \cdot (-1)}, -\frac{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)}\right)$$

$$V = \left(-\frac{6}{-2}, -\frac{36}{-4}\right)$$

V = (3, 9)

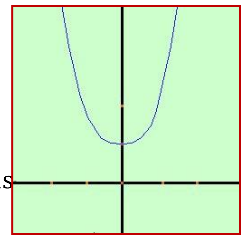
Intersezioni con gli assi



- Intersezioni asse x: faccio il sistema fra l'asse x (y=0) e l'equazione della parabola:
  $$\begin{cases} \mathbf{y = 0} \\ \mathbf{y = -x^2 + 6x} \end{cases}$$
  $$\begin{cases} \mathbf{y = 0} \\ \mathbf{-x^2 + 6x = 0} \end{cases}$$
  $$\begin{cases} \mathbf{y = 0} \\ \mathbf{x^2 - 6x = 0} \end{cases}$$
  $$\begin{cases} \mathbf{y = 0} \\ \mathbf{x(x - 6) = 0} \end{cases}$$
  ed ottengo:
  $\mathbf{x_1 = 0}$
  $\mathbf{x_2 = 6}$
  quindi i punti di intersezione con l'asse delle x sono:
  (0,0) **(6,0)**

- Intersezioni asse y: faccio il sistema fra l'asse y (x=0) e l'equazione della parabola:
  $$\begin{cases} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{y = -x^2 + 6x} \end{cases}$$
  $$\begin{cases} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{y = 0} \end{cases}$$
  quindi il punto di intersezione con l'asse delle y e' l'origine
  (0,0)
  Adesso congiungo i punti con una curva continua ed ottengo il grafico della parabola.

Considero poi il fascio di rette passante per l'origine O(0,0)
$\mathbf{y- 0 = m(x-0)}$
$\mathbf{y = mx}$
Faccio il sistema fra il fascio di rette e la parabola:
$$\begin{cases} \mathbf{y = mx} \\ \mathbf{y = x^2 + 1} \end{cases}$$



Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo l'equazione ris
$\mathbf{mx = x^2 + 1}$
$\mathbf{x^2 - mx + 1 = 0}$
questa e' l'equazione risolvente il sistema: per avere due soluzioni coincidenti devo porre il delta dell'equazione uguale a zero
$\mathbf{\Delta = b^2\text{-}4ac = 0}$
Ho
$\mathbf{a = 1}$ $\mathbf{b = -m}$ $\mathbf{c = 1}$
$\mathbf{\Delta = b^2\text{-}4ac = m^2 - 4\,(1)(1) = 0}$
$\mathbf{m^2 - 4 = 0}$
$\mathbf{m^2 = 4}$
risolvo ed ottengo
$\mathbf{m_1 = -2}$
$\mathbf{m_2 = +2}$
Ho quindi le due tangenti:

- Prima tangente
  $\mathbf{y = -2x}$
- Seconda tangente
  $\mathbf{y = 2x}$

Ora devo trovare i punti di tangenza: e' sufficiente risolvere il sistema tangente-parabola

- primo sistema:
  $$\begin{cases} \mathbf{y = -2x} \\ \mathbf{y = x^2 + 1} \end{cases}$$
  $$\begin{cases} \mathbf{y = -2x} \\ \mathbf{-2x = x^2 + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - - - \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

essendo la tangente la soluzione e' doppia (delta uguale a zero e si tratta di un quadrato perfetto):

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2(1) \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Il primo punto e' **A=(1,2)**

- secondo sistema:

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ -2x = x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - - - - \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - - \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

Essendo la tangente la soluzione e' doppia (delta uguale a zero e si tratta di un quadrato perfetto):

$$\begin{cases} y = -2x \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2(-1) \\ x = -1 \end{cases}$$

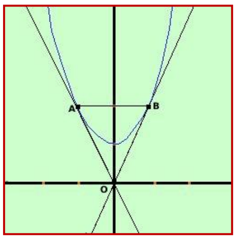
$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

il secondo punto e' **B=(-1,2)**

Devo ora trovare l'area del triangolo **OAB**

ho i dati

O = (0,0)   A = (-1,2)   B= (1,2)



Come metodo normale dovrei trovare prima la distanza fra due punti e considerarla base del triangolo, considerare poi la retta su cui ho preso tale distanza (retta per due punti) quindi dal terzo punto considerare la distanza punto-retta che sarebbe l'altezza del triangolo e quindi applicare la formula **base per altezza diviso due;** ma in questo caso, se osservi la figura puoi prendere come base il segmento orizzontale **AB**, cioe' la somma (in valore assoluto) delle ascisse e come altezza, avremo il segmento che da **O** e' perpendicolare ad **AB** cioe' l'ordinata di uno dei due punti **A** e **B**

Abbiamo:

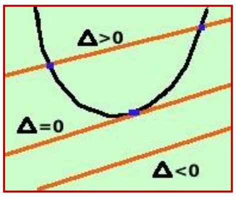
AB = |-1| + |1| = 1 + 1 = 2   per |-1| si intende il modulo

Altezza triangolo = 2

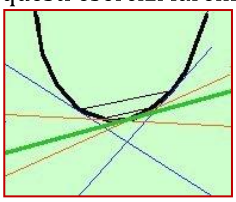
Area(ABO) = AB · altezza /2 = (2 · 2)/2 = 2

L'area del triangolo **ABO** vale due unita' quadrate del piano

Esercizi sulla retta tangente ad una parabola in un suo punto



Anche qui e' applicabile il metodo (molto piu' semplice) che vedrai in analisi matematica il prossimo anno (regola di De L'Hospital). comunque, per risolvere ora questi esercizi faremo riferimento al fatto che la tangente e' la posizione limite di una secante quando i due punti di intersezione tendono ad



avvicinarsi fra loro indefinitamente, cioe' il discriminante del sistema retta-parabola sara' nullo (soluzioni coincidenti).

Inoltre la soluzione sara' sempre doppia cioe' avremo sempre un quadrato perche' la tangente sara' sempre formata da due tangenti sovrapposte (i punti, anche se coincidenti, sono sempre due e quindi le tangenti sono due)
Infatti possiamo pensare la tangente anche come posizione limite di due tangenti a due punti diversi che, spostando la corda, si avvicinano fra di loro fino a coincidere nel punto di tangenza.

Nella figura a sinistra le corde sono in nero, le due rette blu hanno i punti di tangenza piu' lontani, le rette rosse hanno i punti di tangenza piu' vicini fra loro e le rette verdi hanno i punti di tangenza coincidenti e sono sovrapposte

---

Esercizio 1

Data la parabola: $y = x^2 - 3x$
trovare l'equazione della retta tangente nell'origine. Soluzione:
L'ho indicato come problema 0 perche' piu' che un problema e' un'osservazione:

> **Se una parabola passa per l'origine la sua tangente nell'origine e' data dall'insieme dei termini di primo grado.**

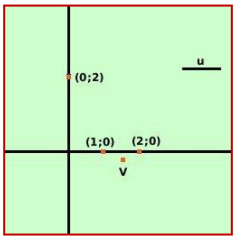
Quindi nel nostro caso avremo la tangente:
$\mathbf{y = -3x}$

Come esercizio per gli alunni che hanno gia fatto analisi: per la dimostrazione fare riferimento ad analisi e alla formula della tangente calcolando il coefficiente angolare con la derivata.

Esercizio 2

Data la parabola: $y = x^2 - 3x + 2$
trovare l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa -1. Soluzione:
Prima disegniamo la parabola e poi calcoliamo le coordinate del punto: essendo l'ascissa **-1** basta sostituire alla x della parabola il valore **-1** per trovare l'ordinata del punto
$\mathbf{y = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6}$
Quindi il punto (chiamiamolo **A**) ha coordinate A(-1;6)

Disegniamo la parabola di equazione
$\mathbf{y = x^2 - 3x + 2}$
Troviamo prima le coordinate del vertice **V** :



$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Abbiamo:
a = 1
b = -3
c = 2
Quindi:

$$V = \left(-\frac{-3}{2 \cdot 1}, -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}{4 \cdot 1}\right)$$

$$V = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9-8}{4}\right)$$

$$V = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Intersezioni con gli assi

- Intersezioni asse x: faccio il sistema fra l'asse x (y=0) e l'equazione della parabola:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione di secondo grado ed ottengo
$\mathbf{x_1 = 1}$
$\mathbf{x_2 = 2}$

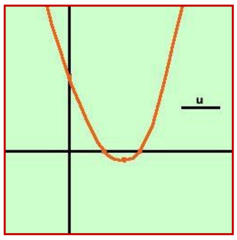
Quindi i punti di intersezione con l'asse delle x sono
(1,0) **(2,0)**

- Intersezioni asse y: faccio il sistema fra l'asse y (x=0) e l'equazione della parabola:

$$\begin{cases} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{y = x^2 - 3x + 2} \end{cases}$$

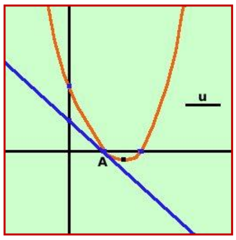
$$\begin{cases} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{y = 0^2 + 3(0) + 2 = 2} \end{cases}$$

quindi il punto di intersezione con l'asse delle y e'
(0,2)
Adesso congiungo i punti con una curva continua ed ottengo il grafico della parabola



Considero il fascio di rette passante per il punto A(-1;6)
y-6 = m[x-(-1)]
y -6= m(x + 1)
y = mx + m+6
Faccio il sistema fra il fascio di rette e la parabola:

$$\begin{cases} \mathbf{y = mx + m + 6} \\ \mathbf{y = x^2 - 3x + 2} \end{cases}$$



Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo l'equazione risolvente:
$mx + m + 6 = x^2 - 3x + 2$
$0 = x^2 - 3x - mx - m - 6 + 2$
meglio:
$x^2 - 3x - mx - m - 6 + 2 = 0$ usando la proprieta' riflessiva dell'uguaglianza: se a=b anche b=a
raccolgo ad equazione di secondo grado:
$x^2 - x(3+m) - m - 4 = 0$
Questa e' l'equazione risolvente il sistema: per avere due soluzioni coincidenti devo porre il delta dell'equazione uguale a zero:
$\Delta = b^2\text{-}4ac = 0$
Ho:
a = 1 **b = -(3+m)** **c = -m -4**
$\Delta = b^2\text{-}4ac = [-(3+m)]^2 - 4\,(1)(-m-4) = 0$
$9 + 6m + m^2 + 4m + 16 = 0$
Metto in ordine:
$m^2 + 10m + 25 = 0$
Come ti avevo detto e' un quadrato perfetto (essendo il punto di tangenza formato da due punti sovrapposti in cui calcolare le tangenti la soluzione e' doppia); risolvo ed ottengo:
$(m + 5)^2 = 0$
m = -5 (doppia)
Ho quindi la tangente:
y = mx + m+6
y = (-5)x + (-5) + 6
y = -5x + 1

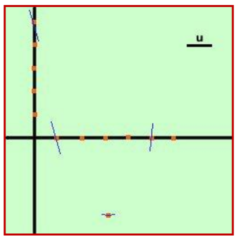
Esercizio 3

Data la parabola: $y = x^2 - 6x + 5$
trovare le equazioni delle tangenti condotte alla parabola nei punti di intersezione con l'asse delle ascisse. Detti A e B tali punti, indicato con C il punto di intersezione delle due tangenti calcolare l'area del triangolo ABC . Soluzione:
Prima disegniamo la parabola.

Disegniamo la parabola di equazione:
$y = x^2 - 6x + 5$
Troviamo prima le coordinate del vertice **V:**

$$\mathbf{V} = \left(-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}, -\frac{\mathbf{b^2 - 4ac}}{\mathbf{4a}}\right)$$

Abbiamo:
a = 1
b = -6
c = 5
Quindi:



$$V = \left(-\frac{-6}{2 \cdot 1}, -\frac{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 1}\right)$$

$$V = \left(3, -\frac{16}{4}\right)$$

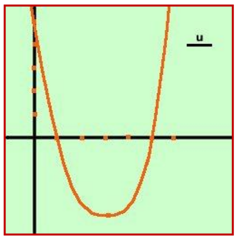
$$V = (3, -4)$$

Intersezioni con gli assi

- Intersezioni asse x: faccio il sistema fra l'asse x (y=0) e l'equazione della parabola:
  $\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$

  $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases}$

  Risolvo l'equazione di secondo grado ed ottengo
  $x_1 = 1$
  $x_2 = 5$
  Quindi i punti di intersezione con l'asse delle x sono:
  (1,0) (5,0)
- Intersezioni asse y: faccio il sistema fra l'asse y (x=0) e l'equazione della parabola:



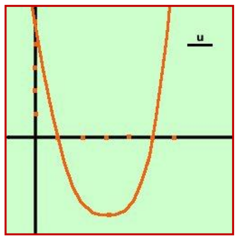
  $\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$

  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0^2 - 6(0) + 5 = 5 \end{cases}$

  Quindi il punto di intersezione con l'asse delle y e':
  (0,5)
  Adesso congiungo i punti con una curva continua ed ottengo il grafico della parabola.

Consideriamo i due punti **A(1;0)** e **B(5;0)** e calcoliamo le tangenti alla parabola in questi punti:

- tangente nel punto **A(1,0)** considero il fascio di rette in **A:**
  $y - 0 = m(x-1)$
  $y = mx - m$
  Faccio il sistema fra il fascio di rette e la parabola:



  $\begin{cases} y = mx - m \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$
  Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo l'equazione risolvente:
  $mx - m = x^2 - 6x + 5$
  $x^2 - mx - 6x + m + 5 = 0$
  $x^2 - x(m+6) + m + 5 = 0$
  Questa e' l'equazione risolvente il sistema: per avere due soluzioni coincidenti devo porre il delta dell'equazione uguale a zero:
  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
  Ho:
  $a = 1 \quad b = m+6 \quad c = m+5$
  $\Delta = b^2 - 4ac = (m+6)^2 - 4(1)(m+5) = 0$
  $m^2 + 12m + 36 - 4m - 20 = 0$
  $m^2 + 8m + 16 = 0$
  $(m+4)^2 = 0$
  Ottengo la soluzione doppia (due soluzioni coincidenti):
  $m + 4 = 0$
  $m = -4$
  Ho quindi la tangente:
  $y = mx - m$
  $y = (-4)x - (-4)$
  $y = -4x + 4$
- tangente nel punto **B(5,0)** considero il fascio di rette in **B:**
  $y - 0 = m(x-5)$
  $y = mx - 5m$
  Faccio il sistema fra il fascio di rette e la parabola:

$$\begin{cases} y = mx - 5m \\ y = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo l'equazione risolvente:

$mx - 5m = x^2 - 6x + 5$

$x^2 - mx - 6x + 5m + 5 = 0$

$x^2 - x(m+6) + 5m + 5 = 0$

Questa e' l'equazione risolvente il sistema: per avere due soluzioni coincidenti devo porre il delta dell'equazione uguale a zero:

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Ho

$a = 1 \quad b = m+6 \quad c = 5m+5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (m+6)^2 - 4\,(1)(5m+5) = 0$

$m^2 + 12\,m + 36 - 20m - 20 = 0$

$m^2 - 8\,m + 16 = 0$

$(m-4)^2 = 0$

Ottengo la soluzione doppia (due soluzioni coincidenti):

$m - 4 = 0$

$m = 4$

Ho quindi la tangente:

$y = mx - 5m$

$y = (4)x - 5(4)$

$y = 4x - 20$

Ora devo trovare il punto **C** : e' sufficiente risolvere il sistema fra le tangenti:

$$\begin{cases} y = -4x + 4 \\ y = 4x - 20 \end{cases}$$

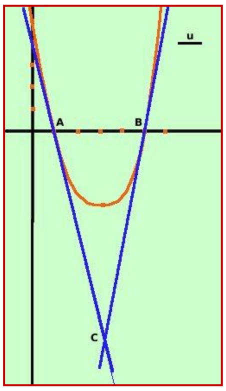
$$\begin{cases} 4x - 20 = -4x + 4 \\ \text{— — — — — — — — — — —} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 24 \\ \text{— — — — —} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -4x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -4(3) + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -8 \end{cases}$$



il punto di intersezione e' C=(3;-8)

Devo ora trovare l'area del triangolo **ABC**

ho i dati

C = (3;-8) A = (1;0) B= (5;0)

Come metodo normale dovrei trovare prima la distanza fra due punti e considerarla base del triangolo, considerare poi la retta su cui ho preso tale distanza (retta per due punti) quindi dal terzo punto considerare la distanza punto-retta che sarebbe l'altezza del triangolo e quindi applicare la formula **base per altezza diviso due;** ma in questo caso, se osservi la figura puoi prendere come base il segmento orizzontale **AB**, cioe' la somma (in valore assoluto) delle ascisse e come altezza avremo il segmento che da **C** e' perpendicolare ad **AB** cioe' l'ordinata (sempre in valore assoluto) del punto **C** .

Abbiamo:

AB = -|1| + |5| = 5 - 1 = 4

Altezza triangolo = |-8| = 8 per |-8| si intende il modulo

Area(ABC) = AB · altezza /2 = (4 · 8)/2 = 16

L'area del triangolo **ABC** vale 16 unita' quadrate del piano

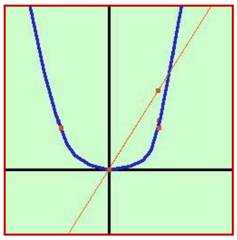
---

Esercizio 4

Data la parabola: $y = x^2$

trovare le equazioni della sua tangente parallela alla retta $y = 2x$. Soluzione:
Prima disegniamo la parabola $\mathbf{y = x^2}$ e la retta $\mathbf{y=2x}$.

La parabola di equazione:
$\mathbf{y= x^2}$
e' la parabola con vertice nell'origine e concavita' verso l'alto.
Troviamo prima le coordinate del vertice **V**
Si tratta della parabola con vertice nell'origine, quindi:
$\mathbf{V = (0\ \ 0)}$
Per disegnarla meglio aggiungiamo alcuni punti mediante un calcolo effettivo $\mathbf{y = x^2}$; sostituisco ad x dei valori e leggo i valori per y :



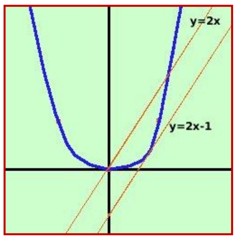
$x = 1$	$y = (1)^2 = 1$
$x = -1$	$y = (-1)^2 = 1$
$x = 2$	$y = (2)^2 = 4$
$x = -2$	$y = (-2)^2 = 4$

Quindi la parabola passa per i punti (-2; 4) (-1; 1) (1; 1) (2; 4).
Adesso congiungo i punti con una curva continua ed ottengo il grafico della parabola.

Traccio ora il grafico della retta $\mathbf{y = 2x}$:

$x = 0$	$y = 2\cdot 0 = 0$
$x = 1$	$y = 2\cdot(1) = 2$

La retta passa per i due punti **(0;0)** e **(1; 2)**; traccio (in rosso) la linea passante per i due punti
Consideriamo il fascio di rette parallelo alla retta e fra queste individuiamo la tangente facendo il sistema fascio-parabola e ponendo il delta uguale a zero.
Considero il fascio di rette parallele alla retta $\mathbf{y = 2x}$:
$\mathbf{y = 2x + k}$
Faccio il sistema fra il fascio di rette e la parabola:



$$\begin{cases} y = 2x + k \\ y = x^2 \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo l'equazione risolvente:
$\mathbf{2x+ k = x^2}$
$\mathbf{x^2 -2x - k = 0}$
Questa e' l'equazione risolvente il sistema: per avere due soluzioni coincidenti devo porre il delta dell'equazione uguale a zero:
$\mathbf{\Delta = b^2-4ac = 0}$
Ho:
$\mathbf{a = 1 \quad b = -2 \quad c = -k}$
$\mathbf{\Delta = b^2-4ac = (-2)^2 - 4\ (1)(-k) =0}$
$\mathbf{4 + 4k = 0}$
$\mathbf{4k = -4}$
$\mathbf{k = -1}$

Quindi la tangente e':
$\mathbf{y = 2x - 1}$

Esercizi vari sulla retta tangente ad una parabola in un suo punto

---

Esercizio 1
Data la parabola: $\mathbf{y= x^2 - kx + 1}$
determinare il valore di k affinche' essa sia tangente alla retta $\mathbf{y = 2x -1}$. Soluzione:

Faccio il sistema fra la retta e l'equazione della parabola

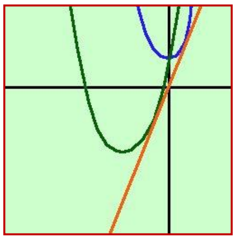
$$\begin{cases} \mathbf{y = 2x} \\ \mathbf{y = x^2 - kx + 1} \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo:

$$\begin{cases} \mathbf{y = 2x} \\ \mathbf{2x = x^2 - kx + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ------------ \\ \mathbf{x^2 - kx - 2x + 1} \end{cases}$$

Posso quindi considerare l'equazione risolvente:
$x^2 - (k+2)x + 1 = 0$
per avere la tangenza retta-parabola devo porre il delta dell'equazione uguale a zero:
$\Delta = b^2\text{-}4ac = 0$
Ho:
$a = 1$ $\quad$ $b = -(k+2)$ $\quad$ $c = 1$
$\Delta = b^2\text{-}4ac = [-(k+2)]^2 - 4\,(1)(1) = 0$
$k^2 + 4m + 4 - 4 = 0$
Se non sei convinto dei segni del quadrato ferma il mouse sul risultato
metto in ordine:
$k^2 + 4k = 0$
E' un'equazione spuria:
$k(k-4) = 0$



Un prodotto e' zero se uno dei fattori e' zero, quindi avremo **$k=0$** oppure **$(k+4)=0$**
ed abbiamo i due risultati:
$k_1 = 0$ $\quad$ $k_2 = -4$
Abbiamo quindi due parabole possibili tangenti alla retta data:
$y= x^2 - (0)x + 1$ $\quad$ **$y= x^2 + 1$**
$y= x^2 - (-4)x + 1$ $\quad$ **$y= x^2 + 4x + 1$**

A destra il grafico relativo:
Le due parabole sono una in blu e l'altra in verde scuro, mentre la retta **$y=2x$** e' in rosso.

Esercizio 2

Date le parabole: **$y= x^2 - 2x$** e **$y= -x^2 + 2x$**
trovare le equazioni delle tangenti nei punti comuni alle due parabole e dire quale tipo di figura individuano tali tangenti (parallelogramma quadrato?) Soluzione:
Prima disegniamo le due parabole e, facendolo, abbiamo trovato che i punti di intersezione sono:
$O=(0,0)$ $\quad$ $A=(2,0)$

Disegniamo prima la parabola di equazione:
$y= x^2 - 2x$
Troviamo prima le coordinate del vertice **V_1:**

$$\mathbf{V_1 = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)}$$

Abbiamo:
$a = 1$
$b = -2$
$c = 0$
Quindi :

$$\mathbf{V_1 = \left(-\frac{(-2)}{2 \cdot 1}, -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1}\right)}$$

$$\mathbf{V_1 = (1, -1)}$$

Intersezioni con gli assi

- Intersezioni asse x: faccio il sistema fra l'asse x (y=0) e l'equazione della parabola:

$$\begin{cases} \mathbf{y = 0} \\ \mathbf{y = x^2 - 2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{y = 0} \\ \mathbf{x^2 - 2x = 0} \end{cases}$$

Risolvo l'equazione di secondo grado spuria ed ottengo:
$x_1 = 0$
$x_2 = 2$

Quindi i punti di intersezione con l'asse delle x sono:
O=(0,0) **A=(2,0)**

- Intersezioni asse y: e' il punto **(0,0)** gia' trovato

Disegniamo ora la parabola di equazione:
y= -x² + 2x

Siccome la seconda equazione si ottiene dalla prima scambiando y con -y la seconda parabola sara' la simmetrica della prima rispetto all'asse x

---

Troviamo prima le coordinate del vertice V_2 :

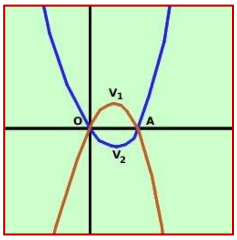
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

Abbiamo:
a = -1
b = 2
c = 0
quindi:

$$V_2 = \left(-\frac{2}{2\cdot(-1)}, -\frac{(2)^2-4\cdot(-1)\cdot 0}{4\cdot(-1)}\right)$$

$V_2 = (1;1)$

Intersezioni con gli assi



- Intersezioni asse x: faccio il sistema fra l'asse x (y=0) e l'equazione della parabola:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$

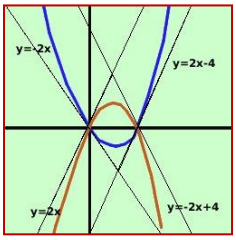
$$\begin{cases} y = 0 \\ -x^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione di secondo grado spuria ed ottengo:
$x_1 = 0$
$x_2 = 2$
quindi i punti di intersezione con l'asse delle x sono
O=(0,0) **A=(2,0)**

- Intersezioni asse y: e' il punto **(0,0)** gia' trovato

Possiamo dire di avere gia' trovato i punti di intersezione delle due parabole: sono i due punti di intersezione con l'asse delle x
Adesso congiungo i punti con una curva continua ed ottengo il grafico delle parabole
Anche se non sembra dall'orrendo grafico che ho fatto le due parabole sono simmetriche (simmetria assiale): posso ottenere la seconda parabola ribaltando la prima attorno all'asse x. (fare link quando sviluppo simmetria)

Dovremo trovare 4 tangenti: due alla prima parabola nei punti O ed A e due alla seconda sempre negli stessi punti



- Tangente alla parabola **y= x² - 2x** nell'origine
  ricordando l'osservazione del problema 0 sulle tangenti di una curva in un suo punto possiamo scrivere:
  y = - 2x
- Tangente alla parabola **y= x² - 2x** nel punto **A=(2,0)**
  considero il fascio di rette passante per il punto **A** :
  y - 0 = m(x-2)
  y = mx - 2m
  Faccio il sistema fra il fascio di rette e la parabola:

$$\begin{cases} y = mx - 2m \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

  Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo l'equazione risolvente:
  mx - 2m = x² - 2x
  0 = x² - 2x - mx + 2m
  meglio:
  x² - 2x - mx + 2m = 0 usando la proprieta' riflessiva dell'uguaglianza: se a=b anche b=a
  raccolgo ad equazione di secondo grado:
  x² - x(2+m) + 2m = 0

Questa e' l'equazione risolvente il sistema: per avere due soluzioni coincidenti devo porre il delta dell'equazione uguale a zero:
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$
Ho:
$a = 1 \quad b = -(2+m) \quad c = 2m$
$\Delta = b^2 - 4ac = [-(2+m)]^2 - 4(1)(2m) = 0$
$4 + 4m + m^2 - 8m = 0$
Calcolo:
$m^2 - 4m + 4 = 0$
Come ti avevo detto e' un quadrato perfetto (essendo il punto di tangenza formato da due punti sovrapposti in cui calcolare le tangenti la soluzione e' doppia); risolvo ed ottengo:
$(m - 2)^2 = 0$
$m = 2$ (doppia)
Ho quindi la tangente:
$y = 2x - 4$

- Tangente alla parabola $y = -x^2 + 2x$ nell'origine.
  Ricordando l'osservazione del problema 0 sulle tangenti di una curva in un suo punto possiamo scrivere:
  $y = 2x$
- Tangente alla parabola $y = -x^2 + 2x$ nel punto $A=(2,0)$
  considero il fascio di rette passante per il punto **A** :
  $y - 0 = m(x-2)$
  $y = mx - 2m$
  Faccio il sistema fra il fascio di rette e la parabola:
  $\begin{cases} y = mx - 2m \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$
  Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo l'equazione risolvente:
  $mx - 2m = -x^2 + 2x$
  $x^2 - 2x + mx - 2m = 0$
  $x^2 - x(2-m) - 2m = 0$
  Questa e' l'equazione risolvente il sistema: per avere due soluzioni coincidenti devo porre il delta dell'equazione uguale a zero:
  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
  Ho:
  $a = 1 \quad b = -(2-m) \quad c = -2m$
  $\Delta = b^2 - 4ac = [-(2-m)]^2 - 4(1)(-2m) = 0$
  $4 - 4m + m^2 + 8m = 0$
  Calcolo:
  $m^2 + 4m + 4 = 0$
  Come ti avevo detto e' un quadrato perfetto (essendo il punto di tangenza formato da due punti sovrapposti in cui calcolare le tangenti la soluzione e' doppia); risolvo ed ottengo:
  $(m + 2)^2 = 0$
  $m = -2$ (doppia)
  Ho quindi la tangente:
  $y = -2x + 4$

Ora se osservo le equazioni delle tangenti:
$y = -2x$
$y = 2x - 4$
$y = 2x$
$y = -2x + 4$
vedo che le rette hanno due a due gli stessi coefficienti angolari, cioe'
$y = -2x$ e $y = -2x + 4$ sono tra loro parallele (coefficienti angolari $m_1 = m_2 = -2$)
$y = 2x - 4$ e $y = 2x$ sono tra loro parallele (coefficienti angolari $m_1 = m_2 = 2$)
Pertanto, senza procedere oltre posso dire che il quadrilatero, avendo i lati due a due paralleli e' un parallelogramma.

Per continuare l'esercizio prova a dimostrare che si tratta di un rombo seguendo la definizione

---

Esercizio 3
Considerate le rette parallele alla retta $y = 2x - 5$

determinare le condizioni per cui le intersezioni di tali rette con la parabola $\mathbf{y = 3x^2}$ siano rappresentate con valori reali e distinti. Soluzione:

Prima disegniamo la parabola e la retta date.

Disegniamo prima la parabola di equazione:

$\mathbf{y= 3x^2}$

Possiamo dire subito che il vertice e' nell'origine **V=(0;0)** e l'origine e' l'unica intersezione tra la parabola e gli assi: per disegnarla meglio troviamo un paio di punti:

Per **x=1** abbiamo $\mathbf{y=3(1)^2=3}$ Punto **(1;3)**

Per **x=-1** abbiamo $\mathbf{y=3(-1)^2=3}$ Punto **(-1;3)**

Posso trovare altri punti ma questi mi sono gia' sufficienti per disegnare la parabola.

Disegniamo ora la retta:

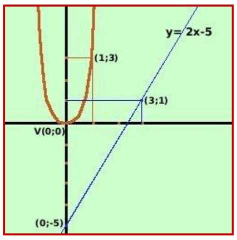
y = 2x - 5

Diamo due valori ad x e leggiamo i corrispondenti valori per y: otterremo due punti che ci permetteranno di disegnare la retta perche' per due punti passa una sola retta.

per **x=0** abbiamo **y = 2(0)-5 = -5** Punto **(0;-5)**

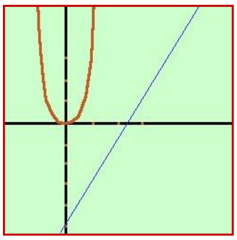
per **x=3** abbiamo **y = 2(3)-5 = 1** Punto **(3;1)**

A destra il grafico



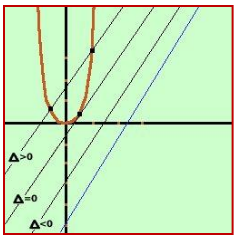
Osservando la figura vediamo che tracciando delle parallele alla retta data queste sono prima esterne, poi toccano la parabola e successivamente hanno due punti di intersezione con la parabola; quindi:

- se la retta e' esterna alla parabola ($\Delta < 0$) non avremo per le intersezioni valori reali
- se la retta e' tangente alla parabola ($\Delta = 0$) avremo una intersezione, o meglio, due valori reali e coincidenti
- se la retta e' secante la parabola ($\Delta > 0$) avremo due intersezioni, cioe' due valori reali e distinti



Quindi, per risolvere il problema devo trovare l'equazione della retta parallela alla retta data e tangente alla parabola:

Bastera' considerare il fascio di rette parallele, farne il sistema con l'equazione della partabola e poi porre il delta dell'equazione risolvente uguale a zero per ottenere due soluzioni reali coincidenti.



Il fascio di rette parallelo alla retta data **y = 2x - 5** sara':

y = 2x + q

Infatti al variare di q la retta si sposta parallelamente a se' stessa.

Faccio il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + q \\ y = 3x^2 \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y dalla seconda equazione nella prima ed ottengo l'equazione risolvente:

$\mathbf{3x^2 = 2x + q}$

$\mathbf{3x^2 - 2x - q = 0}$

Per avere due soluzioni coincidenti devo porre il delta dell'equazione uguale a zero:

$\mathbf{\Delta = b^2-4ac = 0}$

Ho:

a = 3 **b = -2** **c = -q**

$\mathbf{\Delta = b^2-4ac = (-2)^2 - 4\,(3)(-q) = 0}$

4 + 12q = 0

12q = -4

q = -4/12

q = -1/3

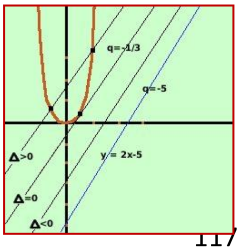
Quindi la retta tangente sara':

y = 2x - 1/3

Adesso se osserviamo la retta di partenza abbiamo che il termine noto vale **-5**, mentre nella retta tangente abbiamo che vale **-1/3**, quindi spostando la retta parallelamente a se' stessa verso sinistra il termine noto aumenta: cioe' possiamo dire che:

Preso il fascio di rette **y = 2x + q**

- per **q = -1/3** abbiamo per le intersezioni due valori reali coincidenti (una sola intersezione)



- Per **q > -1/3** abbiamo per le intersezioni due valori reali e distinti.

Ricorda anche che il termine noto nell'equazione della retta corrisponde al valore dell'intersezione della retta con l'asse delle y .

Tangenza fra una parabola ed una conica

Esercizio 1

Date le parabole: **$y= x^2 + 2x - 2$** e **$y= -x^2 + 6x - 4$**
verificare che sono tangenti nel loro punto comune   Soluzione:
Intanto disegniamo le due parabole:

Disegniamo prima la parabola di equazione:
$y= x^2 + 2x - 2$
Per fare prima usiamo un metodo leggermente accelerato:
Troviamo la coordinata x del vertice **V_x** :

$$V_x = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{2}{2 \cdot 1}\right)$$

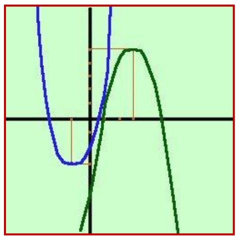
Adesso nell'equazione della parabola sostituiamo ad x il valore -1 e troviamo la y del vertice
$y = (-1)^2 + 2(-1) - 2 = 1-2-2 = -3$
Quindi abbiamo **V(1;-3)**
Essendo -2 il termine noto sappiamo inoltre che la parabola passa per il punto **(0;-2)**
Questo e' sufficiente per tracciare approssimativamente la parabola.

Io, con la mia lunga esperienza, ci riesco agevolmente, ma, se tu hai difficolta', ti conviene trovare prima altri punti sostituendo ad x altri valori tipo 1, 2, -2,.. e calcolando la y corrispondente

---

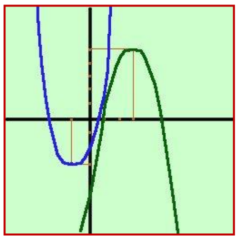
Disegniamo ora la seconda parabola di equazione:
$y= -x^2 + 6x - 4$
Troviamo la coordinata x del vertice **V_x** :

$$V_x = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{6}{-2 \cdot 1}\right)$$



Adesso nell'equazione della parabola sostituiamo ad x il valore 3 e troviamo la y del vertice
$y = -(3)^2 + 6(3) - 4 = -9+18-4 = 5$
Quindi abbiamo **V(3;5)**
Essendo -4 il termine noto sappiamo inoltre che la parabola passa per il punto **(0;-4).**
Tracciamo approssimativamente la parabola.
A destra i grafici.

Due parabole sono tangenti fra loro se hanno la stessa tangente nel punto comune, quindi prima trovo il punto comune, poi calcolo la tangente in questo punto per oguna delle due parabole e controllo che siano identiche
Faccio il sistema fra le due parabole:



$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = -x^2 + 6x - 4 \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y dalla prima equazione nella seconda ed ottengo:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ x^2 + 2x - 2 = -x^2 + 6x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - - - - \\ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

Divido tutti i termini per 2:

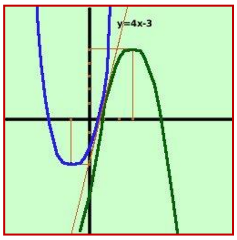
$$\begin{cases} - - - - - - - - - - \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (1)^2 + 2(1) - 2 \\ x = 1 \text{ (soluzione doppia)} \end{cases}$$

$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ (soluzione doppia)
Quindi abbiamo il punto comune **A(1;1).**
Calcoliamo adesso le tangenti alle parabole nel punto **A:**

- tangente in **A** alla prima parabola $y=x^2+2x-2$
  fascio di rette in **A**: $y-1 = m(x-1)$
  $y = mx - m + 1$ faccio il sistema poi metto il delta uguale a zero:
  $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = mx - m + 1 \end{cases}$
  Sostituisco:
  $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ x^2 + 2x - 2 = mx - m + 1 \end{cases}$
  $\begin{cases} ---------------- \\ x^2 + (2-m)x - 3 + m = 0 \end{cases}$
  Pongo il delta dell'equazione uguale a zero:
  $\Delta = b^2-4ac = 0$
  Ho:
  $a = 1 \quad b = 2-m \quad c = -3+m$
  $\Delta = b^2-4ac = (2-m)^2 - 4(1)(-3+m) = 0$
  $4 - 4m + m^2 + 12 - 4m = 0$
  $m^2 - 8m + 16 = 0$
  $(m-4)^2 = 0$
  $m = 4$
  Quindi abbiamo la tangente:
  $y - 1 = 4(x-1)$
  $y = 4x - 3$
- tangente in **A** alla seconda parabola $y= -x^2 + 6x - 4$
  fascio di rette in **A**: $y-1 = m(x-1)$
  $y = mx - m + 1$ faccio il sistema poi metto il delta uguale a zero:
  $\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 4 \\ y = mx - m + 1 \end{cases}$
  Sostituisco:
  $\begin{cases} mx - m + 1 = -x^2 + 6x - 4 \\ y = mx - m + 1 \end{cases}$
  $\begin{cases} x^2 + (m-6)x + 5 - m = 0 \\ ---------------- \end{cases}$
  Pongo il delta dell'equazione uguale a zero:
  $\Delta = b^2-4ac = 0$
  Ho:
  $a = 1 \quad b = m-6 \quad c = 5-m$
  $\Delta = b^2-4ac = (m-6)^2 - 4(1)(5-m) = 0$
  $m^2 - 12m + 36 - 20 + 4m = 0$
  $m^2 - 8m + 16 = 0$
  $(m-4)^2 = 0$
  $m = 4$
  Quindi, anche qui abbiamo la tangente:
  $y - 1 = 4(x-1)$
  $y = 4x - 3$



Essendo le tangenti identiche le due parabole sono tangenti fra loro, come volevamo

---

Esercizi con parametro sulla parabola

Sono parecchio utilizzati perche' uniscono ad una necessaria conoscenza grafica anche un tipo di ragionamento analitico per la risoluzione

---

Esercizio 1

Data la parabola $y= - x^2 + 6x - 5$, indicate con A e B le intersezioni fra la retta $y = k$ e la parabola ed indicate con A' e B' le proiezioni di A e B sull'asse delle x, determinare il valore di k perche' il perimetro del rettangolo

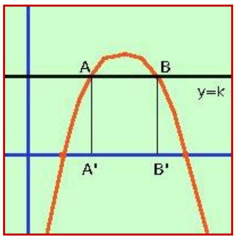
AA'B'B abbia valore 10 unita' del piano. Soluzione:

Il metodo generale per risolvere questi problemi e' quello di procedere come se al posto del parametro ci fosse un numero qualunque; una volta trovato il dato che viene posto come condizione si uguaglia tale dato con quello fornito dal problema; si ottiene un'equazione che, risolta, ci da' il valore del parametro cercato a destra la rappresentazione grafica che in questi casi e' molto utile. Rappresentazione grafica della parabola

---

In questo caso il dato e' il perimetro del rettangolo AA'B'B.
Per trovare il perimetro devo trovare le misure dei lati, quindi devo trovare le coordinate delle intersezioni fra la retta $y=k$ e la parabola $y=-x^2+6x-5$.
Faccio il sistema fra la retta e la parabola:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = k \end{cases}$$



$$\begin{cases} k = -x^2 + 6x - 5 \\ y = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 + k = 0 \\ ---------- \end{cases}$$

Risolvo l'equazione di secondo grado ed ottengo:

$x = 3 + \sqrt{(4-k)}$ $\qquad$ $x = 3 - \sqrt{(4-k)}$

Da notare che per la realta' della radice il valore di k deve essere minore di 4 come vedi anche dalla figura: per valori maggiori di 4 la retta passa sopra la parabola senza tagliarla.

Quindi avremo, ricordando che A' e B'hanno la stessa x di A e B e che A si trova piu' a sinistra e quindi vi assoceremo il valore con il meno davanti alla radice:

$A = \left(3 - \sqrt{(4-k)};\ k\right)$ $\qquad$ $B = \left(3 + \sqrt{(4-k)};\ k\right)$

$A' = \left(3 - \sqrt{(4-k)};\ 0\right)$ $\qquad$ $B' = \left(3 + \sqrt{(4-k)};\ 0\right)$

Quindi avremo (per la misura dei segmenti, essendo orizzontali o verticali, basta fare la differenza fra le coordinate omonime di valore diverso):

$AA' = k - 0 = k$

$A'B' = 3 + \sqrt{(4-k)} - \left[3 - \sqrt{(4-k)}\right] = 3 + \sqrt{(4-k)} - 3 + \sqrt{(4-k)} = 2\sqrt{(4-k)}$

Di conseguenza il perimetro del rettangolo AA'BB' sara':

$2A'A + 2A'B' = 2k + 4\sqrt{(4-k)}$

Ora devo uguagliare i valori del perimetro trovato con i valori dati:

$2k + 4\sqrt{(4-k)} = 10$

Per renderla piu' semplice divido tutti i termini per 2

$k + 2\sqrt{(4-k)} = 5$

E' un'equazione irrazionale, devo isolare la radice ed elevare al quadrato:

$2\sqrt{(4-k)} = 5 - k$

$4\sqrt{(4-k)^2} = (5-k)^2$

$4(4-k) = 25 - 10k + k^2$

$16 - 4k = k^2 - 10k + 25$

$k^2 - 10k + 25 + 4k - 16 = 0$

$k^2 - 6k + 9 = 0$

Risolvo ed ottengo:

$x = 3$ soluzione doppia. Ecco calcoli e una nota:

$x^2 - 6x + 9 = 0$

Applico la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(9)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = 3$$

quindi

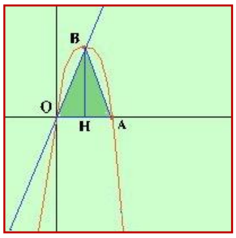
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$

Da notare che il polinomio associato all'equazione e' un quadrato perfetto, quindi possiamo anche risolvere cosi'
$k^2 - 6k + 9 = 0$
$(k - 3)^2 = 0$
Un quadrato e' zero se il termine dentro parentesi e' zero
$k - 3 = 0$
$k = 3$

Devo vedere se la soluzione e' accettabile; sostituisco il valore 3 all'equazione di partenza:
$3 + 2\sqrt{(4-3)} = 5$
$3 + 2 = 5$
$5=5$ la soluzione x=3 e'accettabile.
Quindi avremo che il rettangolo ha perimetro 10 quando il valore di k e' 3

Esercizio 2. - Data la parabola $y= - x^2 + 6x$ indicate con O ed A le intersezioni fra la parabola e l'asse delle x, indicata poi con B l'ulteriore intersezione fra la retta $y = kx$ e la parabola determinare il valore di k perche' l'area del triangolo OAB abbia valore 15 unita' quadrate del piano. Soluzione:

Ripetendo quanto detto nell'esercizio precedente il metodo generale perrisolvere questi problemi e' quello di procedere come se al posto del parametro ci fosse un numero qualunque; una volta trovato il dato che viene posto come condizione si uguaglia tale dato con quello fornito dal problema; si ottiene un'equazione che, risolta, ci da' il valore del parametro cercato.
A destra la rappresentazione grafica che in questi casi e' molto utile.
Rappresentazione grafica della parabola



In questo caso il dato e' l'area del triangolo OAB.
Per trovare l'area devo trovare la misura della base e dell'altezza.
La base e' OA, A e' l'intersezione fra la parabola e l'asse x cioe':

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ho le soluzioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi:
A(6,0) e la base OA del triangolo OAB vale 6
Ora devo trovare le coordinate dell' intersezione B fra la retta $y=kx$ e la parabola $y= - x^2 + 6x$
L'altezza BH corrispondera' alla coordinata y di B.
Faccio il sistema fra la retta e la parabola:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x \\ y = kx \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx = -x^2 + 6x \\ y = kx \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + kx = 0 \\ - - - - - - - - - \end{cases}$$

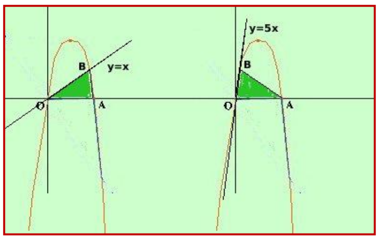
$$\begin{cases} x^2 - (k-6)x = 0 \\ - - - - - - - - - \end{cases}$$

E' un'equazione di secondo grado spuria ed ottengo:
$x = 0$
$x = 6-k$
Quindi avro' le soluzioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \cdot 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6 - k \\ y = k(6-k) = 6k - x^2 \end{cases}$$

La prima corrisponde all'origine O(0,0)
La seconda corrisponde al punto $B(6-k, 6k - k^2)$
Quindi l'altezza del triangolo vale $6k - k^2$

AREA = 0A ·BH / 2 = 6(6k - k^2) / 2 = 3(6k - k^2) = 18k - 3k^2
AREA = 15
Quindi dobbiamo risolvere:
-3k^2 + 18k = 15
Cambio di segno:
3k^2 - 18k = -15
3k^2 - 18k + 15 = 0
divido tutto per 3
k^2 - 6k + 5 = 0
Risolvo ed ottengo:
x = 1 x = 5
Avremo quindi due possibilita', entrambe con il punto B nel primo quadrante e la retta potra' essere la bisettrice del primo quadrante (y=x) oppure una retta con crescita molto piu' marcata (y=5x), in modo che i triangoli siano tra loro simmetrici rispetto all'asse della parabola.



Geometricamente sarebbe possibile avere altre due soluzioni, con la retta che passa nel secondo e nel quarto quadrante, ma, in tal caso, il triangolo avrebbe area negativa (assurdo) perche' l'altezza del triangolo sarebbe un numero negativo essendo il vertice una volta nel terzo ed una volta nel quarto quadrante.
Se, per esercizio, vuoi generalizzare il problema, avrai bisogno di utilizzare il concetto di modulo : otterrai come equazione per l'area
-3k^2 + 18k = |15|

H. *Coniche degeneri*

I. *Problemi riassuntivi sulle coniche*

J. *La geometria cartesiana nello spazio*

K. *Cenni sugli spazi n-dimensionali*