# Geometria del piano euclideo

## A. *Introduzione*

La Geometria e' la prima di tutte le matematiche: studiata gia' dagli assiro-babilonesi e dagli egizi, deve la sua forma attuale ad un greco EUCLIDE e in Grecia dara' il meglio di se' stessa divenendo da scienza sacerdotale ed esclusiva, scienza aperta a tutti e contribuendo a formare ed esplicitare quei ragionamenti che poi troveranno le loro applicazioni nella filosofia come studio sia della natura che del pensiero.
In questa parte del corso ci occuperemo di Geometria Euclidea presentata nel modo classico.

## B. *Concetti iniziali*

Fissiamo le cose iniziali che tutti dobbiamo sapere per poter costruire la geometria:

- Gli enti fondamentali
- I postulati
- La dimostrazione geometrica

### 1. Enti fondamentali

Dobbiamo fissare gli oggetti che saranno i protagonisti della nostra rappresentazione geometrica:

- Il punto
- La retta
- Il piano

Fissare e non definire, infatti essi saranno gli indefinibili della geometria, nel senso che il mio concetto di punto deve essere uguale al tuo, pero' non posso definire il concetto di punto (concetto primitivo).

---

Se ci pensi un po' non e' possibile definire il concetto di punto, infatti se disegni un puntino e lo guardi al microscopio cosa succede? Se pensi ad uno spazio inferiore al diametro di un atomo puoi ancora pensare il concetto di punto come qualcosa di ancora piu' piccolo?

### 2. Postulati

I postulati sono delle regole iniziali cui tutti gli oggetti geometrici debbono obbedire: Euclide li mise alla base della geometria per la loro intuitivita'.
Possiamo dividerli in 5 gruppi:

- Postulati dell'esistenza
- Postulati dell'appartenenza
- Postulati dell'uguaglianza
- Postulati dell'ordine
- Postulato delle parallele

I postulati sono l'unica cosa che in geometria bisogna studiare a memoria: tutto il resto sara' ricavato mediante il ragionamento.

---

Per ora ci limiteremo ai postulati per il piano; tratteremo i postulati per lo spazio quando parleremo di geometria dello spazio.

---

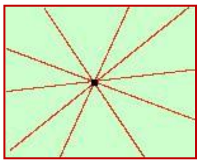
***Postulati dell'esistenza***

Definiscono l'esistenza degli enti geometrici:

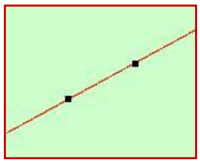
- Esistono infiniti punti
- Esistono infinite rette

***Postulati dell'appartenenza***

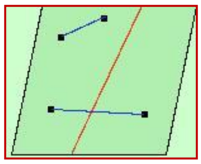
Definiscono i legami fra gli enti geometrici:



- Per un punto passano infinite rette



- Per due punti distinti passa una sola retta



- Dato un piano ed una retta, la retta divide il piano in due semipiani in modo tale che se prendiamo due punti nello stesso semipiano il segmento che li unisce non taglia la retta, mentre se prendiamo i due punti in semipiani opposti il segmento che li unisce taglia la retta.

***Postulati dell'uguaglianza***

Bisogna distinguere fra uguaglianza e congruenza: due cose sono uguali se sono la stessa cosa, cioe' se occupano lo stesso spazio nello stesso tempo.
Diremo invece che due cose sono congruenti se sono uguali ma occupano spazi diversi nello stesso tempo.

---

Quando ero alunno io non si distingueva fra uguaglianza e congruenza ma si diceva solamente uguaglianza senza distinguere fra i due concetti.
Per indicare uguaglianza e congruenza useremo indifferentemente il simbolo $=$

---

- (***Definizione di congruenza***)
  Due figure si dicono congruenti quando con un movimento rigido e' possibile sovrapporle in modo che coincidano punto per punto (*Movimento e' lo spostamento di un oggetto. Un movimento e'* ***rigido*** *quando le distanze fra i vari punti dell'oggetto che si sposta restano invariate: cioe' la figura non deve essere storta o, comunque, deformata*).

---

- (***Proprieta' riflessiva***)
  Ogni figura e' uguale a se' stessa:
  $$A = A$$

---

- (***Proprieta' simmetrica***)
  Se la figura A e' congruente alla figura B allora anche la figura B e' congruente alla figura A:
  $$A = B \quad \Leftrightarrow \quad B = A$$

La proprieta' simmetrica dice che posso leggere un'uguaglianza sia da destra a sinistra che da sinistra a destra.
Questa proprieta' sara' utilissima nelle equazioni:
se devi risolvere l'equazione
$6 = x$
leggendo a rovescio avrai subito
$x = 6$
senza spostare cambiando di segno e poi ricambiare di segno.

---

- (*Proprieta' transitiva*)
Se la figura A e' congruente alla figura B e la figura B e' congruente alla figura C, allora anche la figura A e' congruente alla figura C:
$A = B$ e $B = C \Leftrightarrow A = C$ che si legge:
*A congruente a B e B congruente a C implica A congruente a C*

---

Ora possiamo dire:

**Tutti i punti sono fra loro congruenti**
**Tutte le rette sono fra loro congruenti**

cioe' con un movimento rigido posso spostare un punto su un qualunque altro punto ed una retta su una qualunque altra retta in modo che coincidano.

***Postulati dell'ordine***
Danno il concetto di ordine sulla retta e nel piano:
- Data una retta e su di essa due punti distinti si puo' scegliere sulla retta un verso per cui il primo punto preceda il secondo ed il secondo segua il primo.
- Data una retta e su di essa due punti distinti esiste sempre un terzo punto che si trovi compreso fra il primo ed il secondo (in pratica significa che i punti su qualunque segmento di retta sono infiniti).

***Postulato delle parallele***
Su un piano data una retta ed un punto fuori di essa, dal punto e' possibile tracciare solamente una parallela alla retta data.

---

Questo postulato, tra l'altro il meno intuitivo fra tutti i postulati, e' quello che ha permesso di capire che i postulati sono regole iniziali, e, come tutte le regole iniziali, se vengono cambiati permetteranno di ottenere geometrie di tipo diverso da quella euclidea ma perfettamente logiche e portatrici di risultati: pensa che una di queste geometrie e' la geometria di Riemann base della teoria della relativita'.
Alcuni esempi di geometrie non Euclidee verranno dati nel capitolo in cui studieremo il parallelismo.

# 3. La dimostrazione

---

**Nota importante:**
Spesso ho incontrato alunni che dicono: **"ma e' evidente, perche' devo dimostrarlo?"**
Purtroppo quella macchina meravigliosa che e' il nostro cervello talvolta ci porta a conclusioni sbagliate , quindi serve un metodo per metterci al riparo da errori di cui non potremmo renderci conto: il metodo geometrico.
Se io prendo un triangolo rettangolo ed un triangolo con l'angolo che differisca per un millesimo di grado tu non sei in grado di distinguere quale dei due sia rettangolo, ma in uno sara' valido il teorema di Pitagora, nell'altro no; da qui la necessita' di dimostrare tutto, anche le cose che ci sembrano piu' ovvie.

---

Ci mancano le regole"operative" cioe' quelle che ci permetteranno di passare da alcune conoscenze (ipotesi) ad altre conoscenze che derivano dalle prime (tesi). Il tutto sara' la dimostrazione.

La dimostrazione potra' effettuarsi mediante :

- il teorema: insieme di ragionamenti piu' o meno complicati
- il criterio: scorciatoia per dimostrare qualcosa
- il lemma: conseguenza immediata derivata da un teorema

Il teorema potra' essere:

- *diretto* : con un ragionamento parto dall'ipotesi ed arrivo alla tesi.
- *per assurdo* : si nega la tesi e, se da questo si riesce a negare anche l'ipotesi, il teorema sara' vero.

---

Se il ragionamento non ti convince troppo ti consoli il fatto che anche per parecchi matematici del passato il ragionamento non era valido perche' richiama il principio del "terzium non datur", cioe' o una cosa e' vera oppure e' falsa e non ci sono alternative: se da premesse vere si hanno conseguenze vere il ragionamento e' valido equivale a se da conseguenze false si hanno premesse false il ragionamento e' valido .
Oggi tutti i matematici sono d'accordo sulla bonta' del metodo e potrai vedere nella logica (quando sara' scritta) il fondamento della dimostrazione per assurdo.

## 4. Sul concetto di geometria (*le "geometrie" e i giochi di carte*)

Per quanto ti possa sembrare stano una delle cose piu' simili alla geometria che esista nel mondo reale e' una partita a carte: Le regole iniziali sono i postulati che anche qui puoi suddividere in:

- esistenza
- appartenenza
- uguaglianza
- ordine

E qui puoi vedere come funzionano i postulati.
Se dico:
esistono 40 oggetti, 10 carte di bastoni, ..... avro' le carte per una partita di briscola, tresette, scopa, ..... .
mentre se dico:
esistono 56 oggetti, 13 carte di quadri,..... avro' le carte per una partita di ramino, scala quaranta,.....
se gli oggetti sono solo 32...... avro' le carte per il poker.
Variando i postulati dell'uguaglianza e dell'ordine (il tre prende i tre oppure le carte la cui somma e' tre oppure il tre prende l'asso se il seme e' uguale o se il seme corrisponde alla carta scoperta) sceglierò' se giocare a scopa o a tresette.
In pratica i postulati ti obbligano a giocare in un modo piuttosto che in un altro, ma i giochi che fai sono tutti **ugualmente validi**, sta a te scegliere poi quello che ti piace di piu'.
Similmente, variando i postulati iniziali **tutte le geometrie che potremo ottenere saranno ugualmente valide**, saremo poi noi a scegliere quelle che meglio si adattano al mondo reale (in modo da poterlo filtrare tramite il nostro ragionamento per meglio adattarlo alle nostre esigenze).

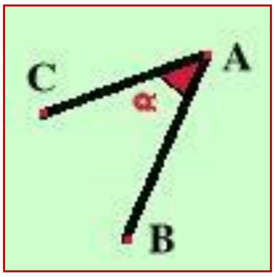
---

Per esercizio prova a scrivere i postulati per un gioco che conosci.

# C. *Geometria del piano (introduzione)*

Sviluppiamo ora la geometria euclidea (cioe' la geometria che si sviluppa dai postulati di Euclide) nel piano considerando come piano lo schermo del computer (quindi devi immaginare che lo schermo non abbia bordi ma si estenda all'infinito).

# 1. Convenzioni iniziali




Indicheremo i punti con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino:

A, B, C, D, ...

Indicheremo le rette con le lettere minuscole dell'alfabeto latino:

a, b, c, d, ...

indicheremo gli angoli o con le lettere minuscole dell'alfabeto greco:

α, β, γ, δ,...

oppure indicando i punti dei segmenti che delimitano l'angolo:

$B\hat{A}C$ indichera' l'angolo in A

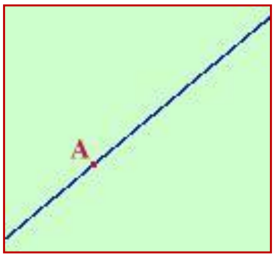
# 2. Segmenti ed angoli

Dobbiamo costruire tutto quanto solamente con il nostro ragionamento partendo dagli enti fondamentali e dai postulati, utilizzando, se necessario le regole operative (dimostrazioni).

Tratteremo:

- Segmenti
- Angoli
- Teorema sugli angoli opposti al vertice

## a) Segmenti

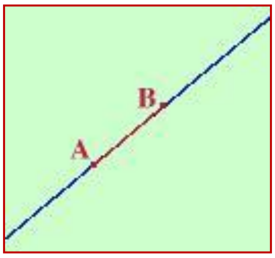



Considero una retta sul piano; sulla retta posso considerare un punto A; ottengo che la retta viene divisa in due parti che chiamero' semirette di origine A (Definizione: semiretta e' la parte di retta delimitata da un suo punto)

---

Per ogni cosa nuova che trovo, devo prima di tutto controllare la congruenza:
posso aggiungere ai postulati che tutte le semirette sono tra loro congruenti.

---




Adesso aggiungiamo sulla retta un altro punto B diverso da A: allora otteniamo una semiretta di origine A, una semiretta di origine B ed un qualcosa compreso tra A e B che chiameremo segmento: per darne la definizione basta dire come l'ho trovato:

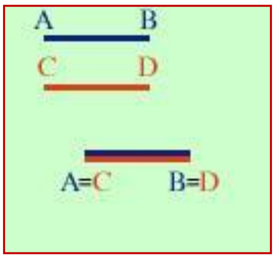
Definizione: Il segmento e' la parte di retta delimitata da due suoi punti.

---

Per tutti gli enti geometrici che troveremo dovremo parlare di congruenza, diseguaglianze e delle operazioni che su questi enti posso applicare: sui segmenti dovro' considerare:

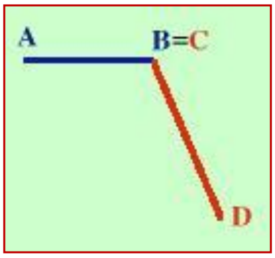
- congruenza
- somma
- differenza

## (1) Congruenza di segmenti




Secondo il postulato della congruenza diremo che due segmenti sono congruenti se, con un movimento rigido, e' possibile sovrapporli in modo che coincidano punto per punto.

## (2) Somma

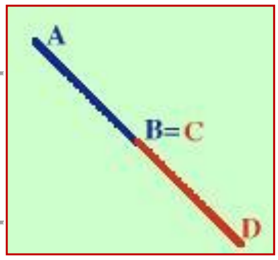



Intuitivamente, per sommare due segmenti bastera' metterli uno di seguito all'altro; pero' potrei metterli come vedi a destra oppure come vedi a sinistra.

Quelli della figura di destra li chiameremo ***consecutivi.***

**Definizione**: due segmenti si dicono consecutivi quando hanno un estremo in comune.

---

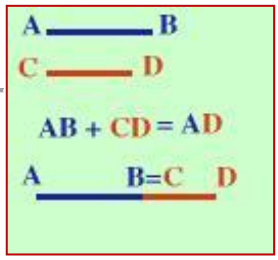



Quelli di sinistra invece, oltre ad avere un estremo in comune, giacciono sulla stessa retta e li chiameremo ***adiacenti*** .

---

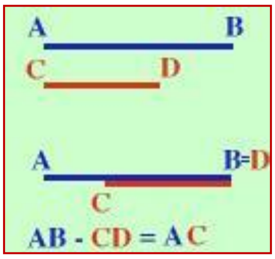
**Definizione**: due segmenti si dicono adiacenti quando oltre ad essere consecutivi giacciono sulla stessa retta.

---




Ora per fare la somma fra due segmenti bastera' metterli adiacenti e considerare il segmento totale.

## (3) Differenza

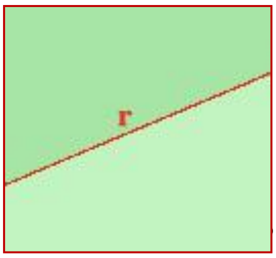



Per fare la differenza fra segmenti li sovrapporremo e toglieremo la parte comune.

## (4) Conclusioni

Sui segmenti non si puo' dire molto di piu', se sulla retta invece di 2 punti ne prendo 3, 4, 5 ... cambia solo il numero di segmenti che considero, ma non ottengo niente di nuovo.
Allora e' ora di prendere qualcosa d'altro su cui costruire, e quindi prendiamo un piano.

# b) Angoli



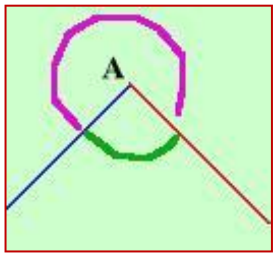

Considero una retta r su un piano: il piano viene diviso in due parti che chiamero' semipiani di origine la retta r, quindi il semipiano è una delle due parti in cui il piano viene diviso da una qualunque retta

---

Per ogni cosa nuova che trovo devo prima di tutto controllare la congruenza:
posso aggiungere ai postulati che tutti i semipiani sono tra loro congruenti

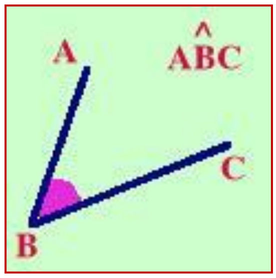
Considero due rette sul piano; ottengo troppe cose: ad ogni colore corrisponde una figura e ne ho segnate solo alcune.
Allora considero due semirette aventi la stessa origine: ottengo che il piano viene diviso in due parti che chiamero' angoli.
Per darne la definizione basta dire come l'ho trovato:

**Definizione:** L'angolo e' una delle due parti in cui il piano viene suddiviso da due semirette aventi la stessa origine



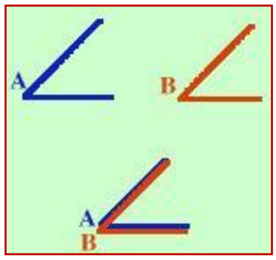

Per tutti gli enti geometrici che troveremo dovremo parlare di congruenza, diseguaglianze e delle operazioni che su questi enti posso applicare: sugli angoli dovro' considerare:

- congruenza
- somma
- differenza




Inoltre il concetto di angolo ci porta ad un nuovo concetto:
la convessita'.

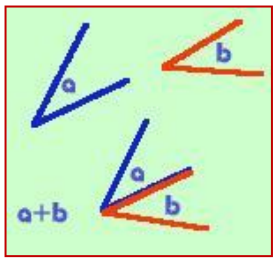
Per indicare un angolo scriveremo tre lettere: la prima posta su un lato, la seconda nel vertice dell'angolo e la terza sull'altro lato, mettendo il simbolo di angolo sopra la lettera al centro e preferibilmente cercheremo di seguire un verso antiorario nella lettura delle lettere.




## (1) Congruenza

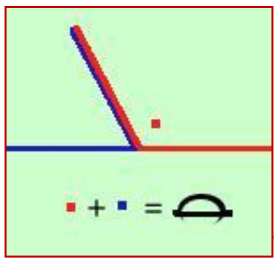
Secondo il postulato della congruenza diremo che due angoli sono congruenti se, con un movimento rigido, e' possibile sovrapporli in modo che coincidano punto per punto.

## (2) Somma




Intuitivamente, per sommare due angoli bastera' metterli uno di seguito all'altro; Angoli messi in tal modo li chiameremo consecutivi (analogamente alla definizione di consecutivi data ai segmenti).

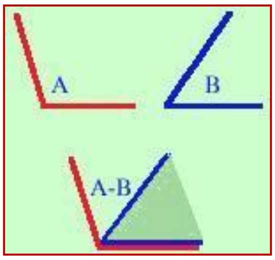
**Definizione**: due angoli si dicono consecutivi quando hanno un lato in comune



Quando oltre ad avere un lato in comune la loro somma e' un semipiano li chiameremo adiacenti.

**Definizione:** due angoli si dicono adiacenti quando oltre ad essere consecutivi hanno come somma un semipiano

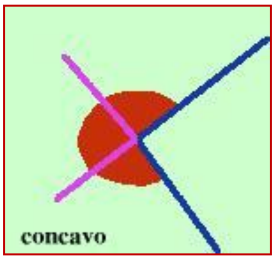
### (3) Differenza



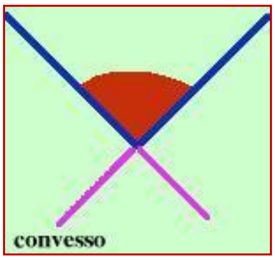

Per fare la differenza fra angoli li sovrapporremo e toglieremo la parte comune.

## 3. Convessita'

La nozione di angolo ci permette di introdurre un nuovo concetto: il concetto di convessita'. Se consideriamo un angolo e consideriamo il prolungamento dei suoi lati (in viola) abbiamo due possibilita:




- l'angolo non contiene il prolungamento dei suoi lati (a sinistra)



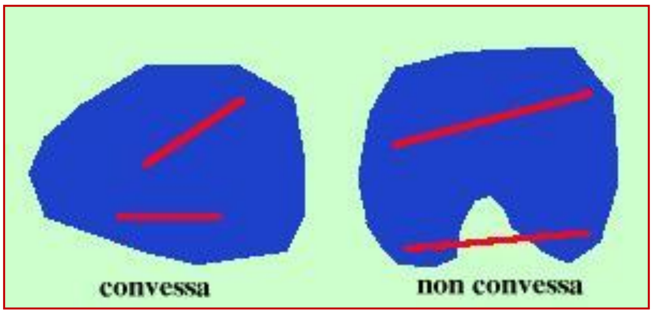

- l'angolo contiene il prolungamento dei suoi lati (a destra)

Nel primo caso chiameremo l'angolo ***convesso*** e nel secondo lo chiameremo ***concavo.***

---

Cerchiamo di estendere la nozione non limitandola al concetto di angolo nel seguente modo:

Una figura si dice ***convessa*** se contiene ogni segmento di cui contenga gli estremi
in caso contrario la figura si dice ***non convessa***

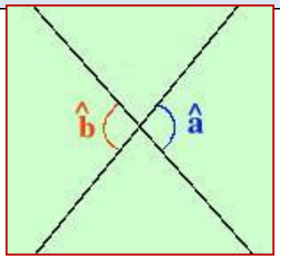



---

Presi comunque due punti nella prima figura il segmento che li unisce e' sempre tutto contenuto
Nella seconda figura, invece, posso trovare almeno due punti tali che il segmento esce dalla figura, allora tale figura la chiameremo non convessa.

## 4. Teorema sugli angoli opposti al vertice

Due angoli si dicono opposti al vertice se i lati dell'uno sono sui prolungamneti dei lati dell'altro.

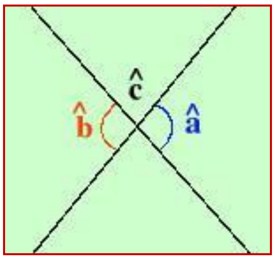



In figura gli angoli opposti al vertice sono l'angolo a e l'angolo b
Vediamo ora di dimostrare il primo teorema:
Due angoli opposti al vertice sono uguali
Quando si ha un teorema conviene sempre mettere l'enunciato nella forma se... allora...
Se due angoli sono opposti al vertice, allora i due angoli sono uguali .
Dopo il se c'e' l'ipotesi, cioe' quello che sappiamo; dopo l'allora c'e' la tesi, cioe' quello che dobbiamo dimostrare.
Ogni volta che dobbiamo dimostrare un teorema conviene costruire una figura e scrivere in modo geometrico l'ipotesi e la tesi.

---

Talvolta invece di Ipotesi si scrive Hp (Hypothesis) ed invece di tesi si scrive Th (thesis) perche' fino al 1900 la lingua ufficiale della scienza e quindi della matematica era il latino prima che prendesse il sopravvento la lingua inglese.

---




**Ipotesi:**
$\hat{a}$ e $\hat{b}$ opposti al vertice
**Tesi:**
$\hat{a} = \hat{b}$
D'ora in poi tolgo il segno di angolo per poter scrivere in modo piu' compatto, quindi indichero' l'angolo a semplicemente con a senza il simbolo sopra.
So che a e b sono opposti al vertice. Se sommo l'angolo a con l'angolo c ottengo un angolo piatto:

$$a + c = \text{angolo piatto}$$

Anche se sommo l'angolo b con l'angolo c ottengo un angolo piatto:

$$b + c = \text{angolo piatto}$$

So che gli angoli piatti (semipiani) sono tutti uguali fra loro; quindi per uno dei postulati sull'uguaglianza (proprieta' transitiva) posso scrivere:

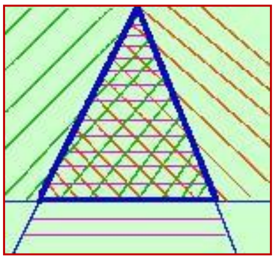
$$a + c = b + c$$

Se da due cose uguali tolgo la stessa cosa, ottengo ancora cose uguali, allora tolgo prima e dopo l'uguale la c ed ottengo

$$a = b$$

Come volevamo dimostrare.

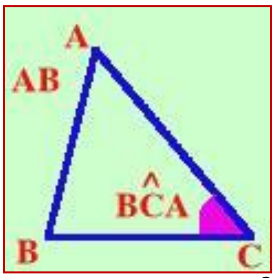
# D. *Triangoli*



Ora passiamo a costruire qualcosa di piu' "corposo", prendendo una parte di piano e precisamente la parte di piano comune a tre angoli aventi due a due un lato in comune , oppure, se preferisci, la parte di piano limitata da 3 segmenti due a due consecutivi.
***Definizione:*** *Un triangolo e' la parte di piano comune a tre angoli aventi due a due un lato in comune.*
Come per tutti i nuovi enti matematici dovremo veder come si comportano i triangoli rispetto al concetto di congruenza:

- Congruenza fra triangoli
- Disuguaglianze fra elementi di un triangolo

---




In un triangolo chiameremo angolo opposto ad un lato l'angolo che sta di fronte al lato. Esempio di fronte al lato AB sta l'angolo BCA.

# 1. Congruenza fra triangoli

Per definire la congruenza fra due triangoli ci rifacciamo alla definizione di congruenza trovata nei postulati.

***Definizione:*** Due triangoli sono congruenti se e' possibile sovrapporli con un movimento rigido in modo che coincidano punto per punto

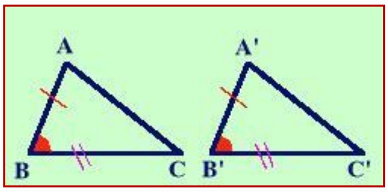
Per capire la logica di quello che segue dobbiamo rifarci al popolo che organizzo' la geometria: come studiavano geometria i Greci?
La carta non esisteva e la pergamena ed il papiro erano troppo cari per sprecarli, quindi i greci si accontentavano di tracciare le figure sulla cenere del focolare, oppure, se erano ricchi avevano una stanza col pavimento di sabbia su cui tracciare le figure con un ramoscello. Oggi noi con il criterio di congruenza potremmo spostare un triangolo fatto su un foglio di carta su un altro triangolo fatto su un foglio diverso, ma i greci non potevano certo spostare la cenere oppure la sabbia. Da qui nasce l'esigenza di trovare un modo per vedere se due triangoli sono uguali: bastera' considerare la lunghezza dei lati spezzando un ramoscello alla giusta distanza, oppure l'ampiezza degli angoli tagliando la punta di una foglia con opportuna ampiezza e confrontando cosi' le due figure.
Ma c'e' bisogno di fare questo per tutti i lati e per tutti gli angoli oppure basta farlo solo per qualche lato e qualche angolo? La risposta giusta e' la seconda e le scorciatoie che ne derivano saranno chiamate criteri di congruenza dei triangoli.

Un criterio di congruenza dei triangoli e' una scorciatoia che ci permette di dire quando due triangoli sono uguali senza doverli sovrapporre:

- Primo criterio di congruenza dei triangoli
- Secondo criterio di congruenza dei triangoli
- Conseguenze del secondo criterio: il triangolo isoscele
- Terzo criterio di congruenza dei triangoli
- Applicazione dei criteri alle dimostrazioni: alcuni problemi

## a) Primo criterio di congruenza fra triangoli

**Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo compreso**.




Per la dimostrazione mettiamo il problema nella forma se... allora... (quello dopo il se e' l'ipotesi e quello dopo l'allora e' la tesi).

**Se due triangoli hanno congruenti due lati e l'angolo compreso allora i triangoli sono congruenti.**

Scriviamolo in modo geometrico: ipotesi, tesi e figura corrispondente.

Ipotesi : $AB = A'B'$ $\quad BC = B'C'$ $\quad A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$

Tesi: $ABC = A'B'C'$

***Dimostrazione:***
Trasporto l'angolo B sopra l'angolo B' (posso farlo perche' sono congruenti per ipotesi e potrei farlo in due modi diversi: o facendo scivolare l'angolo o ribaltandolo; devo dire che lo porto sopra senza ribaltarlo) in modo che il lato AB vada sopra il lato A'B' ed il lato BC vada sopra B'C'; in questo modo i due triangoli hanno A su A', B su B' e C su C' quindi sono sovrapposti e coincidono punto per punto C.V.D. (Come Volevamo Dimostrare).

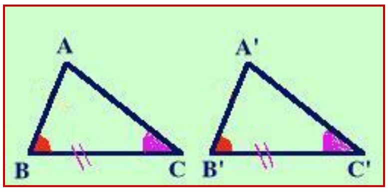
---

Quando ero studente io si era piu' esigenti e si diceva C.D.D. cioe' Come Dovevasi Dimostrare ed in qualche testo c'era addirittura Q.E.D. Quod Erat Demonstrandum che e' la stessa cosa in latino .

---

Da notare che per la dimostrazione parto dall'elemento in mezzo agli altri due.

## b) Secondo criterio di congruenza




**Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due angoli e il lato compreso.**
Per la dimostrazione mettiamo il problema nella forma se... allora... (quello dopo il se e' l'ipotesi e quello dopo l'allora e' la tesi).
**Se due triangoli hanno congruenti due angoli e il lato compreso allora i triangoli sono congruenti.**
Scriviamolo in modo geometrico: ipotesi, tesi e figura corrispondente

---

**Ipotesi:** $\mathbf{BC = B'C'}$ $\quad \mathbf{A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'}$ $\quad \mathbf{B\hat{C}A = B'\hat{C'}A'}$

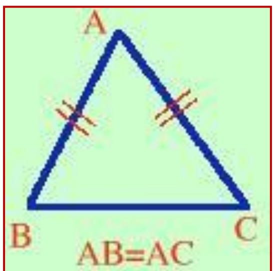
**Tesi:** $\mathbf{ABC = A'B'C'}$

***Dimostrazione:***
Trasporto il lato BC sopra il lato B'C' (posso farlo perche' sono congruenti per ipotesi e potrei farlo in due modi diversi: o traslando il lato o ruotandolo; devo dire che lo porto sopra senza ruotarlo) in modo che l'angolo ABC vada sopra l'angolo A'B'C' e l'angolo BCA vada sopra B'C'A'; in questo modo i due triangoli hanno AB su A'B', BC su B'C' e CA su C'A' quindi sono sovrapposti e coincidono punto per punto come volevamo dimostrare .

---

Da notare che per la dimostrazione parto dall'elemento in mezzo agli altri due.

## c) Applicazione dei criteri al triangolo isoscele

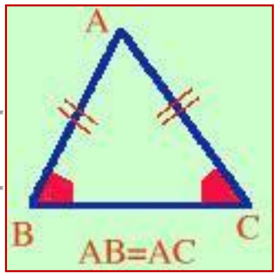



**Un triangolo si dice isoscele se ha due lati congruenti.**
Ora possiamo, con i criteri gia' dimostrati dimostrare un'importante proprieta' del triangolo isoscele.
**Se un triangolo ha due lati congruenti allora ha anche due angoli congruenti e viceversa.**

Quando in un teorema compare "e viceversa" significa che vale sia il teorema diretto che il teorema inverso ed i due fatti sono equivalenti: una volta dimostrato il teorema, il fatto che un triangolo abbia due angoli congruenti oppure abbia due lati congruenti sara' esattamente la stessa cosa.

## (1) Teorema diretto: Se un triangolo ha due lati uguali allora ha anche due angoli uguali

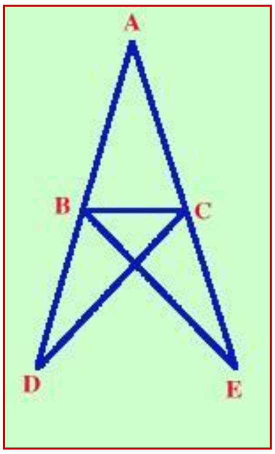
**Se un triangolo ha due lati congruenti allora ha congruenti anche gli angoli opposti ai lati congruenti.**



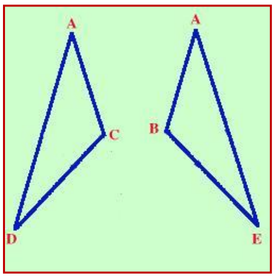

Scriviamolo in modo geometrico: ipotesi, tesi e figura corrispondente.

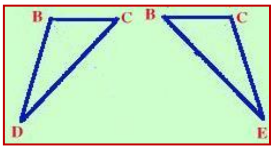
**Ipotesi:** $AB = AC$

**Tesi:** $A\hat{B}C = B\hat{C}A$




Dimostrazione: (Vedi Nota sulla dimostrazione)
Prolungo i lati AB ed AC oltre B e C di due segmenti congruenti BD e CE.
Ora considero i triangoli ADC ed ABE (per comodita' te li estraggo nella figura a fianco); essi hanno:
AB = AC per ipotesi
AD = AE perche' somma di segmenti uguali.
L'angolo in A uguale perche' in comune.
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio ed in particolare avranno congruenti l'altro lato e gli altri angoli:
DC=BE ACD=ABE ADC=AEB
Considero ora i triangoli BDC e BEC; essi hanno:
BD=CE per costruzione (li ho costruiti congruenti)
DC=BE perche' appena dimostrato
gli angoli BDC=BEC perche' appena dimostrato (corrispondono a ADC=AEB)
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza ed in particolare avranno:
gli angoli BCD e CBE congruenti.
Ora consideriamo gli angoli ABC ed ACB; essi sono congruenti perche' differenza degli angoli congruenti ACD e ABEcon gli angoli congruenti: BCD e CBE
ACD - BCD = ACB ABE - CBE = ABC
Come volevamo dimostrare.



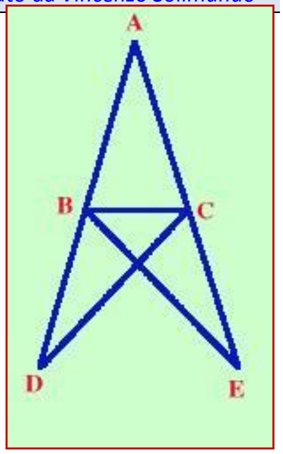




Da notare che per il teorema diretto e' sufficiente usare il primo criterio; infatti quando studiavo io veniva trattato subito dopo il primo criterio di congruenza; poi si e' preferito metterlo dopo il secondo criterio assieme al suo inverso in modo da formare quasi un unico teorema.

## (2) Teorema inverso: Se un triangolo ha due angoli uguali allora ha anche due lati uguali

**Se un triangolo ha due angoli congruenti allora ha congruenti anche i lati opposti agli angoli congruenti.**

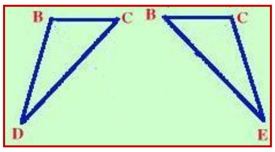
Scriviamolo in modo geometrico: ipotesi, tesi e figura corrispondente.



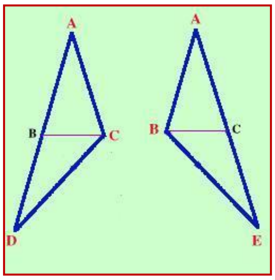

**Ipotesi:** $A\hat{B}C = B\hat{C}A$

**Tesi:** $AB = AC$

Dimostrazione:
Prolungo i lati AB ed AC oltre B e C di due segmenti congruenti BD e CE.
Ora considero i triangoli BDC ed BEC (per comodita' te li estraggo nella figura a fianco).




Essi hanno:
BD = CE per costruzione
BC = BC perche' in comune (Non nel senso di Municipio)
Gli angoli BCD e CBE congruenti perche' supplementari di angoli congruenti (sommati agli angoli di partenza uguali per ipotesi danno un angolo piatto).
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio ed in particolare avranno congruenti l'altro lato e gli altri angoli:
DC=BE BDC=BEC BCD=BCE
Considero ora i triangoli ADC e ABE; essi hanno:

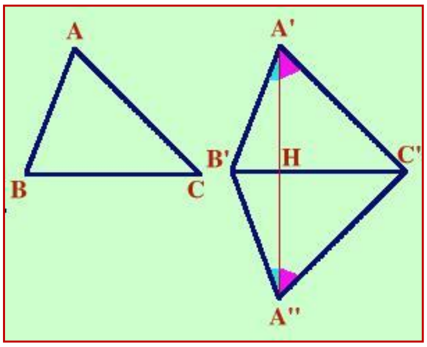



CD=BE perche' appena dimostrato
gli angoliADC=BEA perche' appena dimostrato (corrispondono a BDC=BEC)
gli angoliACD=ABE congruenti perche' somma di angoli congruenti.

Infatti ACD = ACB + BCD
ed anche ABE = ABC + CBE
i primi dopo l'uguale sono congruenti per ipotesi e gli altri sono congruenti perche' appena dimostrato.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza ed in particolare avranno i lati AB e AC congruenti come volevamo dimostrare.

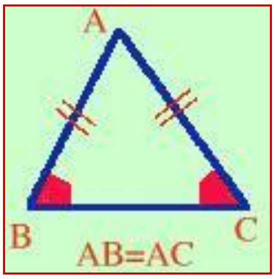
## d) Terzo criterio di congruenza




**Due triangoli sono congruenti se hanno tutti e tre i lati congruenti.**
Per la dimostrazione mettiamo il problema nella forma se... allora... (quello dopo il se e' l'ipotesi e quello dopo l'allora e' la tesi).
**Se due triangoli hanno congruenti i tre lati allora i triangoli sono congruenti.**
Scriviamolo in modo geometrico: ipotesi, tesi e figura corrispondente:

**Ipotesi:** $AB = A'B'$ $BC = B'C'$ $CA = C'A'$

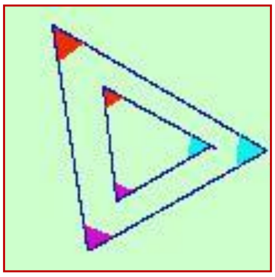
**Tesi: ABC = A'B'C'**




Dimostrazione:
Trasporto il triangolo ABC da banda opposta rispetto al triangolo A'B'C' in modo che il lato BC vada sopra il lato B'C'; allora il punto A va in A''.
Considero il triangolo A'B'A''; esso ha due lati uguali (A'B'=A''B'), quindi ha anche due angoli uguali cioe' B'A'H=B'A''H (quelli indicati in azzurro).
Considero ora il triangolo A'C'A''; esso ha due lati uguali (A'C'=A''C'), quindi ha anche due angoli uguali cioe' C'A'H=C'A''H (quelli indicati in viola).
Considero ora i triangoli A'B'C' ed A''B'C' essi hanno:
A'B' = A''B' per ipotesi (ho fatto fare un movimento rigido a due lati uguali per ipotesi)
A'C' = A''C' sempre per ipotesi (come sopra)
Gli angoli B'A'C'=B'A''C' sono uguali perche' somme di angoli uguali (quelli colorati).
Quindi i due triangoli sono uguali per il primo criterio come volevamo dimostrare.

---

Il terzo criterio fa riferimento a tre lati uguali. Potremmo dire che due triangoli sono uguali se hanno uguali tre elementi; pero' cio' non vale per i tre angoli: a destra puoi vedere un esempio che ti mostra due triangoli con i tre angoli uguali ma che non sono uguali.



---

In matematica per mostrare che una proprieta' non e' vera basta far vedere un esempio che mostri che non e' verificata.

## e) Applicazione dei criteri: alcuni problemi

Ora che conosciamo i criteri che uso ne possiamo fare? Questa domanda ci porta al metodo di soluzione dei problemi in geometria: corrisponde un po' a quello che ho mostrato in algebra pero' con alcune differenze.
Intanto c'e' da dire che i criteri mi permettono di risolvere la meta' dei problemi relativi alle dimostrazioni di geometria.

---

Risolvere un problema geometrico significa dimostrare che sono congruenti dei lati o degli angoli; quindi dovrai individuare dei triangoli che contengano quei lati o quegli angoli e dovrai dimostrare che sono congruenti per il primo, il secondo, il terzo criterio. Il metodo e' sempre quello: parto dalla tesi, individuo due triangoli che contengano gli elementi della tesi e vedo se posso applicare un criterio per dire che sono congruenti; se mi manca qualcosa considero altri due triangoli che contengano quel qualcosa e vedo se posso applicare un criterio (di solito non si va oltre due applicazioni ripetute) Quando ho trovato ribalto il ragionamento e scrivo cominciando dall'ultimo ed andando verso il primo ragionamento (dalle ipotesi vado verso la tesi) sempre col seguente schema:
considero i triangoli FGH LMN
essi hanno (scrivo quello che hanno di congruente e perche')

---

lato = lato perche' ...(ipotesi, costruzione, gia' dimostrato...)
lato = lato perche' ...(ipotesi, costruzione, gia' dimostrato...)
angolo = angolo perche' ...(ipotesi, costruzione, gia' dimostrato...)

---

Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo (o secondo o terzo) criterio ed in particolare avranno congruenti (quello che mi interessa o per continuare o perche' e' la tesi).

---

Vediamo alcuni esempi che chiariranno meglio il metodo.

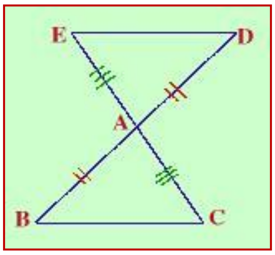
I. ***Esempio***

*Dato il triangolo ABC si prolunghino i lati AB ed AC oltre A di due segmenti AD=AB ed AE=AC. Dimostrare che sono congruenti i segmenti BC e DE*

---

Seguiremo sempre questo metodo:

- Leggiamo con calma il testo cercando di capire bene tutti i termini:
  Quando leggi un problema devi non solo capire la costruzione che devi fare ma anche sapere le proprieta' delle figure che sono coinvolte: se ad esempio si parla di rombo devi sapere quali sono le proprieta' del rombo (diagonali uguali e perpendicolari, lati uguali e paralleli due a due), quindi per fare i problemi devi studiare: ai miei alunni di solito consiglio di farsi una specie di specchietto elencando le figure e le relative proprieta'.
- Tracciamo una grande figura seguendo le indicazioni e segnando sulla figura stessa tutti gli elementi che sappiamo congruenti:
  Dato il triangolo ABC si prolunghino i lati AB ed AC oltre A di due segmenti AD=AB ed AE=AC. Dimostrare che sono congruenti i segmenti BC e DE.
  Prendo un triangolo ABC cercando di non "specializzarlo" cioe' di non farlo isoscele o rettangolo, ma di farlo scaleno.
  Devo prolungare il lato AB oltre A di un segmento AD=AB (metto due segnetti rossi per indicare che sono congruenti).
  Devo prolungare il lato AC oltre A di un segmento AE=AC (metto tre segnetti verdi per indicare che sono congruenti).
  Per avere DE congiungo D con E.




- Scriviamo l'ipotesi e la tesi:
  Dato il triangolo ABC si prolunghino i lati AB ed AC oltre A di due segmenti AD=AB ed AE=AC. Dimostrare che sono congruenti i segmenti BC e DE.
  Qui e' semplice perche' l'ipotesi e' fino al punto e la tesi e' dopo "dimostrare che", inoltre ho gia' segnato le cose congruenti in figura, quindi

**Ipotesi :** $AB = AD \qquad AC = AE$

**Tesi :** $BC = DE$

- Partiamo dalla tesi e risaliamo fino ai dati:
  La tesi e' DE=BC.
  Per dimostrare che sono congruenti considero due triangoli di cui facciano parte DE e BC e vedo se sono congruenti; considero i triangoli ABC ed ADE so che hanno due lati uguali; mi manca un altro lato oppure un angolo. Osservo che gli angoli in A dei due triangoli sono opposti al vertice (so che gli angoli opposti al vertice sono uguali), quindi ho due lati e l'angolo compreso congruenti (primo criterio).
- Scriviamo lo stesso procedimento a rovescio(partiamo dall'ipotesi ed arriviamo alla tesi):
  Ora facciamo il contrario del punto precedente: cioe' partiamo dalle conclusioni ed arriviamo alla tesi.
  Considero i triangoli ABC ed ADE, essi hanno:
  AB=AD per costruzione
  AC=AE per costruzione
  gli angoli BAC=DAE perche' angoli opposti al vertice.
  Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza ed in particolare saranno congruenti BC e DE.

---

Mettendo assieme quanto visto nei punti precedenti abbiamo

**Ipotesi:** $AB = AD \qquad AC = AE$

**Tesi :** $BC = DE$

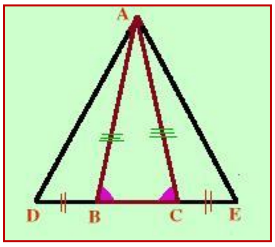
Considero i triangoli ABC ed ADE, essi hanno:
AB=AD per costruzione
AC=AE per costruzione
gli angoli BAC=DAE perche' angoli opposti al vertice
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza ed in particolare saranno congruenti BC e DE come volevamo dimostrare.

### *II. Esempio*

Dato il triangolo ABC, isoscele sulla base BC si prolunghi il lato BC oltre B e C di due segmenti congruenti BD=CE. Dimostrare che il triangolo ADE e' isoscele

---

Facciamo come nell'esercizio precedente (naturalmente lo faremo solo per i primi esercizi, poi, una volta diventati esperti, abbrevieremo):

- Leggiamo con calma il testo cercando di capire bene tutti i termini:
  Dato il triangolo ABC, isoscele sulla base BC si prolunghi il lato BC oltre B e C di due segmenti congruenti BD=CE. Dimostrare che il triangolo ADE e' isoscele.
  Si dice base di un triangolo isoscele il lato che non e' congruente agli altri.
  Vediamo le proprieta' delle figure che sono coinvolte: qui si parla di triangoli isosceli, quindi la proprieta' cui dobbiamo far riferimento e' che i triangoli isosceli hanno due lati e due angoli congruenti.
- Tracciamo una grande figura seguendo le indicazioni e segnando sulla figura stessa tutti gli elementi che sappiamo congruenti:
  Dato il triangolo ABC, isoscele sulla base BC si prolunghi il lato BC oltre B e C di due segmenti congruenti BD=CE. Dimostrare che il triangolo ADE e' isoscele.
  
  
  Prendo (in rosso scuro) un triangolo ABC isoscele sulla base BC cioe' con i lati AB ed AC congruenti.
  Quindi segno con 3 lineette verdi i lati AB ed AC per indicare che sono congruenti; inoltre segno in viola gli angoli ABC ed ACB per indicare che sono congruenti.
  Devo prolungare la base BC oltre B di un segmento BD e devo prolungare il lato BC oltre C di un segmento CE (li indico in nero) tale che sia congruente a BD(metto due segnetti rossi per indicare che sono congruenti).
  Per avere il triangolo ADE congiungo A con D e con E.
- Scriviamo l'ipotesi e la tesi:
  Dato il triangolo ABC, isoscele sulla base BC si prolunghi il lato BC oltre B e C di due segmenti congruenti BD=CE. Dimostrare che il triangolo ADE e' isoscele.
  L'ipotesi e' fino al punto e la tesi e' dopo "dimostrare che", ricordando che ho gia' segnato le cose congruenti in figura, ho:

  **Ipotesi:** $AB = AC \qquad BD = CE \qquad ABC = ACB$

  Per la tesi devo dimostrare che il triangolo ADE e' isoscele cioe' che ha due lati congruenti (in alternativa potrei anche dimostrare che ha due angoli congruenti):

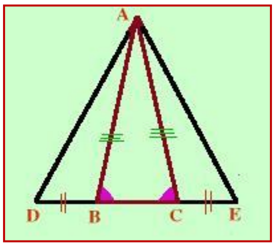
  **Tesi :** $AD = AE$

- Partiamo dalla tesi e risaliamo fino ai dati:
  La tesi e' che il triangolo ADE e' isoscele cioe' AD=AE
  per dimostrare che sono congruenti i due lati considero due triangoli di cui facciano parte AD ed AE e vedo se sono congruenti: considero i triangoli ABD ed ACE so che hanno gia' due lati congruenti, mi manca un altro

lato (e non lo posso considerare perche' e' la tesi) oppure un angolo.
Osservo che l'angolo DBA sommato a ABC mi da' un angolo piatto; anche l'angolo ECA sommato a ACB mi da' un angolo piatto e gli angoli piatti sono congruenti fra loro; allora diro' che DBA e' congruente a ECA perche' supplementari di angoli congruenti (cioe' sommati ad angoli congruenti valgono un angolo piatto
quindi ho due lati e l'angolo compreso congruenti e, i due triangoli sono congruenti (primo criterio).

- Scriviamo lo stesso procedimento a rovescio(partiamo dall'ipotesi ed arriviamo alla tesi)

Ora facciamo il ragionamento contrario del punto precedente: cioe' partiamo dalle ipotesi ed arriviamo alla tesi




Considero i triangoli ABD ed ACE, essi hanno:
AB=AC per ipotesi
BD=CE per costruzione
gli angoli DBA=ECA perche' angoli supplementari di angoli congruenti
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza ed in particolare saranno congruenti AD e AE
Il triangolo ADE, avendo due lati congruenti, e' isoscele come volevamo dimostrare

---

Mettendo assieme quanto visto nei punti precedenti abbiamo:

**Ipotesi: AB = AC BD = CE ABC = ACB**

**Tesi: AD = AE**

Considero i triangoli ABD ed ACE, essi hanno:
AB=AC per ipotesi
BD=CE per costruzione
gli angoli DBA=ECA perche' angoli supplementari di angoli congruenti.
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza ed in particolare saranno congruenti AD ed AE.
Il triangolo ADE, avendo due lati congruenti, e' isoscele come volevamo dimostrare.

III. ***Esempio***

Sui lati dell'angolo A si prendano due segmenti AB ed AC congruenti e, consecutivamente, altri due segmenti congruenti BD e CE. Si unisca B con E e C con D. Sia F il punto di intersezione: dimostrare che la retta AF e' la bisettrice dell'angolo A.

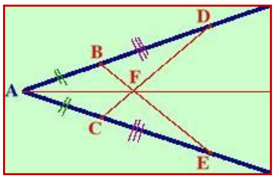
---

Facciamo come negli esercizi precedenti (naturalmente lo faremo solo per i primi esercizi, poi, una volta diventati esperti, abbrevieremo):

- Leggiamo con calma il testo cercando di capire bene tutti i termini:

Stavolta dobbiamo prendere un angolo, cioe' due semirette aventi la stessa origine. Per bisettrice si intende la retta che divide l'angolo in due parti congruenti (a meta')

- Tracciamo una grande figura seguendo le indicazioni e segnando sulla figura stessa tutti gli elementi che sappiamo congruenti:




Prendo (in blu scuro) un angolo A e su di esso i punti B e C ad uguale distanza da A (segno con 2 lineette verdi i segmenti AB ed AC per indicare che sono congruenti)
Considero poi i punti D ed E ad uguale distanza da B e C (segno con 3 lineette viola i segmenti BD e CE per indicare che sono congruenti)
Congiungendo B con D e C con E ottengo i segmenti BD e CE ed al loro incrocio individuo il punto F.
Traccio infine la semiretta di origine A e passante per F.

- Scriviamo l'ipotesi e la tesi:

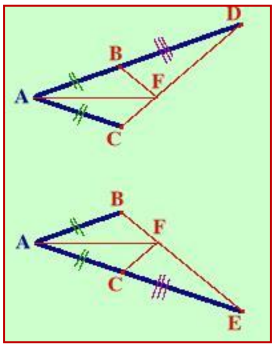
L'ipotesi e' fino ai due punti e la tesi e' dopo "dimostrare che", ricordando che ho gia' segnato le cose congruenti in figura, ho:

**Ipotesi: AB = AC BD = CE**

Per la tesi devo dimostrare che AF e' la bisettrice cioe' e' la retta che forma due angoli congruenti con i lati dell'angolo:

**Tesi:** $B\hat{A}F = F\hat{A}C$

- Partiamo dalla tesi e risaliamo fino ai dati:
La tesi e' che AF e' la bisettrice dell'angolo A quindi che gli angoli BAF e FAC sono congruenti.
Per dimostrare che sono congruenti i due angoli devo considerare due triangoli di cui facciano parte BAF e FAC e vedere se sono congruenti.
Considero i triangoli BAF e FAC so che hanno uguali AB ed AC per ipotesi ed inoltre hanno AF in comune, mi manca un altro lato (un angolo non va bene perche' devo dimostrare che e' congruente proprio l'angolo compreso), quindi devo considerare due altri triangoli.
Provo a considerare i triangoli DAF e EAC so che hanno congruenti AD ed AE (perche' somma di segmenti congruenti) ed inoltre hanno AF in comune, mi manca un altro lato (anche qui l'angolo non va bene per lo stesso motivo precedente), quindi devo considerare due altri triangoli (allora tanto vale procedere con i triangoli precedenti).
Riprendendo il primo punto devo dimostrare che sono congruenti i segmenti BF e CF quindi considero i triangoli BFD e CFE; di questi so che hanno congruenti BD e CE; devo dimostrare che sono congruenti gli angoli vicini a questi lati.
Passo a considerare i triangoli DAC e BAE perche' hanno come angoli gli angoli precedenti (te li estraggo in una figura a parte).
I triangoli DAC e BAE hanno l'angolo A in comune, poi AB congruente ad AC per ipotesi ed AD congruente ad AE perche' somma di segmenti congruenti; vale quindi il primo criterio.




- Scriviamo lo stesso procedimento a rovescio(partiamo dall'ipotesi ed arriviamo alla tesi):
Ora facciamo il ragionamento contrario del punto precedente: cioe' partiamo dalle ipotesi ed arriviamo alla tesi.
Considero i triangoli ADC ed ABE (te li ho estratti dalla figura completa), essi hanno:
AC = AB per ipotesi
AD = AE perche' somma di segmenti congruenti
L'angolo A in comune.
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza ed in particolare saranno congruenti gli angoli ADC = AEB e ABE = ACD.
Considero ora i triangoli BFD e CFE, essi hanno:
BD = CE per ipotesi
Gli angoli BDF = CEF perche' appena dimostrato Corrispondono agli angoli ADC ed AEB
Gli angoli FBD = FCE perche' supplementari degli angoli congruenti ABE = ACD come abbiamo appena dimostrato Supplementari vuol dire che con gli altri angoli formano un angolo piatto.
I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio ed in particolare hanno congruenti i lati BF = CF.
Considero infine i triangoli ABF e ACF, essi hanno:
AB = AC per ipotesi
Gli angoli AF congruente perche' in comune
BF = CF perche' appena dimostrato.
Quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio ed in particolare avranno congruenti gli angoli BAF = CAF cioe' AF
e' la bisettrice come volevamo dimostrare.

---

Mettendo assieme quanto visto nei punti precedenti abbiamo:
**Ipotesi:** **AB = AC** **BD = CE**

**Tesi:** $B\hat{A}F = F\hat{A}C$

Considero i triangoli ADC ed ABE (te li ho estratti dalla figura completa), essi hanno:
AC = AB per ipotesi
AD = AE perche' somma di segmenti congruenti

L'angolo A in comune
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza ed in particolare saranno congruenti gli angoli ADC = AEB e ABE = ACD
(Ripeto la figura per farti seguire meglio il ragionamento).
Considero ora i triangoli BFD e CFE, essi hanno:
BD = CE per ipotesi
Gli angoli BDF = CEF perche' appena dimostrato Corrispondono agli angoli ADC ed AEB
Gli angoli FBD = FCE perche' supplementari degli angoli congruenti ABE = ACD come abbiamo appena dimostrato Supplementari vuol dire che con gli altri angoli formano un angolo piatto.
I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio ed in particolare hanno congruenti i lati BF = CF.
Considero infine i triangoli ABF e ACF, essi hanno:
AB = AC per ipotesi
Gli angoli AF congruente perche' in comune
BF = CF perche' appena dimostrato.
Quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio ed in particolare avranno congruenti gli angoli BAF = CAF cioe' AF
e' la bisettrice come volevamo dimostrare.

---

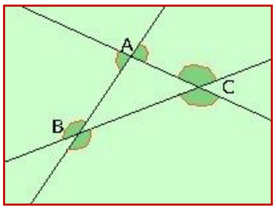
Naturalmente ancora, conoscendo solamente i tre criteri, le dimostrazioni sono semplici: diventeranno piu' complicate man mano che aggiungerai nuove figure geometriche e nuovi teoremi, ma il principio di base e' sempre lo stesso.

---

## 2. Disuguaglianze fra elementi di un triangolo

Abbiamo visto l'uguaglianza fra triangoli, il passo successivo sara' quello di vedere le disuguaglianze esistenti fra elementi di un triangolo; le disuguaglianze dipenderanno tutte dal primo teorema, il torema dell'angolo esterno che e' uno dei teoremi effettivamente fondamentali in geometria euclidea (e quindi da studiare in modo particolare).

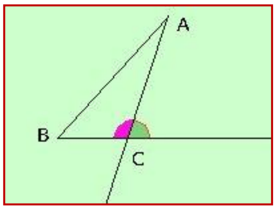
### a) Teorema dell'angolo esterno




Enunciato:
**In ogni triangolo un angolo esterno e' maggiore di ogni angolo interno non adiacente.**

---

Che cos'e' un angolo esterno
Un ***angolo esterno*** e' qualunque angolo compreso fra il lato di un triangolo ed il prolungamento di un'altro lato

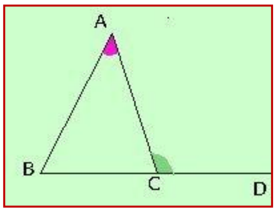



---

Quindi possiamo dire che un triangolo ha 6 angoli esterni, come puoi vedere dalla figura qui a lato.
Possiamo inoltre dire che gli angoli esterni sono due a due uguali perche' opposti al vertice.

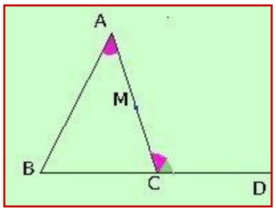
Fai attenzione: il teorema vale solo per l'angolo esterno **non** adiacente: a lato vedi un esempio di angolo esterno (in verde) che e' minore dell'angolo interno adiacente (in viola).

---

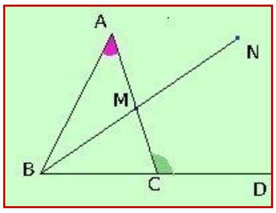



Consideriamo come angolo interno l'angolo $B\hat{A}C$ e come angolo esterno l'angolo $A\hat{C}D$:

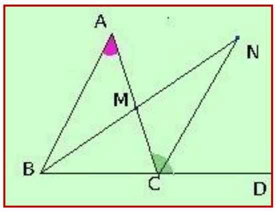
**Ipotesi: $A\hat{C}D$ esterno** **Tesi: $A\hat{C}D > B\hat{A}C$**




Per dimostrare che un angolo e' maggiore di un'altro basta prenderne una parte e mostrare che la parte e' uguale all'altro angolo, quindi dovremo costruire due triangoli, uno con l'angolo interno e l'altro con la parte dell'angolo esterno ti faccio la costruzione passo-passo.

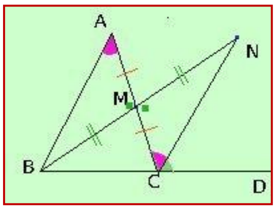



Considero il punto medio M del lato AC.




Ora considero il segmento BM e riporto un segmento uguale sul prolungamento di BM oltre M, ottengo il segmento MN.

Congiungo N con C e considero i triangoli ABM ed MNC.

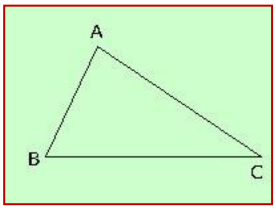



Essi hanno:
$AM = MC$ per costruzione
$BM = MN$ sempre per costruzione
gli angoli $A\hat{M}B = N\hat{M}C$ perche' opposti al vertice
Per il primo criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti, in particolare $B\hat{A}M = M\hat{C}N$ ed essendo $M\hat{C}N$ una parte dell'angolo $A\hat{C}D$ si avra' la tesi .

---

Una volta studiato, per vedere se hai capito bene, prova a dimostrare il teorema considerando altri angoli.

## b) <u>In ogni triangolo a lato maggiore sta opposto l'angolo maggiore</u>

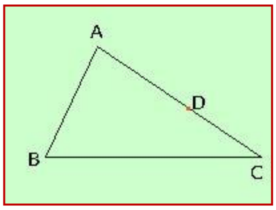



L'enunciato stavolta e' gia' nel titolo.
Consideriamo un triangolo che abbia il lato AB piu' corto ed il lato AC piu' lungo; dovremo dimostrare che l'angolo $B\hat{C}A$ e'minore dell'angolo $A\hat{B}C$.

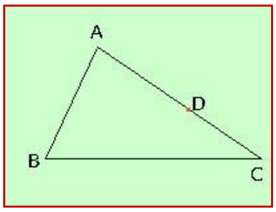
---

Per fare l'angolo di fronte ad un lato, ad esempio di fronte ad AB basta che in mezzo alle lettere del lato metti l'altra lettera C, ottieni ABC.

---

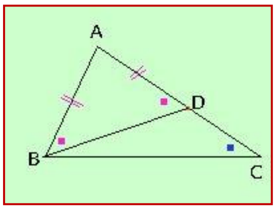



Ipotesi: $AC > AB$ Tesi: $B\hat{C}A < A\hat{B}C$



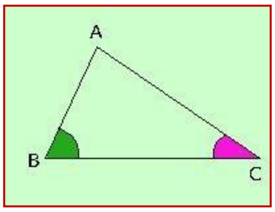

Riportiamo sul lato maggiore il lato minore in modo da avere due segmenti congruenti $AB = AD$.
Questo ci permette di costruire un triangolo isoscele congiungendo i punti B e D. Infatti il triangolo ABD e' isoscele e quindi ha gli angoli $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}A$ congruenti.

Se ora consideriamo il triangolo BCD l'angolo $B\hat{D}A$ e' esterno mentre l'angolo $B\hat{C}D$ e' interno e non adiacente quindi $B\hat{D}A > B\hat{C}D$.
Raccogliendo:
$A\hat{B}C > A\hat{B}D = B\hat{D}A > B\hat{C}A$
Per la proprieta' transitiva segue $A\hat{B}C > B\hat{C}A$
o, leggendo alla rovescia:
$B\hat{C}A < A\hat{B}C$
Come volevamo.




## c) In ogni triangolo ad angolo maggiore sta opposto il lato maggiore

E' il teorma inverso del precedente.
Consideriamo un triangolo che abbia l'angolo $A\hat{B}C$ piu' grande ed l'angolo $A\hat{C}B$ piu' piccolo; dovremo dimostrare che, allora, il lato AC e'maggiore del lato AB.




---

Per fare il lato di fronte ad un angolo, ad esempio di fronte ad ACB basta che togli la lettera in mezzo C, ottieni AB.

---

**Ipotesi:** $A\hat{B}C > A\hat{C}B$ **Tesi:** $AC > AB$

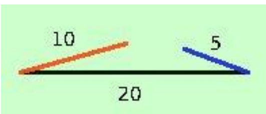
Qui usiamo la dimostrazione per assurdo.
Neghiamo la tesi, se riusciamo a negare anche l'ipotesi allora il teorema e' vero.
La tesi dice $AC > AB$. Se non e' vera, abbiamo due possibilita': o e' uguale o e' minore.

- Non puo' essere $AC = AB$ perche' il triangolo avendo due lati uguali sarebbe isoscele ed avrebbe anche i due angoli uguali
  cioe' $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ contro l'ipotesi.
- Nemmeno puo' essere $AC < AB$ perche' se lo fosse, per il teorema precedente sarebbe $A\hat{B}C < A\hat{C}B$ contro l'ipotesi.

## d) In ogni triangolo la somma di due lati e' maggiore del terzo lato

In pratica vuol dire che se vuoi chiudere un triangolo i lati devono essere compresi entro certi limiti.

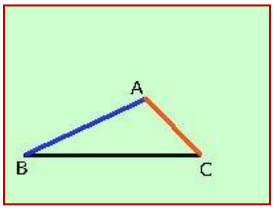
---




Cioe' se prendo un lato di 10 centimetri, uno di 5 ed il terzo di 20 non riesco a chiudere il triangolo.

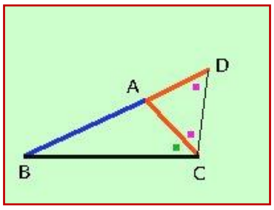
---

**Ipotesi:** ABC triangolo **Tesi:** $AB + AC > BC$




Costruiamo un triangolo che abbia come lato la somma dei due lati

minori del triangolo.
Sul prolungamento di AB oltre A riporto un segmento uguale a AC; chiamo D il punto finale congiungo D con C.
Il triangolo ACD e' isoscele perche' ha due lati uguali quindi ha anche due angoli uguali:
$A\hat{D}C = A\hat{C}D$




Ora considero il triangolo DBC esso ha l'angolo $B\hat{C}D$ maggiore dell'angolo $B\hat{D}C$ perche' all'angolo del triangolo isoscele va aggiunto l'angolo BCA; quindi siccome ad angolo maggiore sta opposto il lato maggiore avremo che BD > BC.
Ma avevamo costruito BD come AB+AC quindi segue la tesi.

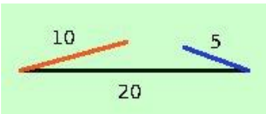
---

Questo teorema, assieme al teorema che segue, e' fondamentale, e lo incontrerai spesso come disuguaglianza triangolare dove si puo' parlare di metrica (misura).

### e) In ogni triangolo un lato e' maggiore della differenza degli altri due lati

Anche qui vuol dire che se vuoi chiudere un triangolo i lati devono essere compresi entro certi limiti.

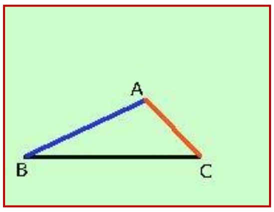
---




Anche qui se prendo un lato di 10 centimetri, uno di 5 ed il terzo di 20 non riesco a chiudere il triangolo, infatti 10 non e' maggiore di 20 – 5.

---

Ipotesi: ABC triangolo Tesi: AC > BC - AB



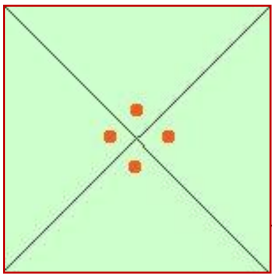

Per il teorema precedente sappiamo che vale :
AB + AC > BC
Se ora sottraggo da entrambe le parti della disuguaglianza AB, ottengo:
AB + AC - AB > BC - AB
AC > BC - AB Come volevamo.

## E. *Perpendicolarita'*

Facciamo il punto della situazione: abbiamo studiato i triangoli, visto quando sono congruenti e quando non lo sono, ora il passo successivo sara' di prendere figure con 4, 5, 6.. lati ed altrettanti angoli, cioe' i poligoni; ma prima di farlo sara' bene vedere se e' possibile caratterizzare il comportamento dei lati mediante gli angoli e viceversa, in modo da poter classificare i poligoni mediante il comportamento dei lati.
Questo ci portera' a due concetti fondamentali: la perpendicolarita' ed il parallelismo. In questo capitolo prendiamo in esame la perpendicolarita'.

### 1. Perpendicolarità: definizione

Diremo che due rette sono perpendicolari se incontrandosi formano quattro angoli uguali (che chiameremo retti).

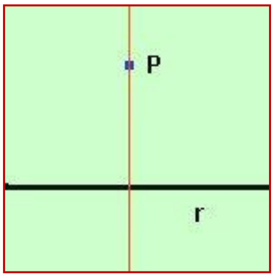


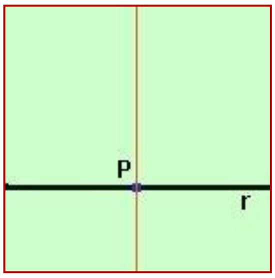
Equivalentemente diremo che un angolo retto e' una delle 4 parti in cui il piano viene diviso da 2 rette perpendicolari.

Troppo spesso quando si parla di perpendicolarita' si intende una retta verticale ed una retta orizzontale, fai attenzione: le rette possono anche essere oblique come vedi in figura.

## 2. Esistenza ed unicita'

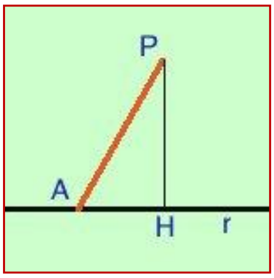
Diamo il seguente Teorema senza dimostrazione:
Data una retta ed un punto esiste ed e' unica la perpendicolare alla retta passante per un punto dato.




Il teorema e' sempre valido, sia che il punto sia fuori della retta che se il punto si trova sulla retta.

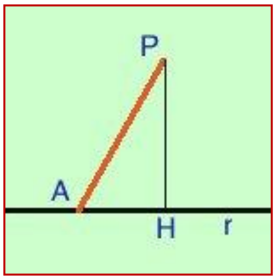
## 3. Proiezione di un segmento su una retta




Esaminiamo il caso in cui il segmento ha un estremo sulla retta: negli altri casi possiamo sempre pensare di spostare il segmento con un movimento rigido.
Valgono le seguenti proprieta' :

- Il segmento di perpendicolare e' minore di ogni segmento obliquo.
- Segmento obliqui uguali hanno proiezioni uguali.
- A proiezione maggiore corrisponde lato obliquo maggiore.

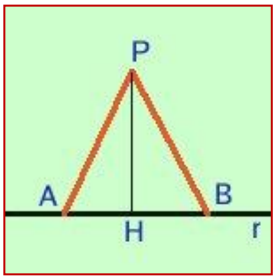
***Il segmento di perpendicolare e' minore di ogni segmento obliquo***




Fornisco qui un breve cenno di dimostrazione, ma tu, per esercizio, potresti farne la dimostrazione completa con ipotesi, tesi.... ed anche del teorema inverso.

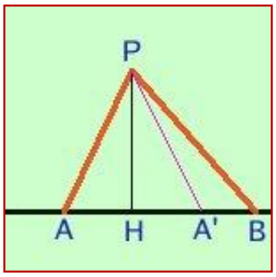
In effetti se consideri il triangolo PHA ha l'angolo in H retto e quindi maggiore degli altri angoli e ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore.

***Segmento obliqui uguali hanno proiezioni uguali***




Fornisco qui un breve cenno di dinostrazione, ma tu, per esercizio, potresti farne la dimostrazione completa con ipotesi, tesi.... ed anche del teorema inverso

Il triangolo PAB. avendo due lati uguali e' isoscele e nei triangoli isosceli l'altezza taglia a meta' la base.




***A proiezione maggiore corrisponde lato obliquo maggiore***

Fornisco qui un breve cenno di dinostrazione, ma tu, per esercizio, potresti farne la dimostrazione completa con ipotesi, tesi.... ed anche del teorema inverso

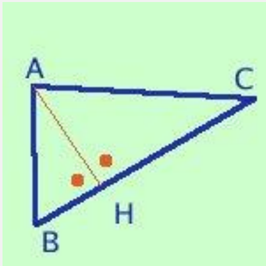
---

Ribaltando attorno ad AH il triangolo PAH ottieni il triangolo PA'H e nel triangolo che si forma A'BP l'angolo in A' e' ottuso.

## 4. Altezze, mediane e triangolo isoscele

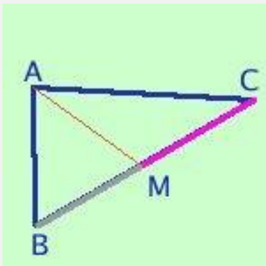
Qui vediamo alcune definizioni ed anche una proprieta' notevole del triangolo isoscele:

Definiamo altezza di un triangolo il segmento di perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto
In figura AH e' un'altezza




Naturalmente nel triangolo vi saranno tre altezze.

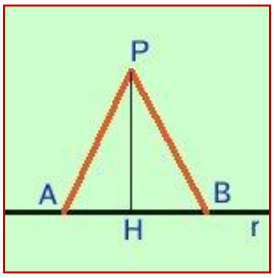
Definiamo mediana il segmento congiungente il vertice di un triangolo con il punto medio del lato opposto
In figura AM e' una mediana




Anche di mediane ogni triangolo ne possiede 3.

---

Date queste definizioni possiamo dire che vale:




In un triangolo isoscele l'altezza, la mediana e la bisettrice condotte dal vertice opposto alla base sono coincidenti.

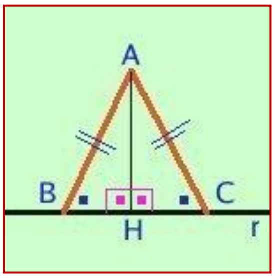
Ecco la dimostrazione:

So che il triangolo e' isoscele e ne considero l'altezza, dimostro che allora e' anche mediana e bisettrice
Posso anche prendere per ipotesi che il triangolo e' isoscele e considerarne la mediana
oppure prendere il triangolo isoscele e considerarne la bisettrice
Quindi ho tre possibili dimostrazioni:

1. So che il triangolo e' isoscele e ne considero l'altezza:

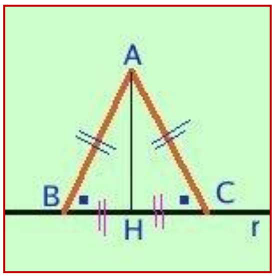
| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| AB=AC ABC=ACB AHB=AHC=angolo retto | BH=HC AHB=AHC |

*Dimostrazione:*
Dimostriamo prima che e' mediana: essendo AH l'altezza BH e HC sono le proiezioni di due segmenti AB e AC congruenti per ipotesi e quindi sono congruenti BH ed HC (teoremi precedenti sulle proiezioni).
Dimostriamo che e' bisettrice: considero i triangoli ABH ed AHC essi hanno:



AB=AC per ipotesi
BH=HC perche' appena dimostrato
AH in comune.
Quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio ed in particolare avremo gli angoli AHB ed AHC congruenti fra loro.

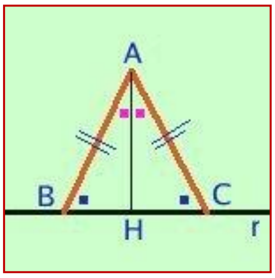
2. So che il triangolo e' isoscele e ne considero la mediana:




| Ipotesi: | | | Tesi: | |
|---|---|---|---|---|
| AB=AC | ABC=ACB | AH=HC | BAH=CAH | AHB=AHC |

*Dimostrazione:*
Considero i triangoli AHB ed AHC essi hanno:
AB=AC per ipotesi
AH e' in comune
BH=HC sempre per ipotesi.
Per il terzo criterio i due triangoli sono congruenti ed in particolare avremo gli angoli BAH=CAH ed anche gli angoli AHB=AHC che quindi saranno retti .

3. So che il triangolo e' isoscele e ne considero la bisettrice:




| Ipotesi: | | | Tesi: | |
|---|---|---|---|---|
| AB=AC | ABC=ACB | AHB=AHC | BAH=CAH | AH=HC |

*Dimostrazione:*
Considero i triangoli AHB ed AHC essi hanno:
AB=AC per ipotesi
gli angoli ABC=ACB sempre per ipotesi
gli angoli AHB=AHC ancora per ipotesi.
Per il secondo criterio i due triangoli sono congruenti ed in particolare sara' BH=CH ed anche gli angoli AHB=AHC che quindi saranno retti.

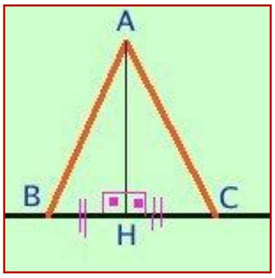
Vale anche l'inverso:

Se in un triangolo l'altezza, la mediana e la bisettrice condotte dal vertice opposto alla base sono coincidenti allora il triangolo e' isoscele.

Ecco la dimostrazione:

Posso anche prendere per ipotesi che coincidono altezza e mediana
oppure prendere per ipotesi che coincidono altezza e bisettrice
od anche prendere per ipotesi che coincidono mediana e bisettrice
in tutti e tre i casi il triangolo sara' isoscele.
Quindi ho tre possibili dimostrazioni:

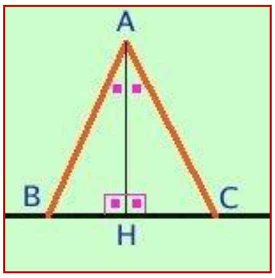
1. Prendiamo per ipotesi che coincidano altezza e mediana:




| Ipotesi: | | Tesi: |
|---|---|---|
| AHB=AHC=angolo retto | BH=HC | AB=BC |

*Dimostrazione:*
Considero i triangoli ABH ed AHC essi hanno:
gli angoli ABH=AHC perche' retti
BH=HC per ipotesi
AH in comune
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio ed in particolare avremo i lati AB ed AC congruenti fra loro.

2. Prendiamo per ipotesi che coincidano altezza e bisettrice:

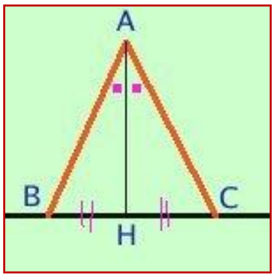



| Ipotesi: | | Tesi: |
|---|---|---|
| AHB=AHC=angolo retto, angoli | BAH=HAC | AB=BC |

*Dimostrazione:*
Considero i triangoli ABH ed AHC essi hanno:
gli angoli ABH=AHC perche' retti
BAH=HAC per ipotesi

AH in comune.
Quindi i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio ed in particolare avremo i lati AB ed AC congruenti fra loro.

3. Prendiamo per ipotesi che coincidano mediana e bisettrice:

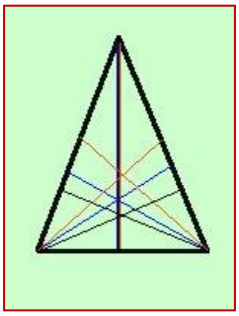



| Ipotesi: BH=HC angoli BAH=HAC | Tesi: AB=BC |
|---|---|

*Dimostrazione:*
Opero un ribaltamento del lato AB attorno alla retta AH: siccome gli angoli BHA ed AHC sono congruenti e sono congruenti anche i segmenti BH e HC il segmento AB coincidera' esattamente con il segmento AC ed il punto B si trasferira' sul punto C come volevamo.

---

Siccome abbiamo un teorema ed anche il suo inverso d'ora in avanti i fatti :
Triangolo isoscele ⇔ Altezza=Mediana=Bisettrice
saranno equivalenti.



---

Naturalmente cio' vale solamente per il vertice e la base di un triangolo isoscele; negli altri due lati l'altezza, la mediana e la bisettrice saranno tre segmenti diversi.
In figura:
*altezze* in nero
*mediane* in rosso
*bisettrici* in blu.

# F. *Parallelismo*

## 1. Introduzione al parallelismo

Ora abbiamo terminato lo studio dei triangoli e cominciamo a pensare a figure con piu' di tre lati: la proprieta' che piu' ci colpisce e' che ci sono dei segmenti che non hanno punti in comune fra loro; viene da pensare, immaginando ad esempio un quadrato se le rette che portano tali segmenti possono o no avere punti in comune.
Questo ci porta a definire una particolare relazione fra le rette: il parallelismo.

---

Il parallelismo e' stato il concetto che ha mostrato ai matematici, dopo secoli di studi, il vero significato della geometria in particolare e della matematica in generale: dopo il 1872 (congresso di Erlangen) la matematica non e' stata piu' la stessa.
In questo capitolo cercheremo di studiare sia il concetto di parallelismo che di capire la nascita delle diverse geometrie (affine, proiettiva, topologica) che dallo studio del parallelismo hanno preso origine.

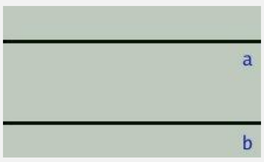
---

In altri capitoli vedremo di studiare le geometrie delle trasformazioni in modo analitico.

---

## 2. Definizione di rette parallele

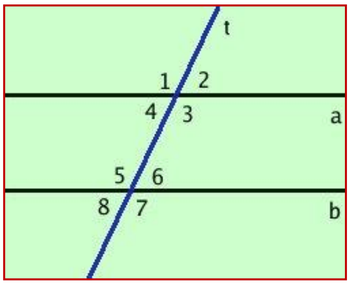
Due rette si dicono parallele se non hanno nessun punto in comune.



Attento perche' nella sua apparente semplicita' la definizione e' piuttosto complicata: significa che le rette non si incontrano mai, cioe' se io procedo per 1 chilometro ancora le rette non si incontrano, ma nemmeno dopo un milione di chilometri e anche dopo aver percorso tutto l'universo ancora non si incontreranno (l'universo e la geometria euclidea non vanno troppo d'accordo).
Sorge il problema di come fare a verificare se effettivamente le rette non si incontrano: dovremo studiare un criterio (scorciatoia) per capire senza percorrere miliardi di miliardi di chilometri (e non basterebbe) se le rette sono parallele.

## 3. Angoli fra rette tagliate da una trasversale

Il criterio che useremo per caratterizzare le rette parallele sara' quello che coinvolge gli angoli che tali rette fanno con una trasversale, pertanto ora dovremo dare un nome a tali angoli per poterli usare, tali nomi pero' andranno bene anche se le rette non sono parallele.
per semplicita' indico ogni angolo con un numero:




Nota che le rette **a** e **b** dividono il piano in due semipiani esterni ed una striscia interna fra le due rette.
Chiameremo **interni** gli angoli che si trovano dentro la striscia.
Chiameremo **esterni** quelli che si trovano fuori della striscia.
La retta **t** divide il piano in due parti.
Chiameremo **coniugati** gli angoli che stanno dalla stessa parte.
Chiameremo **alterni** gli angoli che stanno da parti opposte rispetto alla retta **t.**
Infine, chiameremo **corrispondenti** gli angoli che si trovano contemporaneamente sopra oppure sotto le rette **a** e **b** (intuitivamente: tali che trascinando la retta b sopra la retta a si sovrappongono).
Adesso dare un nome agli angoli e' un semplice esercizio:

---

Da notare che ci sono angoli che un nome gia' ce l'hanno: ad esempio 1 e 2 sono adiacenti, oppure 1 e 3 sono opposti al vertice; noi battezziamo solo chi non e' battezzato.

---

| | | |
|---|---|---|
| **alterni interni**<br>**4 - 6 3 - 5** | **coniugati interni**<br>**4 - 5 3 - 6** | **corrispondenti**<br>**1 - 5 2 - 6**<br>**3 - 7 4 - 8** |
| **alterni esterni**<br>**1 - 7 2 - 8** | **coniugati esterni**<br>**1 - 8 2 - 7** | |

## 4. Criterio fondamentale del parallelismo

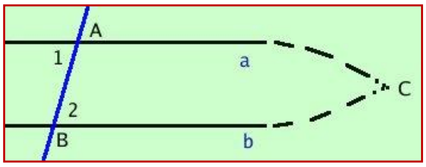
Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali allora le due rette sono parallele.

---

Facciamo la dimostrazione per assurdo:
Nella dimostrazione per assurdo neghiamo la tesi, se riusciamo a negare anche l'ipotesi il teorema e' vero
Supponiamo che le rette non siano parallele e mostriamo che allora gli angoli sono diversi; vorra' dire che quando gli angoli sono uguali le rette debbono essere parallele, non vi sono altre alternative (tertium non datur). Si vedono i miei studi classici?

---

| | |
|---|---|
| **Ipotesi:**<br>**angolo 1 = angolo 2** | **Tesi:**<br>**a // b** |




*Dimostrazione:*
Supponiamo che le rette non siano parallele, cio' significa che, magari dopo qualche chilometro si incontreranno in un punto C (per questo ho messo il tratteggio). Cio' significa che si forma il triangolo CAB ed in questo triangolo l'angolo 1 e' esterno mentre l'angolo 2 e' interno non adiacente, quindi l'angolo 1 deve essere maggiore dell'angolo 2 contro l'ipotesi. Ho negato l'ipotesi quindi il criterio e' vero.

---

D'ora in avanti per mostrare che due rette sono parallele bastera' mostrare che gli angoli alterni interni sono uguali.
Equivalentemente potrai mostrare anche che:

Sono uguali:
- gli angoli alterni esterni
- gli angoli corrispondenti

Sono supplementari (*la loro somma e' un angolo piatto*):
- gli angoli coniugati interni
- gli angoli coniugati esterni

## 5. Il quinto postulato di Euclide

---

Per procedere e fare il criterio inverso sul parallelismo ci serve il cosiddetto quinto postulato.

---

Data una retta ed un punto fuori di essa da quel punto si puo' tracciare solo una retta parallela alla retta data.

- un po' di storia
- le geometrie non euclidee
- il ruolo dei postulati ed assiomi

---

Quello che abbiamo usato e' un modo moderno di definire il quinto postulato: nella formulazone di Euclide diceva cosi':
*Due rette tagliate da una trasversale si incontrano dalla parte della trasversale dove la somma degli angoli coniugati interni e' minore di un angolo piatto.*
Ma e' esattamente la stessa cosa.

## a) Un po' di storia

Useremo i termini postulato ed assioma come sinonimi sebbene il postulato sia un enunciato definito come vero mentre assioma e' considerato un fatto evidente.

---

Il quinto postulato di Euclide fin dalla sua nascita fu guardato con sospetto dai matematici: infatti mentre per la perpendicolarita' si puo' dimostrare che:
*Per un punto si puo' mandare una sola perpendicolare ad una retta data.*
La stessa cosa non si riesce a fare per il parallelismo.
Ci furono vari tentativi (per piu' di duemila anni) per poterlo dimostrare, ma senza ottenere risultati, finche' attorno al 1870 furono proposti vari modelli di geometrie in cui erano validi tutti i postulati eccetto quello delle parallele. Fu una rivoluzione, perche' mentre prima si pensava che la matematica derivasse dal mondo reale (e quindi i postulati fossero le basi del mondo reale) da quel momento in poi si svilupparono vari tipi di matematiche valide di per se' senza bisogno di collegamenti con il mondo reale stesso.

---

Molti autorevoli matematici ed anche dei moderni testi di geometria hanno sostituito la definizione di rette parallele in questo modo:
*Due rette si dicono parallele quando sono equidistanti.*
credendo cosi' di superare lo scoglio del quinto postulato; pero' in questo modo devono spiegare cosa intendano per "equidistanti" e non e' una cosa semplice, e, in pratica, si torna alle stesse difficolta'.

## b) Le geometrie non euclidee

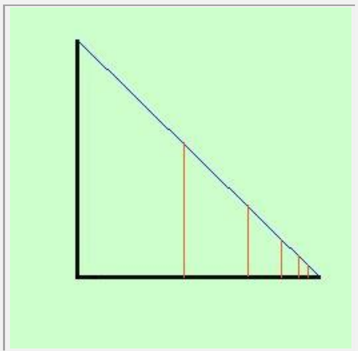
Vediamo ora un breve cenno su alcune geometrie che vennero presentate attorno al 1870, che obbediscono a tutti postulati di Euclide ad eccezione del quinto.

- Piano di Klein
- Geometria di Klein
- Geometria di Lobacewskij-Bolyai
- Geometria di Riemann
- Conclusioni

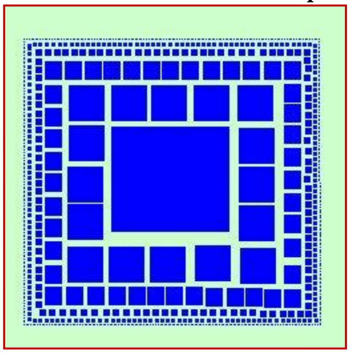
### (1) Piano di Klein

Per parlare di queste geometrie occorre andare a modificare il nostro conceto di piano:
Il piano e' uno dei concetti primitivi, e non viene definito proprio perche' ognuno di noi dovrebbe averne il concetto preesistente nella sua mente; tu come l'immagini un piano?
Io l'immagino come un pavimento che si espanda da tutte le parti senza avere muri.
Immagina di avere un altezza di 2 metri (cosi' puoi giocare a pallacanestro) e di stare in una stanza a 2 metri dal muro e fai un passo di un metro verso il muro, pero', per magia, ogni volta che fai un passo ti restringi e diventi esattamente la meta' .

| Passo numero | Ampiezza del passo in cm | Distanza dal muro in cm dopo il passo |
|---|---|---|
| 0 | -- | 200 |
| 1 | 100 | 100 |
| 2 | 50 | 50 |
| 3 | 25 | 25 |
| 4 | 12,5 | 12,5 |

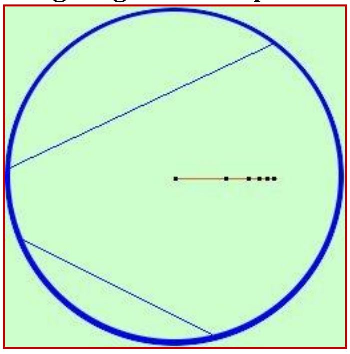


Per te il muro diventa l'infinito perche' ti potrai avvicinare quanto vuoi, ma non potrai mai raggiungerlo perche' la tua distanza dal muro sara' sempre uguale alla tua altezza.

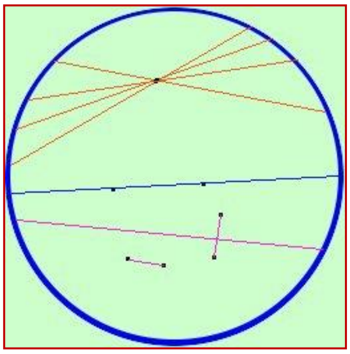


La figura, che richiama (indegnamente) un disegno di Escher, ti aiuta a capire? Man mano che ti avvicini al bordo c'e' sempre qualcos'altro.

Il piano di Klein e' un piano di questo genere in cui i punti si "addensano" man mano che ti avvicini al bordo; la retta sara' la congiungente due punti sul bordo.



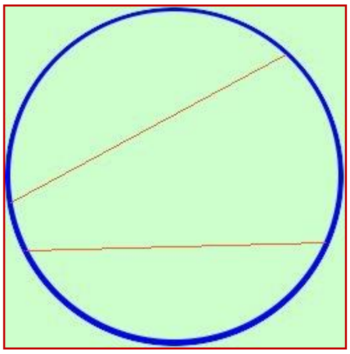
Per esso valgono tutti i postulati, ad esempio in figura, ognuno col suo colore:
Per un punto passano infinite rette
Per due punti passa una sola retta
La retta divide il piano in due parti tali che prendendo due punti dalla stessa parte il segmento che li unisce non taglia la retta, mentre prendendo due punti da parti opposte il segmento che li unisce taglia la retta



Prova da solo gli altri postulati.

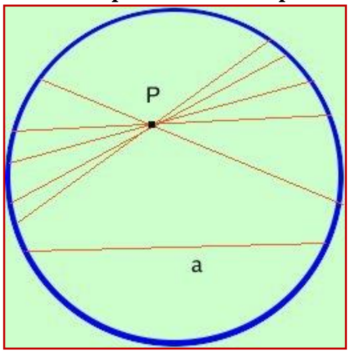
## (2) Geometria di Klein

Siccome due rette sono parallele se non hanno nessun punto in comune, nel piano di Klein due rette parallele saranno cosi':



Infatti bastera' che le rette non si tocchino per essere parallele.

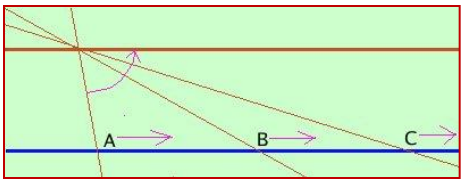
Ma allora per un punto nel piano di rette parallele ne posso mandare infinite!



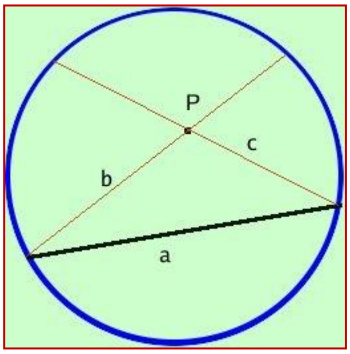

Infatti tutte le rette passanti per P che non toccano la retta **a** sono parallele ad **a**

## (3) Geometria di Lobacewskij-Bolyai

Per capire questa geometria dobbiamo prendere un'altra definizione (equivalente) di parallela.
Pensa una retta ed un punto fuori di essa, se dal punto traccio una retta obliqua questa incontrera' la prima retta in un punto A, se ora ruoto la retta, fino a farla diventare parallela, il punto si spostera' in B, in C .... , fino all'infinito e le rette saranno parallele quando il punto di incontro e' all'infinito.



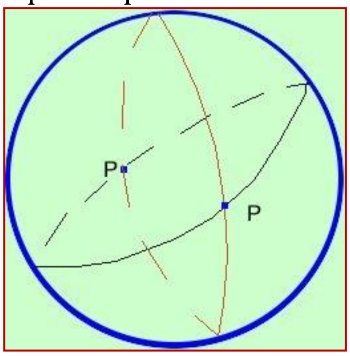

Quindi:
*Definizione:*
due rette sono parallele se hanno in comune un punto all'infinito
Con questa definizione allora in un piano di Klein da ogni punto fuori della retta si possono tracciare due rette parallele alla retta stessa.




Le due rette b e c sono parallele alla retta a perche' con essa hanno in comune un punto all'infinito: ricordati che il bordo del cerchio e' l'infinito.
In questa geometria per un punto si possono tracciare due rette parallele.

## (4) Geometria di Riemann

E' una delle piu' strane, ma piu' vicina delle altre alla geometria del mondo reale.
Consideriamo come piano la superficie di una sfera; consideriamo come punto l'insieme di due punti opposti sulla sfera (polo nord e sud assieme formano un punto); consideriamo come retta un qualunque cerchio massimo, (cioe' tipo l'equatore).
Con queste convenzioni **valgono** tutti i postulati eccetto il quinto; infatti due rette qualunque sulla sfera avranno sempre un punto in comune: dove i cerchi si tagliano




e quindi non potra' mai esistere una retta parallela ad un' altra.
In questa geometria da un punto non si puo' mandare nessuna retta parallela

## (5) Conclusioni

Allora siamo riusciti a costruire una geometria dove, data una retta ed un punto fuori di essa, si possono tracciare:

- infinite rette parallele
- due rette parallele
- Nessuna retta parallela

Ma allora i postulati sono veri di per se', oppure possiamo prendere i postulati a piacere e poi costruire come vogliamo? Chi ti dice che non sia valida nel mondo reale la geometria di Klein oppure quella di Lobacewskij? Anche gli altri postulati possono essere sottoposti a critica; considera il postulato:
La retta divide il piano in due parti tali che prendendo due punti dalla stessa parte il segmento che li unisce non taglia la retta, mentre prendendo due punti da parti opposte il segmento che li unisce taglia la retta.
Immagina che il piano sia la coperta di un letto: finche' la coperta e' stesa bene siamo d'accordo che vale il postulato, ma se fai fare le grinze alla coperta e l'accartocci puoi pensare una segmento che congiunga i due punti senza tagliare la retta? Direi proprio di si..

Ma il nostro spazio e' curvo (come la coperta stropicciata) con le pieghe (pozzi) dove si trovano le masse gravitazionali, quindi...

Allora cosa c'entra la geometria con il mondo reale? In effetti fu una vera rivoluzione: fu il naufragio della concezione classica del mondo con un'unica realta' scientifica, che aveva dominato la scena per millenni. Comincio' cosi' un'opera di ricostruzione per definire la matematica su nuove basi piu' generali, senza i legami che ne avevano frenato lo sviluppo.

### c) Il ruolo dei postulati ed assiomi

Quindi si giunge alla conclusione che, a seconda di come prendo i postulati io posso costruire un edificio logico perfettamente coerente, ma non posso dire se esso sia vero o falso; allora cio' che e' importante non sono gli oggetti su cui costruisco, ma le interrelazioni che esistono fra tali oggetti: la matematica deve studiare le relazioni piu' che le proprieta'; diceva Hilbert: "Non importa su cosa si studia, prima studiamo poi definiremo gli oggetti dello studio".
Vedi i boccali di birra (*Hilbert diceva anche che qualunque oggetto possiamo prendere per studiarne le ralzioni, anche dei boccali di birra, la matematica che ne deriva sarebbe sempre la stessa*
*Ma piu' divertente, continuo a ripetere io).*

---

Non solo, ma se il discorso e' valido per la geometria cosa succede nell'algebra e nell'aritmetica?
Gli anni successivi videro gli sforzi dei matematici per poter ricostruire le basi delle matematiche (chiamiamole cosi' visto che e' possibile costruirne tante), con Peano per i postulati dell'aritmetica, con la teoria degli insiemi, con la logica.

---

La geometria Euclidea, comunque, anche se non va troppo d'accordo con il mondo reale, va benissimo finche' l'applichiamo al mondo di tutti i giorni, per la nostra esperienza quotidiana e pertanto si continua a studiarla ed applicarla, fermo restando che, se si vogliono studiare dei fenomeni di tipo atomico, astronomico e/o relativistico, dovremo utilizzare altri modelli matematici.

---

Allora quale principio potrei mettere come base per studiare la geometria?
Si puo' studiare la geometria ponendo cura a cosa resta fisso se applico delle trasformazioni ed ottengo allora la geometria isometrica (che coincide con l'euclidea), la geometria affine, la geometria proiettiva, eccetera; Nasce in questi anni dal programma di Erlangen (1873) la geometria delle trasformazioni che (spero) vedremo in un futuro capitolo (anche perche' sempre piu' spesso e' materia d'esame nei licei scientifici).

## 6. Criterio inverso del fondamentale

Ricordiamoci che e' valido il quinto postulato:
*Data una retta ed un punto fuori di essa da quel punto si puo' tracciare solo una retta parallela alla retta data.*

---

Possiamo ora dimostrare che:
Se due rette sono parallele, allora tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali

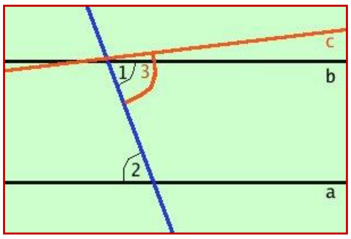
---

Anche qui facciamo la dimostrazione per assurdo.

---

| **Ipotesi:** | **Tesi:** |
|---|---|
| **a // b** | **angolo 1 = angolo 2** |

*Dimostrazione:*




Supponiamo che gli angoli non siano uguali e che, ad esempio l'angolo 1 sia piu'piccolo dell'angolo 2; allora io posso prendere, a partire dalla trasversale, un angolo 3 (in rosso) che sia uguale all'angolo 2. Ma per il criterio precedente allora la retta **c** sara' parallela alla retta **a**; per il quinto postulato, dovendoci essere una sola parallela, la retta **b** non puo' essere parallela alla retta **a** contro l'ipotesi. Quindi il criterio e' vero.

---

Lo so benissimo che dalla figura si vede chi e' parallelo e chi no, ma tu devi immaginare le rette quasi sovrapposte e che si discostino di un centimetro dopo chilometri, io ho dovuto disegnarle cosi' per esigenze grafiche (dove lo trovo un foglio lungo 3 Km?).

---

Avendo dimostrato sia il criterio che il criterio inverso i due fatti:

Rette parallele ⇔ Angoli alterni interni uguali

saranno d'ora in poi equivalenti, cioe' se trovi in un problema che due rette sono parallele nelle ipotesi scriverai che gli angoli sono uguali e dimostrerai che gli angoli alterni interni sono uguali per dimostrare che le rette sono parallele.

## 7. In ogni triangolo la somma degli angoli interni e' congruente ad un angolo piatto

---

Adeso che abbiamo fatto tutta questa fatica e' ora che ci facciamo ripagare in facilita' di dimostrazioni: il teorema che segue, ed e' un teorema molto importante, e' ora molto facile da dimostrare.

---

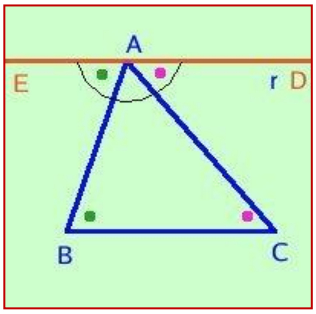
In ogni triangolo la somma degli angoli interni e' congruente ad un angolo piatto.

---

Te lo dimostro in due modi diversi: tu scegli quello che ti ha spiegato il tuo Prof.

- Primo modo:

| **Ipotesi:** | **Tesi:** |
|---|---|
| **ABC triangolo** | **Angoli ABC+ACB+BAC = Angolo piatto** |



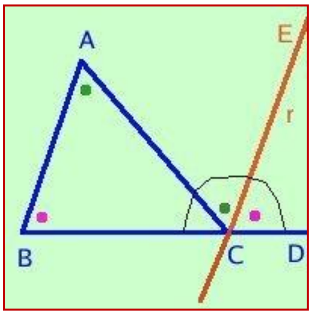

Considero la retta **r** passante per **A** e parallela a **BC**.
L'angolo **EAD** e' un angolo piatto formato dagli angoli **EAB, BAC, CAD:**
**EAB + BAC + CAD = Angolo piatto**
ma l'angolo **EAB = CBA** perche' alterni interni rispetto alle parallele **r** e **BC** tagliate dalla trasversale **AB;**
l'angolo **DAC = BCA** perche' alterni interni rispetto alle parallele **r** e **BC** tagliate dalla trasversale **AC.**
Di conseguenza:

**CBA + BAC + BCA = Angolo piatto**
come volevamo.

- Secondo modo:

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **ABC triangolo** | **Angoli ABC + ACB + BAC = Angolo piatto** |

Considero la retta **r** passante per **C** e parallela ad **AB**.
L'angolo **BCD** e' un angolo piatto formato dagli angoli **BCA, ACE, ECD:**
**BCA + ACE + ECD = Angolo piatto**
ma l'angolo **BAC = ACE** perche' alterni interni rispetto alle parallele **r** e **AB** tagliate dalla trasversale **AC;**
l'angolo **ABC = ECD** perche' corrispondenti rispetto alle parallele **r** e **AB** tagliate dalla trasversale **BC.**
Di conseguenza:
**BCA + CAB + ABC = Angolo piatto**
come volevamo.
Da notare che abbiamo usato gli angoli corrispondenti; uno degli angoli corrispondenti e' l'opposto al vertice dell'angolo alterno interno come vedi in figura.




Una conseguenza di questo teorema e':
Ogni angolo esterno e' congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti.

## 8. Criteri di congruenza per i triangoli rettangoli

E' possibile ora introdurre dei criteri di congruenza limitatamente ai triangoli rettangoli.
Visto che sappiamo che tra due triangoli rettangoli un angolo e' per forza congruente essendo retto, bastera' togliere un angolo dai criteri che gia' conosciamo.

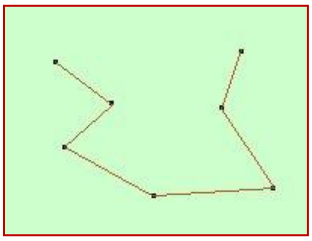
Se due triangoli sono rettangoli ed hanno congruenti due lati allora i due triangoli sono congruenti.

Se due triangoli sono rettangoli ed hanno congruenti un lato ed un angolo allora i due triangoli sono congruenti.

Per ora senza dimostrazione; potresti provare a dimostrarli tu per esercizio

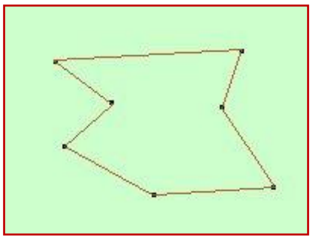
# G. *Poligoni*

## 1. Poligonale

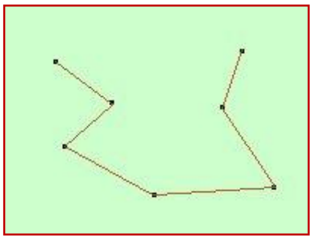


Consideriamo dei punti nel piano e congiungiamoli con dei segmenti due a due consecutivi: otteniamo una spezzata.

La spezzata puo' essere *chiusa* o *aperta* a seconda se ogni segmento ha due segmenti consecutivi oppure no.

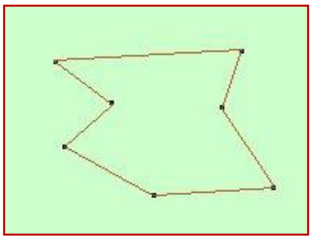


Spezzata chiusa

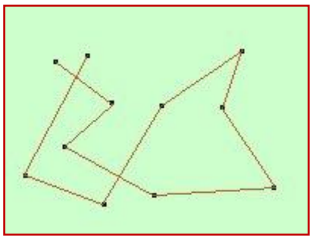


Spezzata aperta

La spezzata si dirà *non intrecciata* se i segmenti, essendo consecutivi due a due, non hanno altri punti in comune ; si dira' *intrecciata* se invece hanno anche altri punti in comune.

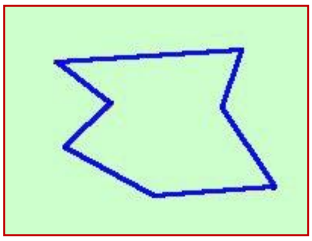


Non intrecciata



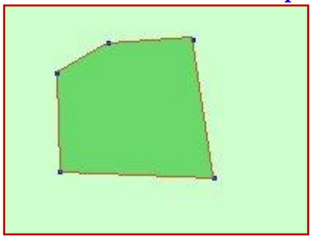
Intrecciata

Definiamo *poligonale* una spezzata *chiusa* e *non intrecciata*.



## 2. Definizione di poligono

Definizione:
Chiameremo poligono la parte di piano limitata da una poligonale.



In pratica la poligonale divide il piano in due parti: il poligono e' la parte limitata, in figura la parte in verde piu' marcato.

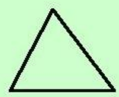
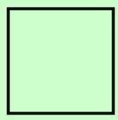
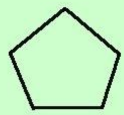
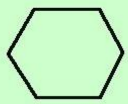
---

Vediamo ora un po' di nomenclatura:
Chiameremo **lati** del poligono i segmenti che compongono la poligonale.
Chiameremo **vertici** del poligono i punti estremi dei segmenti che compongono la poligonale.

Chiameremo **corda** un segmento congiungente due punti su due lati.
Chiameremo diversamente i poligoni a seconda del loro numero di lati:
**quadrilatero** o **quadrangolo** e' un poligono di 4 lati
**pentagono** e' un poligono di 5 lati
**esagono** e' un poligono di 6 lati
**ettagono** e' un poligono di 7 lati
**ottagono** e' un poligono di 8 lati
................................
ma si dice anche poligono di 6,7,8,... lati.
Chiameremo infine **regolare** un poligono che abbia gli angoli ed i lati uguali fra loro.

***Poligoni regolari***

Abbiamo detto che un poligono e' detto **regolare** quando ha tutti gli angoli e tutti i lati uguali.
Vediamo alcuni tra i principali poligoni regolari:

| | | |
|---|---|---|
| **Triangolo equilatero** | 3 lati uguali<br>3 angoli uguali ciascuno di 60° |  |
| **Quadrato** | 4 lati uguali<br>4 angoli uguali ciascuno di 90° |  |
| **Pentagono regolare** | 5 lati uguali<br>5 angoli uguali ciascuno di 108° |  |
| **Esagono regolare** | 6 lati uguali<br>6 angoli uguali ciascuno di 120° |  |

Approfondiremo le proprieta' dei poligoni regolari piu' avanti.

## 3. Somma degli angoli interni di un poligono

Teorema:
La somma degli angoli interni di un poligono e' uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due.

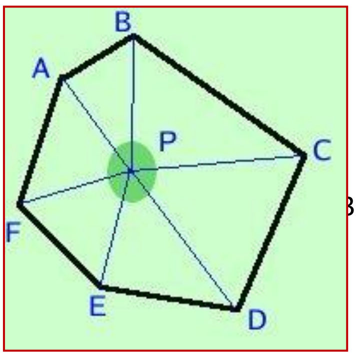
---

Cioe' ad esempio:
La somma degli angoli di un quadrilatero sara' di 2 angoli piatti (4-2)
La somma degli angoli di un ottagono sara' di 6 angoli piatti (8-2)

---

Ipotesi: ABCDEF poligono di **n** lati (6) — Tesi: Somma degli angoli interni **n-2** angoli piatti (4)

*Dimostrazione:*
Consideriamo un punto P interno al poligono e congiungiamolo con i vertici; otteniamo tanti triangoli quanti sono i lati.

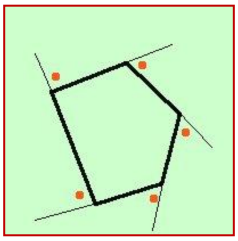


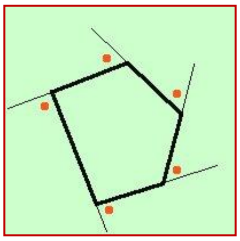
Ogni triangolo ha come somma degli angoli interni un angolo piatto.
Pero' per ottenere la somma degli angoli interni del solo poligono bisogna togliere l'angolo giro nel punto P, cioe' due angoli piatti.
Come volevamo.

## 4. Somma degli angoli esterni di un poligono

Teorema:
La somma degli angoli esterni di un poligono e' uguale a due angoli piatti.

Come angoli esterni intendiamo gli angoli formati dai lati del poligono ed i lati consecutivi prolungati sempre o in verso orario oppure in verso antiorario:
per verso *orario* si intende il verso che si ottiene muovendoci come le lancette dell'orologio: a destra vedi gli angoli avendo preso il verso orario.



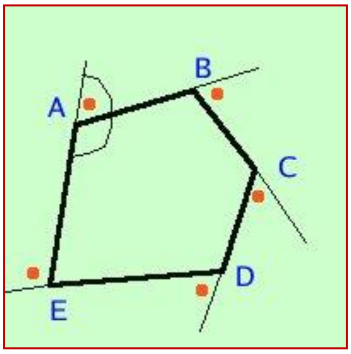


Per verso *antiorario* invece si intende il verso contrario a quello delle lancette dell'orologio: a sinistra gli angoli avendo preso il verso antiorario.

Da notare che sullo stesso vertice l'angolo preso in senso orario e l'angolo preso in senso antiorario sono tra loro opposti al vertice.

Ipotesi: ABCDEF poligono Tesi: Somma degli angoli esterni = 2 angoli piatti

*Dimostrazione:*
In ogni vertice del poligono la somma dell'angolo interno e dell'angolo esterno vale un angolo piatto (come vedi dalla figura nel punto A) quindi la somma degli angoli esterni e degli angoli interni mi da' tanti angoli piatti quanti sono i lati.
Siccome, per il teorema precedente la somma degli angoli interni vale tanti angoli piati quanti sono i lati meno due ne deriva che la somma dei soli angoli esterni vale due angoli piatti.
Come volevamo.




## 5. Criteri di congruenza fra poligoni

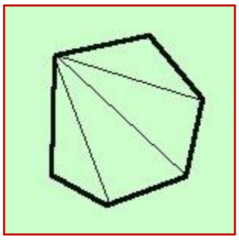
Per fare i criteri di congruenza dei poligoni basta rifarsi ai criteri di congruenza dei triangoli considerando pero'non quello che hai ma quello che manca.

Il primo criterio di congruenza dei triangoli dice che due triangoli sono congruenti se hanno due lati e l'angolo compreso congruenti; posso anche dire che due triangoli sono congruenti se so che hanno congruenti tutti gli elementi eccetto due angoli ed il lato compreso.
Questo mi da' il
***Primo criterio di congruenza dei poligoni:***
Due poligoni sono congruenti se so che hanno congruenti tutti i lati e gli angoli eccetto due angoli ed il lato compreso.

Il secondo criterio di congruenza dei triangoli dice che due triangoli sono congruenti se hanno due angoli ed il lato compreso congruenti; posso anche dire che due triangoli sono congruenti se so che hanno congruenti tutti gli elementi eccetto due lati e l'angolo compreso.
Questo mi da' il
***Secondo criterio di congruenza dei poligoni:***
Due poligoni sono congruenti se so che hanno congruenti tutti i lati e gli angoli eccetto due lati e l'angolo compreso.

---

Il terzo criterio di congruenza dei triangoli dice che due triangoli sono congruenti se hanno tre lati congruenti; posso anche dire che due triangoli sono congruenti se so che hanno congruenti tutti gli elementi eccetto tre angoli.
Questo mi da' il:
***Terzo criterio di congruenza dei poligoni:***
Due poligoni sono congruenti se so che hanno congruenti tutti i lati e gli angoli eccettuati tre angoli.



---

Come accenno di dimostrazione pensa a suddividere il poligono in triangoli: l'ultimo triangolo sara' quello che contiene (tutti o parzialmente) gli elementi che non conosci

---

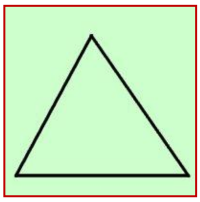
## 6. Poligoni regolari

---

Apriamo una parentesi per approfondire il concetto di poligono regolare.
***Definizione:***
Un poligono e' regolare se ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti.

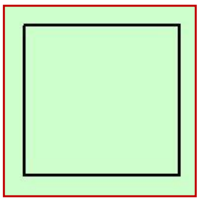
Avremo quindi:

- **Triangolo equilatero**:
  e' un triangolo con i tre lati congruenti ed i tre angoli congruenti (quindi, essendo 180° la somma degli angoli interni, ha tre angoli di 60°).



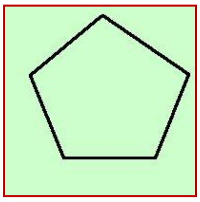
---

- **Quadrato**:
  e' un quadrilatero con i quattro lati congruenti ed i quattro angoli congruenti (quindi, essendo somma angoli interni = 2 angolipiatti = 360° la somma degli angoli interni, ha quattro angoli di 90°)



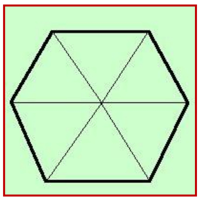
---

- **Pentagono regolare**:
  e' un poligono con i cinque lati congruenti ed i cinque angoli congruenti
  (quindi, essendo somma angoli interni = 3 angolipiatti = 540° la somma degli angoli interni, ha quattro angoli di 108°)



---

- **Esagono regolare**:
  e' un poligono con i sei lati congruenti ed i sei angoli congruenti



(quindi, essendo somma angoli interni = 4 angolipiatti = 720° la somma degli angoli interni, ha quattro angoli di 120°)
Considerando il centro del cerchio circoscritto posso suddividerlo in 6 triangoli equilateri

---

E cosi' via di seguito hai:
ettagono regolare (con 7 lati)
ottagono regolare (con 8 lati)
ennagono regolare (con 9 lati)
decagono regolare (con 10 lati)
undecagono regolare (con 11 lati)
dodecagono regolare (con 12 lati)
poligono regolare con 13 lati
poligono regolare con 14 lati
eccetera ...........

---

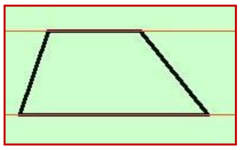
Vale la proprieta':
Tutti i poligoni regolari sono sia inscrittibili che circoscrittibili ad una circonferenza.

---

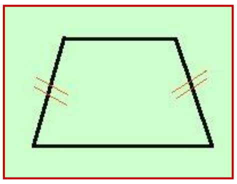
Considerando il centro della circonferenza circoscritta (od inscritta) e tracciando le congiungenti i vertici del poligono ogni poligono viene suddiviso in triangoli congruenti.
L'altezza di ognuno di questi triangoli ha un nome speciale: **Apotema.**

# H. *Quadrilateri*

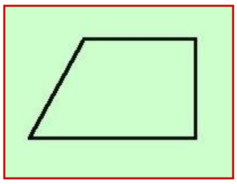
## 1. Trapezi



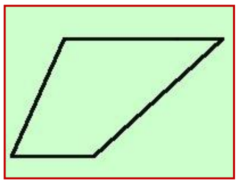
Per studiare i quadrilateri cerchiamo di distinguerli introducendo delle proprieta': la piu' semplice e' pensare che il quadrilatero abbia due lati paralleli.
***Definizione:***
Chiameremo trapezio un quadrilatero avente due lati paralleli.
Vediamo alcune definizioni aggiuntive:
Diremo che un trapezio e' **isoscele** se ha due lati non consecutivi congruenti.
Diremo che un trapezio e' **rettangolo** se ha due angoli retti.
Inoltre fai attenzione alla definizione di trapezio: una figura per essere un trapezio deve avere due lati paralleli quindi anche la terza figura qui di seguito e' un trapezio.



Trapezio isoscele



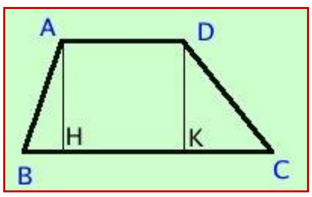
Trapezio rettangolo



Trapezio

---

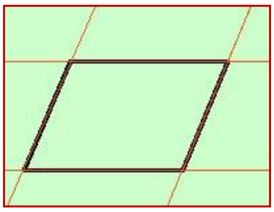
Chiameremo:
BC base maggiore
AD base minore



AB ed anche CD lati obliqui
AH ed anche DK altezze

---

## 2. Parallelogrammi



Prima abbiamo pensato a due lati paralleli, adesso pensiamo a 4 lati paralleli due a due.
***Definizione:***
Chiameremo parallelogramma un quadrilatero avente i lati due a due paralleli.
I parallelogrammi hanno alcune interessanti proprietà; se un quadrilatero e' un parallelogramma allora:

- i lati opposti sono congruenti (A)
- gli angoli opposti sono congruenti (B)
- una diagonale lo divide in due triangoli congruenti (C )
- le diagonali si tagliano a meta' (D)
  e vale anche il viceversa.
  Vediamoli per ognuno:

***Teorema (A):*** In un parallelogramma i lati opposti sono congruenti
e viceversa
Se in un quadrilatero i lati opposti sono congruenti allora il quadrilatero e' un parallelogramma.
Dimostriamo prima il teorema diretto e poi il teorema inverso

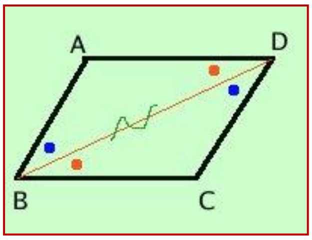
---

Teorema diretto:
**In un parallelogramma i lati opposti sono congruenti.**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| AB // CD BC // AD | AB = CD BC = AD |

*Dimostrazione*:
Congiungo i punti B e D ed ottengo i due triangoli ABD e BDC; essi hanno:

- $A\hat{B}D$ e' congruente a $B\hat{D}C$ perche' alterni interni rispetto alle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale BD
- $A\hat{D}B$ e' congruente all'angolo $D\hat{B}C$ perche' alterni interni rispetto alle parallele AD e BC tagliate dalla trasversale BD
- il lato BD in comune.




Quindi i due triangoli ABD e BCD sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli (un lato e due angoli) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare AB = CD e BC = AD. Come volevamo.

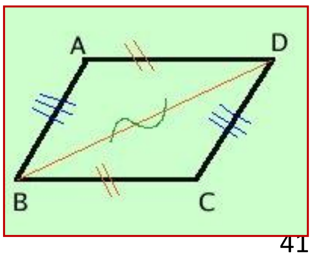
---

Teorema inverso:
**Se in un quadrilatero i lati opposti sono congruenti allora il quadrilatero e' un parallelogramma.**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| AB = CD BC = AD | AB // CD BC // AD |

*Dimostrazione:*
Congiungo i punti B e D ed ottengo i due triangoli ABD e BDC; essi hanno:

- il lato AB congruente al lato CD per ipotesi
- il lato BC congruente al lato AD per ipotesi
- il lato BD in comune.




Quindi i due triangoli ABD e BCD sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli (tre lati) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi; in

particolare, essendo l'angolo $A\hat{B}D$ congruente all'angolo $B\hat{D}C$ ed essendo questi angoli alterni interni rispetto alle rette AB e CD tagliate dalla trasversale BD, allora le due rette AB e CD saranno parallele.
Essendo l'angolo $A\hat{D}B$ congruente all'angolo $D\hat{B}C$ ed essendo questi angoli alterni interni rispetto alle rette BC e AD tagliate dalla trasversale BD allora le due rette BC e AD saranno parallele.
Come volevamo.

---

Avendo dimostrato sia il teorema diretto che quello inverso i due fatti, parallelogramma e lati opposti congruenti, saranno equivalenti .

---

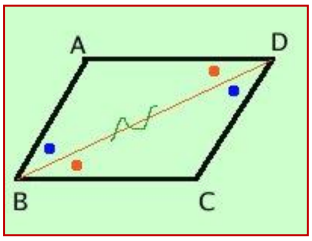
***Teorema (B):*** In un parallelogramma gli angoli opposti sono congruenti
e viceversa
Se in un quadrilatero gli angoli opposti sono congruenti allora il quadrilatero e' un parallelogramma.
Dimostriamo prima il teorema diretto e poi il teorema inverso

---

Teorema diretto:
**In un parallelogramma gli angoli opposti sono congruenti**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| AB // CD   BC // AD | $B\hat{D}C = B\hat{A}D$   $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ |

*Dimostrazione:* (quasi uguale alla precedente)
Congiungo i punti B e D ed ottengo i due triangoli ABD e BDC; essi hanno:



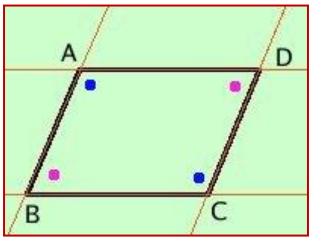

- l'angolo ABD congruente all'angolo BDC perche' alterni interni rispetto alle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale BD
- l'angolo ADB congruente all'angolo DBC perche' alterni interni rispetto alle parallele AD e BC tagliate dalla trasversale BD
- il lato BD in comune.

Quindi i due triangoli ABD e BCD sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli (un lato e due angoli) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare $B\hat{C}D = B\hat{A}D$.
Per quanto riguarda gli altri due angoli basta osservare che sono somma di angoli congruenti e quindi congruenti. Come volevamo.

---

Teorema inverso:
**Se in un quadrilatero gli angoli opposti sono congruenti allora il quadrilatero e' un parallelogramma**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| $B\hat{C}D = B\hat{A}D$   $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ | AB // CD   BC // AD |




*Dimostrazione:*
Essendo ABCD un quadrilatero la somma degli angoli interni vale due angoli piatti.
Se gli angoli sono due a due congruenti, allora due angoli susseguenti valgono un angolo piatto.
Ad esempio consideriamo $D\hat{A}B + A\hat{B}C$ = angolo piatto. Ma gli angoli $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ sono angoli coniugati interni rispetto alle rette AD e BC tagliate dalla trasversale AB ed essendo congruenti ne segue che le due rette sono parallele.
Puoi fare lo stesso ragionamento per dimostrare che le altre due rette AB e CD sono parallele.

---

Avendo dimostrato sia il teorema diretto che quello inverso i due fatti, parallelogramma e angoli opposti congruenti, saranno equivalenti.

---

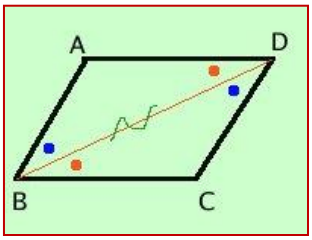
***Teorema (C):*** Una diagonale divide un parallelogramma in due triangoli congruenti
e viceversa
Se un quadrilatero e' diviso da una diagonale in due triangoli congruenti allora il quadrilatero e' un parallelogramma.
Dimostriamo prima il teorema diretto e poi il teorema inverso.

---

Teorema diretto:
**Una diagonale divide un parallelogramma in due triangoli congruenti.**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| AB // CD BC // AD | ABD = BCD |

*Dimostrazione* (uguale alla prima):
Congiungo i punti B e D ed ottengo i due triangoli ABD e BDC; essi hanno:



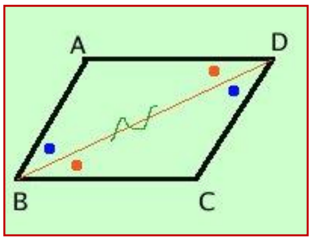

- l'angolo $A\hat{B}D$ congruente all'angolo $B\hat{D}C$ perche' alterni interni rispetto alle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale BD
- l'angolo $A\hat{D}B$ congruente all'angolo $D\hat{B}C$ perche' alterni interni rispetto alle parallele AD e BC tagliate dalla trasversale BD
- il lato BD in comune.

Quindi i due triangoli ABD e BCD sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli (un lato e due angoli). Come volevamo.

Teorema inverso:
**Se un quadrilatero e' diviso in due triangoli congruenti da una diagonale allora il quadrilatero e' un parallelogramma**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| ABC = BCD | AB // CD BC // AD |

*Dimostrazione:*
I triangoli ABC e BCD sono congruenti per ipotesi e quindi hanno congruenti tutti gli elementi.




In particolare:
essendo l'angolo $A\hat{B}D$ congruente all'angolo $B\hat{D}C$ (quelli blu) ed essendo questi angoli alterni interni rispetto alle rette AB e CD tagliate dalla trasversale BD, allora le due rette AB e CD saranno parallele.
Essendo l'angolo $A\hat{D}B$ congruente all'angolo $D\hat{B}C$ (quelli rossi) ed essendo questi angoli alterni interni rispetto alle rette BC e AD tagliate dalla trasversale BD, allora le due rette BC e AD saranno parallele. Come volevamo.

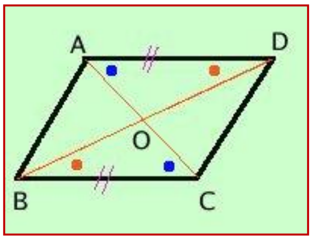
Avendo dimostrato sia il teorema diretto che quello inverso i due fatti, parallelogramma e lati opposti congruenti, saranno equivalenti.

***Teorema (D):*** In un parallelogramma le diagonali si tagliano a meta'
e viceversa
Se in un quadrilatero le diagonali si tagliano a meta' allora il quadrilatero e' un parallelogramma.
Dimostriamo prima il teorema diretto e poi il teorema inverso.

Teorema diretto:
**In un parallelogramma le diagonali si tagliano a meta'.**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| AB // CD BC // AD | AO = OC BO=OD |

*Dimostrazione:*
traccio le diagonali AC e BD e considero i due triangoli AOD e BOC; essi hanno:




- l'angolo $D\hat{A}O$ congruente all'angolo $O\hat{C}B$ perche' alterni interni rispetto alle parallele AD e BD tagliate dalla trasversale AC
- l'angolo $A\hat{D}O$ congruente all'angolo $O\hat{B}C$ perche' alterni interni rispetto alle parallele AD e BC tagliate dalla trasversale BD
- il lato AD e' congruente al lato BC per il primo dei teoremi dimostrati.

Quindi i due triangoli AOD e BOC sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli (un lato e due angoli), in particolare avranno AO=OC e

BO=OD. Come volevamo.

Teorema inverso:

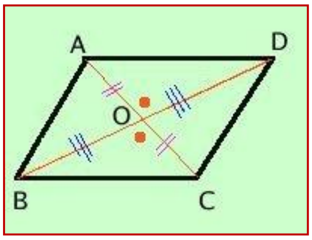
**Se in un quadrilatero le diagonali si tagliano a meta' allora il quadrilatero e' un parallelogramma**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| AO = OC   BO=OD | AB // CD   BC // AD |

*Dimostrazione:*

Considero i triangoli AOD e BOC, essi hanno:

- AO = OC per ipotesi
- BO = OD per ipotesi
- $A\hat{O}D = B\hat{O}C$ perche' opposti al vertice.




I due triangoli AOD e BOC sono congruenti per il primo criterio e quindi hanno congruenti tutti gli elementi; in particolare, essendo l'angolo $O\hat{D}A$ congruente all'angolo $O\hat{C}B$ ed essendo questi angoli alterni interni rispetto alle rette AD e BC tagliate dalla trasversale BD, allora le due rette AD e BC saranno parallele.
Basta ora considerare i triangoli AOB e COD e ripetere lo stesso ragionamento per dimostrare il parallelismo fra le rette AB e CD. Come volevamo.

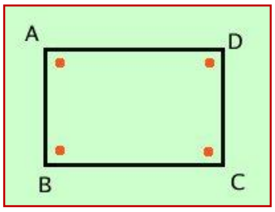
Avendo dimostrato sia il teorema diretto che quello inverso i due fatti, parallelogramma e lati opposti congruenti, saranno equivalenti

Per procedere ora raffiniamo le ipotesi introducendo il fatto che il parallelogramma abbia tutti gli angoli congruenti (rettangoli) oppure tutti i lati congruenti (quadrati).

## 3. Rettangoli

***Definizione:***

Chiameremo rettangolo un parallelogramma avente gli angoli congruenti (e quindi retti).




Possiamo caratterizzare i rettangoli con questa proprieta':
In ogni rettangolo le diagonali sono congruenti (A)
e viceversa
Se in un parallelogramma le diagonali sono congruenti allora il parallelogramma e' un rettangolo (B)
Vediamo entrambi i casi:

***Teorema (A):*** In ogni rettangolo le diagonali sono congruenti.
e viceversa
Se in un parallelogramma le diagonali sono congruenti allora il parallelogramma e' un rettangolo.
Dimostriamo prima il teorema diretto e poi il teorema inverso.

Teorema diretto:

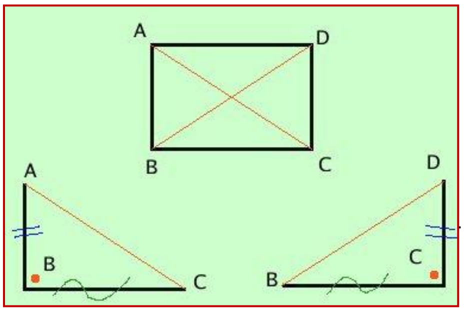
**In ogni rettangolo le diagonali sono congruenti.**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| ABCD rettangolo | AC = BD |

Nell'ipotesi e' compreso il fatto che sia un parallelogramma (con tutte le sue proprieta') ed abbia i quattro angoli congruenti; non scrivo tutto perche' mi ci vuole mezza pagina.

*Dimostrazione:*

Considero i triangoli ABC e BCD; (per renderteli piu' chiari nella figura li ho estratti).



Essi hanno:

- $A\hat{B}C = B\hat{C}D$ per ipotesi
- AB = CD perche' lati opposti di un parallelogramma
- il lato BC in comune.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli (due lati ed un angolo) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare AC = BD. Come volevamo.

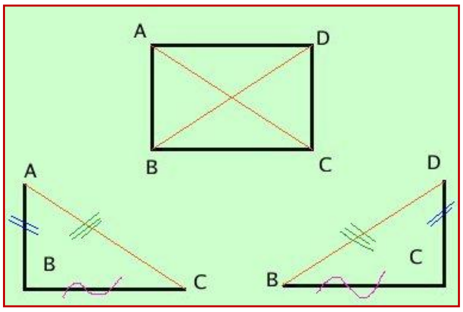
---

Teorema inverso:

**Se in un parallelogramma le diagonali sono congruenti allora il parallelogramma e' un rettangolo**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **ABCD parallelogramma AC = BD** | **$A\hat{B}C = B\hat{C}D$** |

Nella tesi ho messo solo la congruenza fra due angoli successivi perche' nei parallelogrammi gli angoli opposti sono congruenti




*Dimostrazione:*

Considero i triangoli ABC e BCD; (per renderteli piu' chiari nella figura li ho estratti).

Essi hanno:

- AC = BD per ipotesi
- AB = CD perche' lati opposti di un parallelogramma
- il lato BC in comune

Quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli (tre lati) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare $A\hat{B}C = B\hat{C}D$ e AC = BD. Come volevamo.

***Teorema (B):*** In ogni rettangolo le diagonali sono congruenti.

e viceversa

Se in un parallelogramma le diagonali sono congruenti allora il parallelogramma e' un rettangolo.

Dimostriamo prima il teorema diretto e poi il teorema inverso.

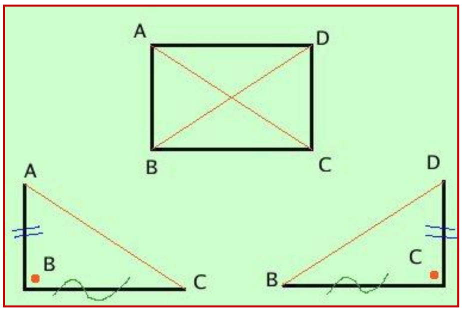
---

Teorema diretto:

**In ogni rettangolo le diagonali sono congruenti**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **ABCD rettangolo** | **AC = BD** |

Nell'ipotesi e' compreso il fatto che sia un parallelogramma (con tutte le sue proprieta') ed abbia i quattro angoli congruenti; non scrivo tutto perche' mi ci vuole mezza pagina.




*Dimostrazione:*

Considero i triangoli ABC e BCD; (per renderteli piu' chiari nella figura li ho estratti).

Essi hanno:

- $A\hat{B}C = B\hat{C}D$ per ipotesi
- AB = CD perche' lati opposti di un parallelogramma
- il lato BC in comune

Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli (due lati ed un angolo) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare AC = BD. Come volevamo.

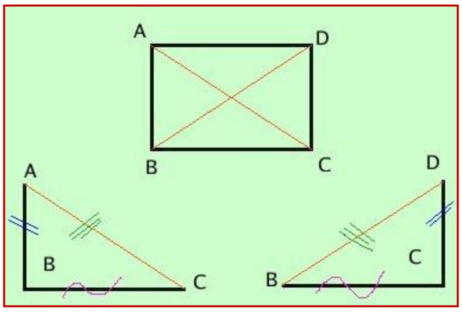
---

Teorema inverso:

**Se in un parallelogramma le diagonali sono congruenti allora il parallelogramma e' un rettangolo.**

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **ABCD parallelogramma AC = BD** | **$A\hat{B}C = B\hat{C}D$** |

Nella tesi ho messo solo la congruenza fra due angoli successivi perche' nei parallelogrammi gli angoli opposti

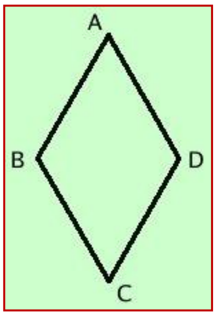



sono congruenti.
*Dimostrazione:*
Considero i triangoli ABC e BCD; (per renderteli piu' chiari nella figura li ho estratti).
Essi hanno:

- AC = BD per ipotesi
- AB = CD perche' lati opposti di un parallelogramma
- il lato BC in comune.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli (tre lati) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare $A\hat{B}C = B\hat{C}D$ e AC = BD. Come volevamo.

## 4. Rombi

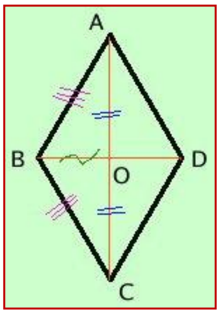



***Definizione:***
Chiameremo rombo un parallelogramma avente i lati congruenti
Possiamo caratterizzare i rombi con questa proprieta':
In ogni rombo le diagonali sono perpendicolari (A)
e viceversa
Se in un parallelogramma le diagonali sono perpendicolari allora il parallelogramma e' un rombo (B).
Vediamo entrambi i casi:

***Teorema (A):*** In ogni rombo le diagonali sono perpendicolari.
e viceversa
Se in un parallelogramma le diagonali sono perpendicolari allora il parallelogramma e' un rombo.
Dimostriamo prima il teorema diretto e poi il teorema inverso.

---

Teorema diretto:
**In ogni rombo le diagonali sono perpendicolari**




| **Ipotesi:** | **Tesi:** |
|---|---|
| **ABCD rombo** | $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}A = \llcorner$ |

Con il simbolo $\llcorner$ ho indicato l'angolo retto. Nell'ipotesi e' compreso il fatto che sia un parallelogramma (con tutte le sue proprieta') ed abbia i quattro lati congruenti; non scrivo tutto perche' mi ci vuole mezza pagina.
*Dimostrazione:*
Considero i triangoli AOB e BOC.
Essi hanno:

- AO = OC perche' in un parallelogramma la diagonale e' divisa a meta'
- AB = BC per ipotesi
- il lato BO in comune.

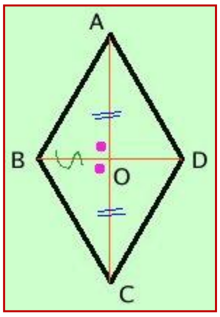
Quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli (tre lati ) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare $A\hat{O}B = B\hat{O}C$.
Posso ripetere il ragionamento per i triangoli BOC e COD, poi posso anche ripeterlo per i triangoli COD e DOA e quindi per la proprieta' transitiva della congruenza otterremo la tesi.

---

Teorema inverso:
**Se in un parallelogramma le diagonali sono perpendicolari allora il parallelogramma e' un rombo.**

| **Ipotesi:** | **Tesi:** |
|---|---|
| **ABCD parallelogramma** $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}A = \llcorner$ | **AB = BC = CD = DA** |

*Dimostrazione:*
Considero i triangoli AOB e BOCD.
Essi hanno:




- AO = OC perche' in un parallelogramma la diagonale e' divisa a meta'
- $A\hat{O}B = B\hat{O}C$ per ipotesi
- il lato BO in comune.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli (due lati e un angolo) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare AB = BC.
Posso ripetere il ragionamento per i triangoli BOC e COD, poi posso anche ripeterlo per i triangoli COD e DOA e quindi per la proprieta' transitiva della congruenza otterremo la tesi.

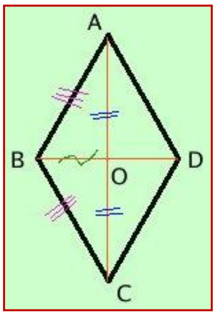
***Teorema (B):*** In ogni rombo le diagonali sono perpendicolari.
e viceversa
Se in un parallelogramma le diagonali sono perpendicolari allora il parallelogramma e' un rombo.
Dimostriamo prima il teorema diretto e poi il teorema inverso

---

Teorema diretto:
**In ogni rombo le diagonali sono perpendicolari.**

| **Ipotesi:** | **Tesi:** |
|---|---|
| **ABCD rombo** | $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}A = \llcorner$ |

Con il simbolo $\llcorner$ ho indicato l'angolo retto. Nell'ipotesi e' compreso il fatto che sia un parallelogramma (con tutte le sue proprieta') ed abbia i quattro lati congruenti; non scrivo tutto perche' mi ci vuole mezza pagina.




*Dimostrazione:*
Considero i triangoli AOB e BOC.
Essi hanno:

- AO = OC perche' in un parallelogramma la diagonale e' divisa a meta'
- AB = BC per ipotesi
- il lato BO in comune.

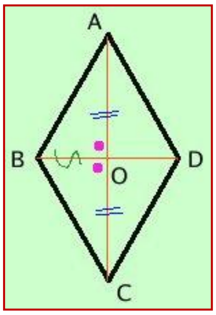
Quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli (tre lati ) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare $A\hat{O}B = B\hat{O}C$.
Posso ripetere il ragionamento per i triangoli BOC e COD, poi posso anche ripeterlo per i triangoli COD e DOA e quindi per la proprieta' transitiva della congruenza otterremo la tesi.

---

Teorema inverso:
**Se in un parallelogramma le diagonali sono perpendicolari allora il parallelogramma e' un rombo**

| **Ipotesi:** | | **Tesi:** |
|---|---|---|
| **ABCD parallelogramma** | $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}A = \llcorner$ | **AB = BC = CD = DA** |

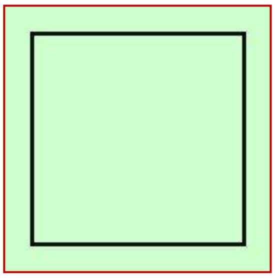
*Dimostrazione:*
Considero i triangoli AOB e BOCD.
Essi hanno:




- AO = OC perche' in un parallelogramma la diagonale e' divisa a meta'
- $A\hat{O}B = B\hat{O}C$ per ipotesi
- il lato BO in comune.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli (due lati e un angolo) e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare AB = BC.
Posso ripetere il ragionamento per i triangoli BOC e COD, poi posso anche ripeterlo per i triangoli COD e DOA e quindi per la proprieta' transitiva della congruenza otterremo la tesi.

## 5. Quadrati

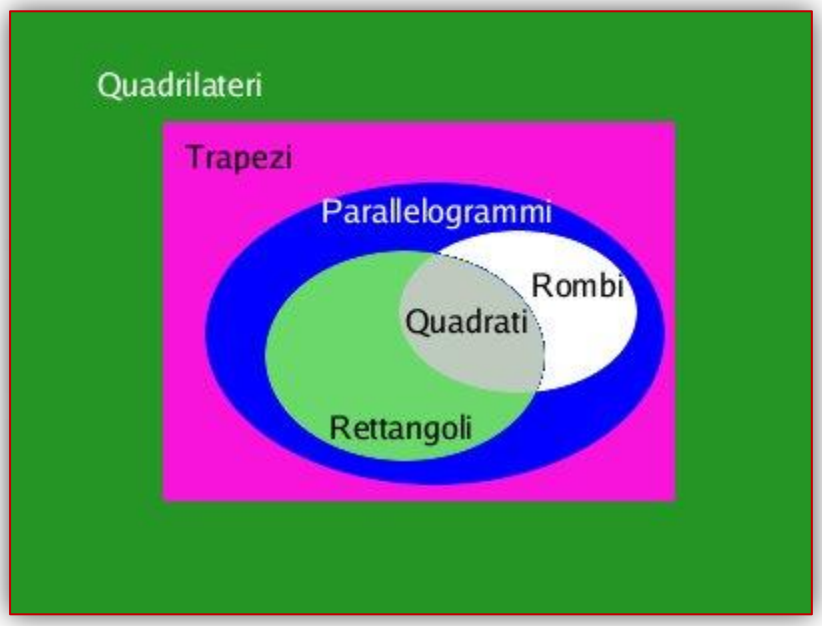


Proseguiamo nella specializzazione considerando un parallelogramma che abbia sia i lati che gli angoli congruenti.

***Definizione:***
Chiameremo quadrato un parallelogramma avente i lati e gli angoli congruenti.

## 6. La famiglia dei quadrilateri

E' possibile rappresentare graficamente la famiglia dei quadrilateri mediante la relazione di inclusione ricordando che un parallelogramma e' anche un trapezio e che un rombo e' un parallelogramma, eccetera.

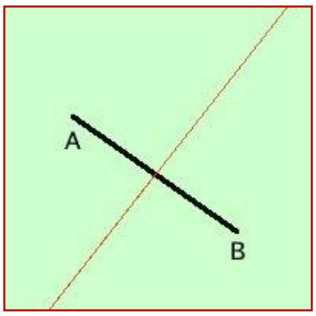



I quadrati sono contemporaneamente rettangoli e rombi quindi capitano nell'intersezione dell' insieme dei rettangoli con quello dei rombi.

# I. *Luoghi geometrici*

Definiamo il ***luogo geometrico*** come un insieme di punti legati da una proprieta'. Proseguendo il discorso vedremo che i luoghi geometrici acquisteranno sempre maggior importanza, permettendoci di definire altre figure geometriche, per ora ci accontentiamo di definire come luogo geometrico le seguenti figure:

- Asse di un segmento
- Bisettrice di un angolo




## 1. Asse di un segmento

Come ***figura geometrica*** :
l'asse di un segmento e' la perpendicolare condotta nel punto di

mezzo del segmento;
come ***luogo geometrico***:
l'asse di un segmento e' l'insieme dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento

| | | |
|---|---|---|
| Figura Geometrica | Punto ------------> < ------------ | Luogo Geometrico |

Per dimostrare che le due definizioni sono equivalenti consideriamo un punto della figura e mostriamo che soddisfa le condizioni del luogo geometrico , poi viceversa consideriamo un punto del luogo geometrico e mostriamo che appartiene alla figura

- figura geometrica → luogo geometrico (A)
- luogo geometrico → figura geometrica (B)

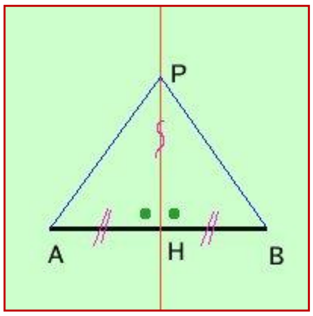
***Dimostrazione A:***

| | | |
|---|---|---|
| Punto appartenente alla perpendicolare nel punto medio di un segmento | → | Punto equidistante dagli estremi del segmento |

Come ipotesi abbiamo che il punto si trova sulla perpendicolare condotta dal punto medio del segmento; dobbiamo dimostrare che il punto allora ha la stessa distanza dagli estremi del segmento.

| Ipotesi: | | Tesi: |
|---|---|---|
| $P\hat{H}A = P\hat{H}B$ | $AH = HB$ | $PA = PB$ |

*Dimostrazione:*
O il punto P e' sul segmento oppure il punto P e' fuori del segmento.
Se il punto P e' il punto medio del segmento allora ha la stessa distanza dagli estremi del segmento.
Se il punto P non coincide con il punto medio del segmneto considero i triangoli PHA e PHB; essi hanno:




- $P\hat{H}A = P\hat{H}B$ per ipotesi
- $AH = HB$ sempre per ipotesi
- il lato PH in comune.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare $PA = PB$. Come volevamo.

---

Se vuoi puoi tirare in causa il triangolo isoscele: infatti se la perpendicolare taglia la base a meta' il triangolo e' isoscele e quindi ha i lati congruenti, ma perche' complicarsi la vita?

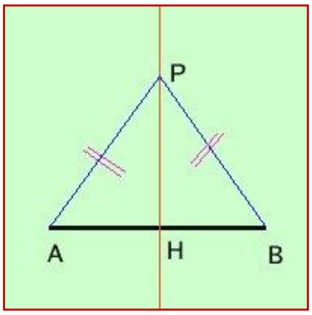
---

***Dimostrazione (B):***

| | | |
|---|---|---|
| Punto equidistante dagli estremi del segmento | → | Punto appartenente alla perpendicolare nel punto medio del segmento |

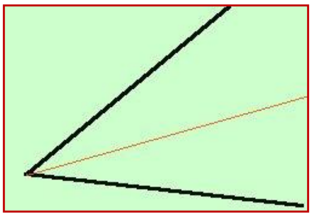
Come ipotesi abbiamo che il punto ha la stessa distanza dagli estremi del segmento; dobbiamo dimostrare che il punto allora si trova sulla perpendicolare condotta dal punto medio del segmento.

| Ipotesi: | Tesi: | |
|---|---|---|
| $PA = PB$ | $P\hat{H}A = P\hat{H}B$ | $AH = HB$ |




*Dimostrazione:*
O il punto P e' sul segmento oppure il punto P e' fuori del segmento.
Se il punto P e' sul segmento ed ha la stessa distanza dagli estremi del segmento allora e' il punto medio del segmento.
Se il punto P non e' sul segmento il triangolo PAB e' un triangolo isoscele e, per le proprieta' dei triangoli isosceli, la perpendicolare condotta dal vertice P taglia la base AB nel punto medio; quindi il punto di vertice P si trova sulla perpendicolare ad AB nel suo punto medio H. Come volevamo.

## 2. Bisettrice di un angolo



Come ***figura geometrica***:
la bisettrice di un angolo e' la retta che divide l'angolo in due parti congruenti;
come ***luogo geometrico***:
la bisettrice diun angolo e' l'insieme dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo.

---

Si definisce distanza di un punto da una retta il segmento di perpendicolare condotto dal punto alla retta.

---

| | | |
|---|---|---|
| Figura Geometrica | Punto<br>------------><br>< ------------ | Luogo Geometrico |

Per dimostrare che le due definizioni sono equivalenti consideriamo un punto della figura e mostriamo che soddisfa le condizioni del luogo geometrico , poi viceversa consideriamo un punto del luogo geometrico e mostriamo che appartiene alla figura.

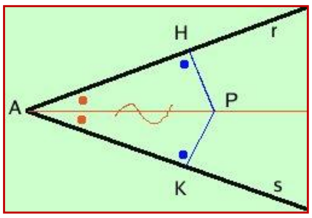
- figura geometrica ---> luogo geometrico (A)
- luogo geometrico ---> figura geometrica (B)

***Dimostrazione A:***

| | | |
|---|---|---|
| Punto appartenente alla retta che divide l'angolo in due parti congruenti | → | Punto equidistante dai lati dell'angolo |

Come ipotesi abbiamo che il punto si trova sulla retta che divide a meta' l'angolo; dobbiamo dimostrare che il punto allora ha la stessa distanza dagli estremi del segmento.

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **PÂH = PÂK** | **PH = PK** |




*Dimostrazione:*
Dal punto P traccio le perpendicolari PH e PK alle rette r ed s A Se il punto P e' il punto medio del segmento allora ha la stessa distanza dagli estremi del segmento e considero i due triangoli rettangoli PAH e PAK; essi hanno:

- PÂH = PÂK per ipotesi
- il lato PA in comune.

Quindi i due triangoli sono congruenti per uno dei criteri di congruenza dei triangoli rettangoli e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare PH = PK. Come volevamo.

***Dimostrazione B:***

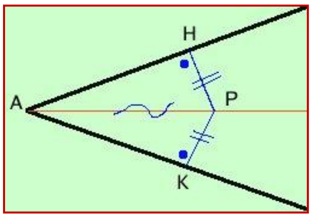
| | | |
|---|---|---|
| Punto equidistante dai lati dell'angolo | $\rightarrow$ | Punto appartenente alla retta che divide l'angolo in due parti congruenti |

Come ipotesi abbiamo che il punto ha la stessa distanza dai lati dell'angolo; dobbiamo dimostrare che il punto allora si trova sulla retta che divide l'angolo in due parti congruenti.

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| $PH = PK \quad P\hat{H}A = P\hat{K}A =$ angolo retto | $P\hat{A}H = P\hat{A}K$ |

*Dimostrazione:*
Considero i due triangoli rettangoli PAH e PAK; essi hanno:

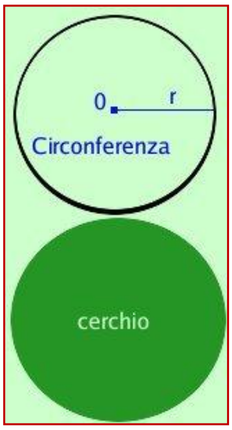
- PH = PK per ipotesi
- il lato PA in comune




Quindi i due triangoli sono congruenti per uno dei criteri di congruenza dei triangoli rettangoli e quindi hanno congruenti tutti gli elementi, in particolare $P\hat{H}A = P\hat{K}A$. Come volevamo.

# J. Circonferenza e cerchio

Usiamo ora il luogo geometrico per definire un'importantissima figura geometrica.




Definiamo ***circonferenza*** il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.

Definiamo ***cerchio*** la parte finita di piano delimitata da una circonferenza.

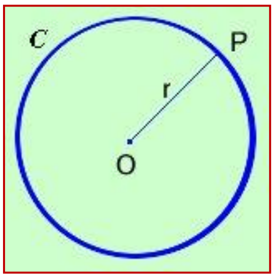
Nota bene! la circonferenza e' solo il bordo, cioe' una linea, mentre il cerchio e' la parte interna a tale linea.

---

Se nel cerchio comprendiamo anche la linea della circonferenza diremo che il cerchio e' chiuso.
Se nel cerchio non comprendiamo la circonferenza di bordo allora diremo che il cerchio e' aperto
In mancanza di indicazioni indicheremo sempre il cerchio come chiuso.

Si potrebbe anche definire la circonferenza come figura geometrica:
**La circonferenza e' il poligono regolare con un numero infinito di lati**
pero'ci troveremmo ad affrontare l'infinito...

---




## 1. Convenzioni e definizioni

***Convenzioni :***
Se dovremo indicare in un problema una circonferenza generica useremo la lettera C corsiva e maiuscola ***C*.**
Indicheremo il centro con la lettera **O .**
Per indicare la misura del raggio useremo la misura del segmento OP oppure anche la **r** minuscola:

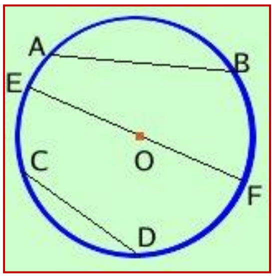
$\overline{OP} = r$
Il diametro sara' il doppio raggio **2r** .

---

***Definizioni:***

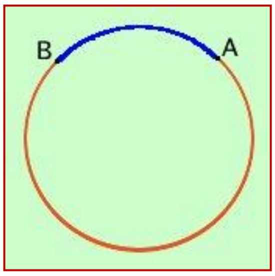
- sulla circonferenza
- sul cerchio

## a) Definizioni sulla circonferenza




***Corda*** e' il segmento congiungente due punti sulla circonferenza
AB, CD, EF sono corde.

***Diametro*** e' una corda che passa per il centro O della circonferenza
EF e' anche diametro oltre che corda.

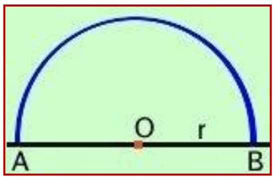



***Semicirconferenza*** e' una delle due parti in cui la circonferenza viene divisa da un diametro
la parte di circonferenza compresa tra E ed F e' una semicirconferenza .

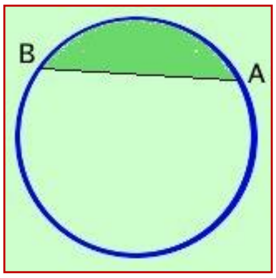
***Arco*** e' la parte di circonferenza compresa fra due suoi punti; veramente gli archi sarebbero due, uno maggiore(rosso), ed uno minore (blu) ma noi indicando l'arco $\overset{\frown}{AB}$ indicheremo il minore dei due.
Se vorremo indicare il maggiore lo diremo in modo esplicito.

## b) Definizioni sul cerchio

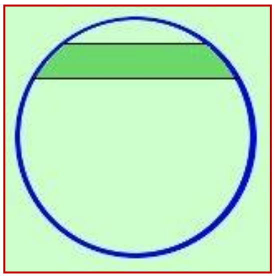
***Settore circolare*** e' la parte di cerchio compresa fra due raggi e la relativa parte di circonferenza
i settori circolari possibili sarebbero due, quello in verde piu' scuro e quello in verde piu' chiaro, ma noi intenderemo sempre quello minore




Se i due raggi sono adiacenti allora avremo il ***semicerchio*** AB di raggio r




***Segmento circolare ad una base*** e' la parte di cerchio compresa fra una sua corda e la circonferenza



***Segmento circolare a due basi*** e' la parte di cerchio compresa fra la circonferenza e due sue corde parallele

---

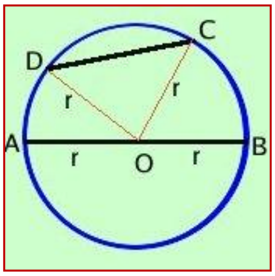
# 2. Proprieta' delle corde

## a) Il diametro e' la massima corda

Dimostriamolo:

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| AB diametro CD corda | AB > CD |

*Dimostrazione:*




Congiungo gli estremi della corda con il centro della circonferenza ed ottengo il triangolo DOC; so che in un triangolo la somma di due lati e' maggiore del terzo lato quindi avremo:

**CO + DO > CD**

Siccome CO e DO sono raggi, avremo che la loro somma e' congruente al diametro AB e quindi:

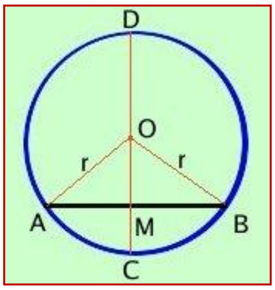
**CO + DO = AB > CD.** Come volevamo.

## b) L'asse di una corda e' il diametro

Dimostriamolo:

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| $A\hat{M}O = O\hat{M}B$ AM = MB | CD diametro |

*Dimostrazione:*



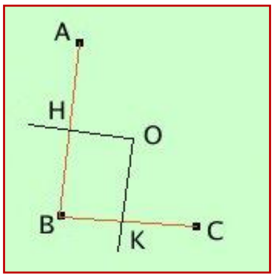

So per ipotesi che CD e' l'asse della corda AB, quindi e' la sua perpendicolare passante per il centro ed e' anche l'insieme dei punti del piano equidistante dagli estremi.

Per dimostrare che CD e' un diametro basta dimostrare che il centro O vi appartiene.

Il centro O della circonferenza, per definizione di circonferenza, e' equidistate da tutti i punti della circonferenza e quindi anche dagli estremi A e B della corda, cioe' O appartiene al luogo geometrico asse di AB.

Come volevamo.

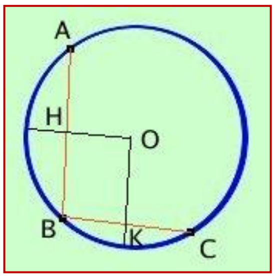
### (1) Circonferenza per tre punti




Come conseguenza possiamo dire che:

Dati tre punti non allineati per essi passa una ed una sola circonferenza.

Basta mostrare come dati tre punti A, B, C si puo' costruire la circonferenza passante per essi.




Costruisco l'asse del segmento AB passante per il punto medio H.

Costruisco l'asse del segmento AC passante per il punto medio K

Siccome AB e BC sono corde gli assi; essendo diametri si incontreranno nel centro O.

Ora puoi prendere il compasso e, con centro O ed apertura OA, tracciare la circonferenza cercata.

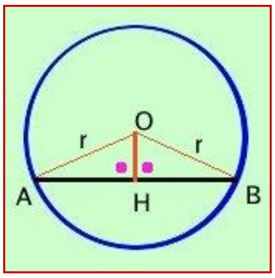
## c) La perpendicolare condotta dal centro alla corda la taglia a meta'

Dimostriamolo:

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **OH ⊥ AB** | **AH = HB** |

col simbolo ⊥ intendo perpendicolare.

*Dimostrazione:*




Congiungo il centro O con A e B ed ottengo i triangoli OAH ed OHB; essi sono rettangoli in H per ipotesi ed hanno:

- OH in comune
- OA=OB perche' raggi.

Quindi per un criterio di congruenza sui triangoli rettangoli avremo che i due triangoli sono congruenti ed in particolare AH=HB. Come volevamo.

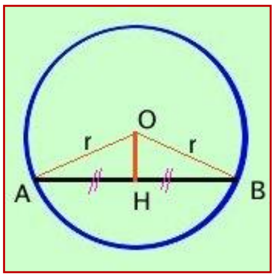
## d) La congiungente il centro col punto medio di una corda e' perpendicolare alla corda

Dimostriamolo:

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **AH = HB** | **OH ⊥ AB** |

col simbolo ⊥ intendo perpendicolare.

*Dimostrazione:*




Congiungo il centro O con A e B ed ottengo i triangoli OAH ed OHB; essi hanno:

- AH = HB per ipotesi
- OH in comune
- OA = OB perche' raggi

Quindi per il terzo criterio di congruenza dei triangoli (3 lati) avremo che i due triangoli sono congruenti ed in particolare AHO=OHB ed essendo AHB angolo piatto avremo che AHO ed OHB sono retti. Come volevamo.

## e) Corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro e viceversa

Dimostriamo prima che:

Se le corde sono congruenti allora hanno la stessa distanza dal centro

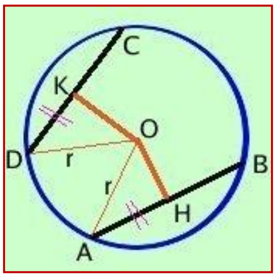
e poi dimostreremo che:

Se due corde hanno stessa distanza dal centro allora sono congruenti.

---

Teorema diretto:

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **AB = CD** | **OH = OK** |




*Dimostrazione:*

Dal centro O mando le perpendicolari OH ed OK alle corde che le tagliano a meta' come gia' dimostrato; congiungo il centro O con A e D ed ottengo i triangoli OAH ed ODK.

Essi sono rettangoli per costruzione ed hanno:

- AH = DK perche' meta' di segmenti congruenti per ipotesi
- OA = OD perche' raggi

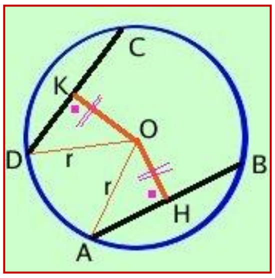
Quindi per un criterio di congruenza sui triangoli rettangoli avremo che i due triangoli sono congruenti ed in particolare OH = OK. Come volevamo.

---

Teorema inverso:

| **Ipotesi:** | **Tesi:** |
|---|---|
| **OH = OK = distanze dal centro** | **AB = CD** |

*Dimostrazione:*




Congiungo il centro O con A e D ed ottengo i triangoli OAH ed ODK; essendo OH ed OK le distanze i due triangoli sono rettangoli.
Essi hanno:

- OH = OK per ipotesi
- OA = OD perche' raggi

Quindi per un criterio di congruenza sui triangoli rettangoli avremo che i due triangoli sono congruenti ed in particolare AH = DK;
poiche' la perpendicolare dal centro (distanza) taglia a meta' la corda, se le meta' sono congruenti allora saranno congruenti anche le corde intere. Come volevamo.

## 3. Mutue posizioni fra retta e circonferenza

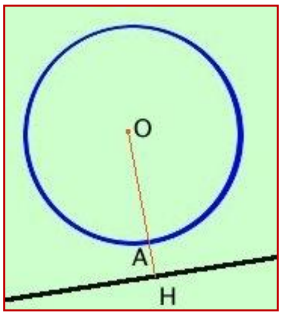
Vediamo ora come si puo' caratterizzare la diversa posizione di una retta rispetto ad una circonferenza utilizzando la distanza fra il centro della circonferenza e la retta: Abbiamo tre possibilita'.

---

**1**

***Retta esterna alla circonferenza***

OH > OA $\quad d > r$



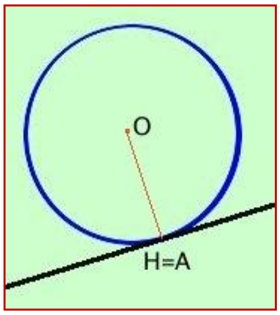

La retta e' esterna alla circonferenza se la distanza OH della retta dal centro della circonferenza e' superiore al valore del raggio OA.
Viceversa: se la distanza di una retta dal centro della circonferenza e' superiore al valore del raggio allora la retta e' esterna alla circonferenza.

---

**2**

***Retta tangente alla circonferenza***

OH = OA $\quad d = r$



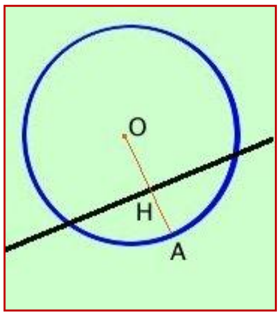

La retta e' Tangente alla circonferenza se la distanza OH della retta dal centro della circonferenza e' uguale al valore del raggio OA.
Viceversa: se la distanza di una retta dal centro della circonferenza e' uguale al valore del raggio allora la retta e' tangente alla

circonferenza.

---

**3**

***Retta secante la circonferenza***




$\mathrm{OH} < \mathrm{OA} \qquad d < r$

La retta e' secante la circonferenza se la distanza OH della retta dal centro della circonferenza e' inferiore al valore del raggio OA. Viceversa: se la distanza di una retta dal centro della circonferenza e' inferiore al valore del raggio allora la retta e' secante la circonferenza.

## 4. Relazione fra archi e corde

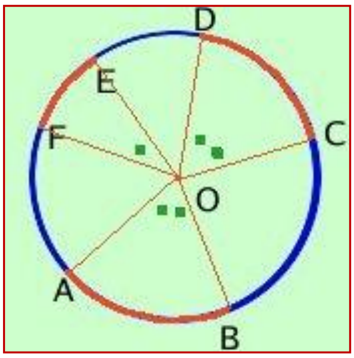
---

Vediamo ora un teorema che di solito passa quasi sotto silenzio, ma che per la sua importanza andrebbe invece ben evidenziato: i suoi risultati permettono di costruire la goniometria permettendoci di misurare gli archi in gradi e gli angoli in centimetri (radianti).

---

Teorema:

In ogni circonferenza gli archi e gli angoli al centro che tali archi sottendono sono tra loro in proporzionalita' diretta.




In proporzionalità diretta significa che si conservano l'uguaglianza e la somma; in particolare significa:

1. Se gli archi sono congruenti allora sono congruenti anche gli angoli al centro e viceversa; esempio:
   essendo $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ segue $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ e viceversa
2. Se un arco e' doppio, triplo,quadruplo... di un altro anche l'angolo al centro corrispondente e' doppio, triplo, quadruplo, ... dell'angolo al centro corrispondente; esempio:
   essendo $\overset{\frown}{AB} = 2\ \overset{\frown}{EF}$ segue che $A\hat{O}B = 2\ E\hat{O}F$.

Se due insiemi di enti sono tra loro direttamente proporzionali allora le proprieta' che valgono per il primo insieme valgono anche per il secondo.

## 5. Mutue posizioni fra due circonferenze

Vediamo ora quali sono le possibili posizioni di due circonferenze caratterizzandole con la distanza fra i centri ed i raggi.

---

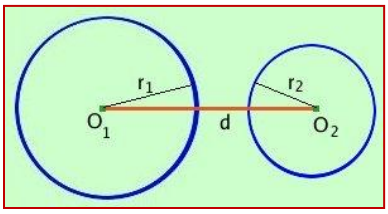
Per capire bene procurati due monete di diametro diverso, ad esempio una moneta da 10 centesimi ed una da 50 e prova a vedere, avvicinandole, quante posizioni diverse si possono avere.

---

Abbiamo sei possibilita':

**1**

***Circonferenze esterne***



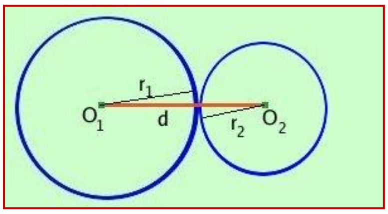

$\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2 \qquad d > r_1 + r_2$

Le circonferenze sono fra loro esterne se la distanza **d** fra i due centri e' superiore al valore della somma dei due raggi.
Viceversa: se la distanza fra i due centri e' superiore al valore della somma dei due raggi, allora le circonferenze sono esterne fra loro.

---

**2**

*Circonferenze tangenti esternamente*



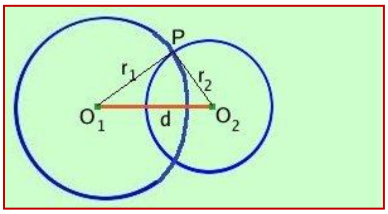

$\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$ $\qquad$ $d = r_1 + r_2$

Le circonferenze sono fra loro tangenti esternamente se la distanza **d** fra i due centri e' uguale al valore della somma dei due raggi.
Viceversa: se la distanza fra i due centri e' uguale al valore della somma dei due raggi, allora le circonferenze sono tangenti esternamente fra loro.

---

**3**

*Circonferenze secanti*



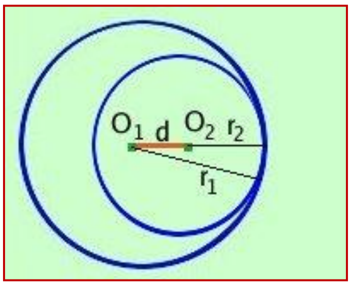

$r_1 + r_2 > \overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$ $\qquad$ $d > r_1 + r_2$

Le circonferenze sono fra loro secanti se la distanza **d** fra i due centri e' inferiore al valore della somma dei due raggi e superiore alla loro differenza.
Viceversa: se la distanza fra i due centri e' inferiore al valore della somma dei due raggi e superiore alla loro differenza, allora le circonferenze sono fra loro secanti.
Deriva dalla proprieta' dei triangoli per cui un lato $O_1O_2$ e' minore della somma degli altri due lati $PO_1 + PO_2$ ed e' anche maggiore della loro differenza $PO_1 - PO_2$

---

**4**

*Circonferenze tangenti internamente*



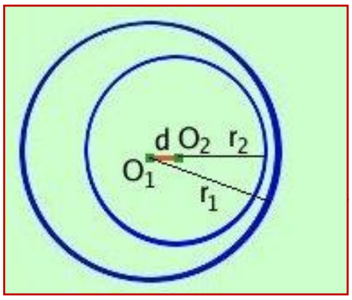

$\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$ $\qquad$ $d = r_1 - r_2$

Le circonferenze sono fra loro tangenti internamente se la distanza **d** fra i due centri e' uguale al valore della differenza dei due raggi.
Viceversa: se la distanza fra i due centri e' uguale al valore della differenza dei due raggi, allora le circonferenze sono fra loro tangenti esternamente.

---

**5**

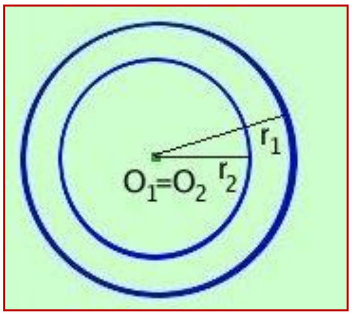
*Circonferenza interna*




$r_1 - r_2 > \overline{O_1O_2} > 0$ $\qquad$ $r_1 - r_2 > d > 0$

Una circonferenza e' interna rispetto all'altra se la distanza **d** fra i due centri e' inferiore al valore della differenza dei due raggi ma e' maggiore di zero.
Viceversa: se la distanza fra i due centri e' inferiore al valore della differenza dei due raggi ed e' maggiore di zero, allora una circonferenza e' interna rispetto all'altra.

6
*Circonferenze concentriche*




$\overline{O_1O_2} = 0$ $\qquad$ $d = 0$

Le circonferenze sono concentriche se la distanza **d** fra i due centri e' uguale a zero.
Viceversa: se la distanza **d** fra i due centri e' uguale a zero, allora le circonferenze sono concentriche.

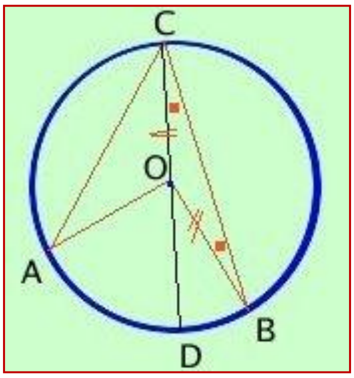
## 6. Angoli al centro ed alla circonferenza

Questo e' uno di quei teoremi fondamentali che devi sapere sia enunciare che dimostrare: i teoremi fondamentali in geometria si possono contare sulle dita di una mano: per gli altri teoremi di solito e' sufficiente sapere che esistono, cioe' conoscerne l'enunciato, per poterli applicare alla soluzione di problemi. Nei teoremi fondamentali e' invece essenziale conoscere bene anche la dimostrazione.

Teorema:
In ogni circonferenza l'angolo al centro e' doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.
Insistere sullo stesso arco significa che il loro arco e' lo stesso.

| **Ipotesi :** | **Tesi:** |
|---|---|
| **$A\hat{O}B$ = Angolo al centro** | |
| **$A\hat{C}B$ angolo alla circonferenza** | **$A\hat{O}B = 2\,A\hat{C}B$** |

*Dimostrazione:*




Traccio il diametro COD
Dividiamo la dimostrazione in due parti:
prima dimostriamo che $D\hat{O}B = 2D\hat{C}B$
e poi dimostreremo che anche $D\hat{O}A = 2D\hat{C}A$.

Considero il triangolo OCB; esso e' isoscele perche' OC ed OB sono raggi, quindi i due angoli $O\hat{C}B$ ed $O\hat{B}C$ sono congruenti.
L'angolo $D\hat{O}B$ e' un angolo esterno rispetto al triangolo OCB ed e' quindi congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti.
Siccome i due angoli sono congruenti ne segue che $D\hat{O}B = 2\,O\hat{C}B$ come volevamo

Lascio a te per esercizio la dimostrazione relativa alla seconda parte.

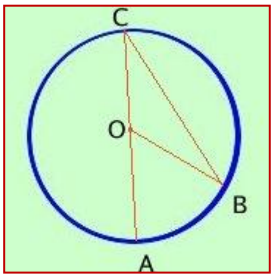
Vediamo nelle prossime pagine alcune precisazioni su questo teorema ed anche alcune conseguenze

- Ancora sul teorema

- Precisazioni sugli angoli alla circonferenza
- Teorema cosiddetto di "Dante"

## a) Ancora sul teorema

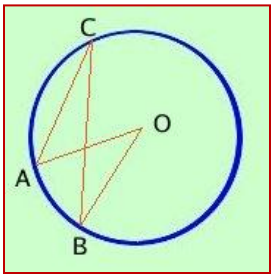
Talvolta, o per far capire meglio l'alunno che ha qualche difficolta' o per costringere a ragionare l'alunno piu' "secchione", il docente presenta la figura dell'angolo al centro ed alla circonferenza in modo alternativo; vediamo in questa pagina quali casi si possono presentare




**1**

*Per l'alunno con qualche difficolta'*

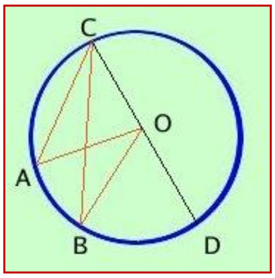
Conviene presentare il teorema in modo semplificato considerando un lato dell'angolo alla circonferenza coincidente con il diametro; in questo modo non c'e' bisogno di suddividere la dimostrazione in due parti.




**2**

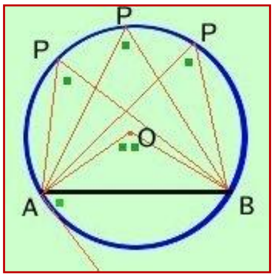
*Per l'alunno piu' preparato*

Presentando la figura come qui a destra (si deve dimostrare che $A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$), si costringe l'alunno a ragionare ed a costruire una figura che faccia riferimento alla differenza fra gli angoli invece che alla somma.

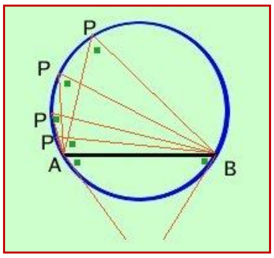



A sinistra vedi come costruire la figura: considera il diametro passante per C ed O;
l'angolo che avevi e' ora la differenza fra due angoli
$AOB\hat{} = A\hat{O}D - B\hat{O}D$
e devi considerare i triangoli AOC e BOC.

## b) Precisazioni sugli angoli alla circonferenza




Conseguenza immediata del teorema sugli angoli al centro ed alla circonferenza e' che:
Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti .
Infatti sono tutti congruenti alla meta' dello stesso angolo al centro; inoltre anche l'angolo formato da AB con la tangente alla circonferenza in A ed in B e' un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AB.

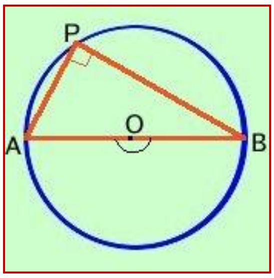



Veramente l'angolo formato da AB con la tangente alla circonferenza e' la posizione limite dell'angolo alla circonferenza.
Pensa al triangolo PAB e fai tendere il punto P ad A facendolo scorrere sulla circonferenza; l'angolo $A\hat{P}B$ restera' sempre la meta' dell'angolo al centro anche se il lato AP diventa piccolissimo.
Ti ricordo che l'angolo e' la parte di piano limitata da due semirette aventi la stessa origine, ed anche se il punto P e' a pochi millesimi di millimetro da A puoi sempre pensare le semirette uscenti da P e che si appoggiano su PA e su PB; siccome

l'angolo resta sempre congruente , allora sara' congruente anche l'angolo in posizione limite, compreso fra la corda AB e la tangente in A alla circonferenza.
Il segmento PA diventera' sempre piu' vicino alla tangente e nella posizione limite sara' esattamente sulla tangente.

### c) Triangolo rettangolo inscritto in una circonferenza (teorema di "Dante")

E' detto anche teorema di "Dante", non perche' l'abbia fatto Dante Alighieri, ma perche' nel paradiso vi fa riferimento dicendo "come se fosse possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo" .




Ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza e' rettangolo.
Infatti l'angolo $A\hat{P}B$ e' meta' dell'angolo piatto $A\hat{O}B$.

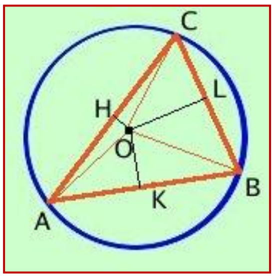
Naturalmente vale anche il viceversa

D'ora in avanti per costruire un triangolo rettangolo partiremo sempre da una semicirconferenza facendo coincidere l'ipotenusa del triangolo con il diametro della circonferenza.

## K. *Punti notevoli di un triangolo*

E' un argomento di interesse piuttosto limitato, di solito e' sufficiente conoscere le definizioni e le proprieta'.
Siccome ancora in qualche scuola i punti notevoli di un triangolo vengono trattati in modo abbastanza approfondito ne parleremo nelle prossime pagine.

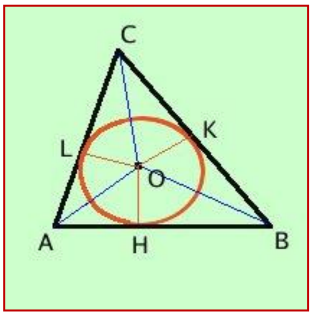
### 1. Circocentro




Definiamo ***circocentro*** di un triangolo il punto di incontro degli assi dei suoi lati.
Il ***circocentro*** e' il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.
Mostriamo che gli assi dei lati di un triangolo passano tutti per lo stesso punto e che tale punto e' il centro della circonferenza circoscritta.
Consideriamo l'asse KO del segmento AB e l'asse LO del segmento BC; essi si incontreranno in un punto O.
Per definizione di asse del segmento AB avremo AO = BO
Per definizione di asse del segmento BC avremo BO = CO
Per la proprieta' transitiva della congruenza avremo che AO = CO; quindi, per definizione di asse del segmento, il punto O e' sull'asse del segmento AC.
Considerando i tre segmenti congruenti AO, BO, CO come raggi, potremo tracciare la circonferenza di centro O circoscritta al triangolo. Come volevamo.

Viceversa, se O e' il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC essendo OA = OB = OC perche' raggi, avremo che O appartiene agli assi dei segmenti AB, BC ed AC sempre per la definizione di asse di un segmento.

## 2. Incentro

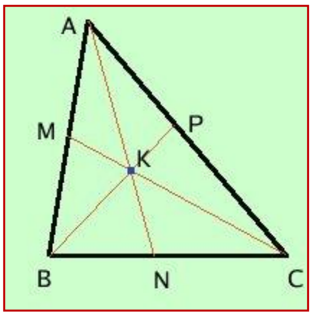



Definiamo ***incentro*** di un triangolo il punto di incontro delle bisettrici dei suoi angoli.
L' ***incentro*** e' il centro della circonferenza inscritta nel triangolo.
Mostriamo che le bisettrici degli angoli di un triangolo passano tutti per lo stesso punto e che tale punto e' il centro della circonferenza inscritta.
Consideriamo la bisettrice AO dell'angolo BAC e la bisettrice BO dell'angolo ABC; esse si incontreranno in un punto O.
Per definizione di bisettrice dell'angolo CAB avremo OL = OH
Per definizione di bisettrice dell'angolo ABC avremo OH = OK
Per la proprieta' transitiva della congruenza avremo che OL = OK
Quindi per definizione di bisettrice di un angolo il punto O e' sulla bisettrice dell'angolo ACB.
Considerando i tre segmenti congruenti OH, OK, OL come raggi, potremo tracciare la circonferenza di centro O circoscritta al triangolo. Come volevamo.

---

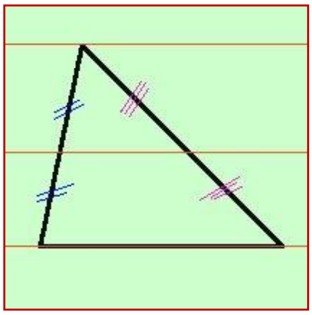
Viceversa, se O e' il centro della circonferenza inscritta nel triangolo ABC essendo OH = OK = OL perche' raggi, avremo che O appartiene alle bisettrici degli angoli CAB, ABC ed BCA sempre per la definizione di bisettrice di un angolo.

## 3. Baricentro




Definiamo ***baricentro*** di un triangolo il punto di incontro delle sue mediane.
Il ***baricentro*** e' il centro di massa del triangolo. Se il triangolo fosse una lamina composta di sostanza omogenea, il baricentro sarebbe il punto in cui puoi sospendere il triangolo senza che questo ruoti, e anche ruotando tu il triangolo questo resterebbe fisso nella nuova posizione. Vale la proprieta':
le tre mediane sono divise dal baricentro in due parti tali che quella che contiene il vertice e' doppia dell'altra, cioe' guardando la figura si ha AK=2KN   BK=2KP    CK=2KM.

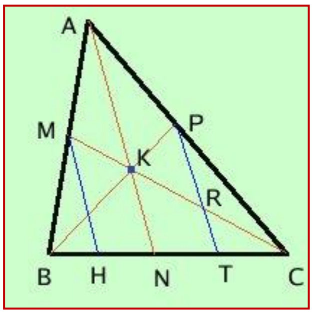
---



Per dimostrarlo dobbiamo usare il teorema (ingenuo) di Talete.
La dimostrazione di tale teorema sara' data nel capitolo sulla similitudine; comunque cio' che ci serve e':
In un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali a segmenti congruenti sull'una corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.
Sarebbe a dire che la parallela alla base dal punto medio di un lato passa per il punto medio dell'altro lato. Si chiama teorema ingenuo di Talete perche' e' una parte del teorema di Talete completo.

---

| **Ipotesi:** | | | **Tesi:** |
|---|---|---|---|
| **AM = MB** | **AP = PC** | **BN = NC** | **CK = 2KM** |



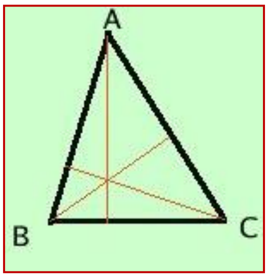

Le due mediane BP ed AN si incontrino nel punto K.
Dai punti M e P mando le parallele alla mediana AN.
Per il teorema di Talete applicato al triangolo ABN avro' BH = HN.
Per il teorema di Talete applicato al triangolo ANC avro' NT = TC.
Essendo i segmenti BN ed NC congruenti per ipotesi avro':
BH = HN = NT = TC
Se ora considero il triangolo CMH, avremo sempre per Talete che CR = RK = KM e quindi CK = 2KM. Come volevamo.

---

Attenzione: questo fatto del baricentro che divide la mediana in parti una doppia dell'altra viene spesso usato nei problemi, quindi e' un fatto da ricordare assolutamente.

---

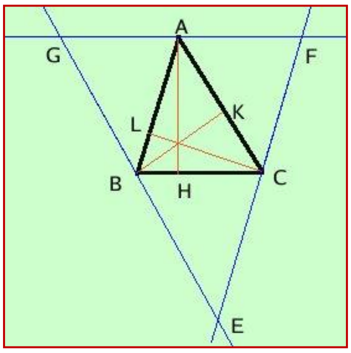
### 4. Ortocentro




Definiamo ***ortocentro*** di un triangolo il punto di incontro delle sue altezze.

Dimostriamo che le tre altezze passano per lo stesso punto.

Dai vertici del triangolo ABC mando le parallele ai lati opposti.




I punti A,B e C diventano i punti medi dei lati del triangolo EFG.

Infatti ad esempio consideriamo il parallelogramma ABCF, avremo BC congruente ad AF.
Consideriamo poi il parallelogramma GBCA, avremo BC congruente a GA; per la proprieta' transitiva avremo GA = AF cioe' A e' il punto medio del lato GF.
Lo stesso discorso possiamo fare per i punti B e C.
Quindi le tre altezze del triangolo ABC diventano i tre assi dei lati del triangolo EGF e, di conseguenza, si incontrano in uno stesso punto. Come volevamo.

## L. *Equivalenza*

---

Dobbiamo ora procedere vedendo in cosa le figure possono essere uguali:
abbiamo due possibilità: o figure con la stessa superficie (equivalenza o equiestensione) oppure figure con la stessa forma (similitudine).
Equiestensione ed equivalenza, anche se li useremo entrambe indifferentemente, hanno un significato leggermente diverso:
si parla di equiestensione quando si parla senza riferimento a misure;
si parla di equivalenza quando si fa riferimento anche a misure.

---

Cominciamo ora a parlare di figure che hanno la stessa superficie.
Considereremo come concetto primitivo l'avere la stessa superficie; intuitivamente due figure avranno la stessa superficie se, per dipingerle, occorrera' la stessa quantita' di vernice.
Anche se non e' del tutto esatto io preferisco parlare di equivalenza, tu usa la notazione del tuo Prof.

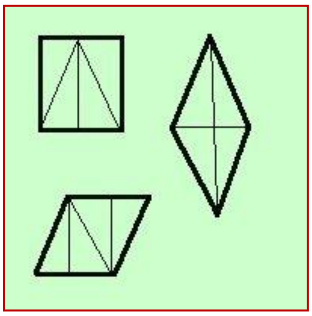
# 1. Equiestensione

Considereremo come concetto primitivo l'avere la stessa superficie; intuitivamente due figure avranno la stessa superficie se, per dipingerle, occorrera' la stessa quantita' di vernice
Chiameremo ***equiestese*** due figure che abbiano la stessa superficie.

Per l'equiestensione, essendo un'uguaglianza, come per tutte le uguaglianze valgono le tre proprieta': riflessiva, simmetrica e transitiva.

- **riflessiva**
  Ogni figura e' equiestesa a se' stessa
- **simmetrica**
  Se la figura A e' equiestesa alla figura B anche la figura B e' equiestesa alla figura A
- **transitiva**
  Se la figura A e' equiestesa alla figura B e la figura B e' equiestesa alla figura C allora la figura A e' equiestesa alla figura C

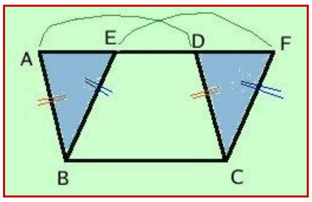
# 2. Equiscomponibilita'



Per procedere abbiamo bisogno di un concetto piu' semplice di equiestensione.
Notiamo che alcune figure si possono scomporre in "pezzi" uguali.
Se riusciamo a scomporre due figure in pezzi uguali, potremo dire che le due figure sono equiscomponibili e quindi anche equiestese
Definiamo ***equiscomponibili*** due figure che possano essere scomposte in parti congruenti.
A destra hai l'esempio di 3 figure equiscomposte (si dice anche equicomposte).
Al solito: equiscomposte se dai la precedenza alle figure, equicomposte se vuoi mettere in evidenza le parti componenti.

- equiscomponibilita' fra parallelogrammi
- equiscomponibilita' fra parallelogramma e triangolo
- equiscomponibilita' fra figura circoscritta e triangolo
- equiscomponibilita' fra trapezio e triangolo

## a) Equiscomponibilita' fra parallelogrammi



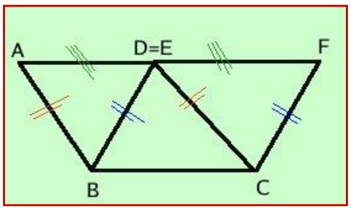

Come prima cosa mostriamo che:
Tutti i parallelogrammi aventi congruenti la base e l'altezza sono equiscomponibili.
Sovrapponiamo le basi e, siccome hanno la stessa altezza, i lati opposti alle basi giaceranno sulla stessa retta.
Considero i triangoli AEB e DFC essi hanno:

- AB = DC perche' lati opposti di un parallelogramma
- BE = CF perche' lati opposti di un parallelogramma
- AE = DF perche' ottenuti come differenza fra i lati conngruenti AD, EF e il segmento ED

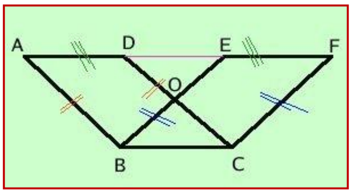
Per il terzo criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti e quindi i due parallelogrammi sono equicomposti.
Infatti se considero il quadrilatero EBCD, se vi aggiungo il triangolo ABE, ottengo il

parallelogramma ABCD; se invece vi aggiungo il triangolo DCF, ottengo il parallelogramma EBCF

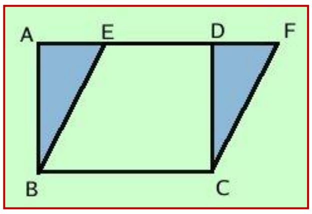
Intanto possiamo vedere alcune generalizzazioni.
I due parallelogrammi hanno i lati opposti alla base con l'estremo in comune; in tal caso e' anche piu' semplice dimostrare che i due triangoli ABD ed ECF sono congruenti.




I due parallelogrammi hanno i lati opposti alla base senza punti in comune; in tal caso prima devi dimostrare la congruenza dei triangoli ABE e CDF e poi togliere da entrambe la parte comune DOF.




Come conseguenza notevole possiamo dire che ogni parallelogramma e' equivalente ad un rettangolo che abbia la stessa base e la stessa altezza.

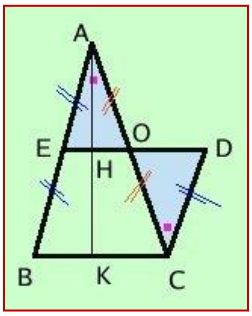



## b) Equiscomponibilita' fra parallelogramma e triangolo

Vale il teorema:
Un parallelogramma e' equivalente ad un triangolo avente come base la stessa base e per altezza il doppio dell'altezza del parallelogramma.

| **Ipotesi:** | | **Tesi:** |
|---|---|---|
| **ABC e EBCD base congruente** | **AK = 2 AH** | **ABC equivalente EBCD** |

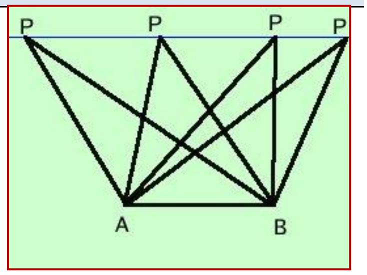
Sovrapponiamo le basi e, siccome il triangolo ABC ha il doppio dell'altezza del parallelogramma EBCD, per il teorema ingenuo di Talete avremo che (essendo H il punto medio di AK) i punti E ed O sono punti medi dei lati AB ed AC del triangolo ABC.




Considero i triangoli AEO e OCD essi hanno:

- AO = OC perche' O e' il punto medio del lato AC
- AE = DC per la proprieta' transitiva della congruenza, infatti AE=EB essendo E il punto medio del lato AB, inoltre EB=DC come lati opposti di un parallelogramma;
- $E\hat{A}O = O\hat{C}D$ perche' alterni interni rispetto alle rette parallele AE e CD tagliate dalla trasversale AC .

Per il primo criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti e quindi le due figure sono equicomposte e quindi equivalenti (equiestese).
Infatti, considero il quadrilatero EBCO; se vi aggiungo il triangolo AEO ottengo il triangolo ABC; se invece vi aggiungo il triangolo ODC ottengo il parallelogramma EBCD.

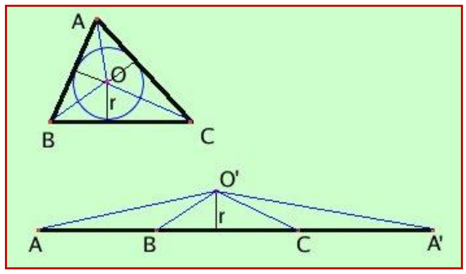



**NOTA**
Come conseguenza avremo che tutti i triangoli aventi congruenti la base e l'altezza sono tra loro equivalenti; infatti essendo tali triangoli equivalenti a parallelogrammi sappiamo che tali parallelogrammi avendo congruente la base e l'altezza sono equivalenti.

Tutti i triangolo ABP sono tra loro equivalenti: basta far scorrere il punto P lungo la retta dei vertici che e' parallela alla base.

## c) Equiscomponibilita' fra figura circoscritta e triangolo

Qualunque poligono circoscrittibile e' equivalente ad un triangolo avente come base il perimetro della figura e come altezza il raggio della circonferenza inscritta nella figura.




Possiamo considerarlo una conseguenza della nota del teorema precedente.
Per un accenno di dimostrazione consideriamo un triangolo ABC ed il suo cerchio inscritto di centro O.
Per semplicita' prendiamo un triangolo, ma potremmo fare la dimostrazione con un qualunque poligono circoscritto.
Il triangolo e' scomponibile nei triangoli ABO, BCO e CAO la cui altezza r e' il raggio del cerchio inscritto.
Considero ora il triangolo AA'O in cui il segmento AA' e' congruente al perimetro del triangolo ABC e l'altezza vale r.

- Il triangolo ABO' e' equivalente al triangolo ABO perche' la loro base e la loro altezza sono congruenti.
- Il triangolo BCO' e' equivalente al triangolo BCO perche' la loro base e la loro altezza sono congruenti.
- Il triangolo CA'O' e' equivalente al triangolo CAO perche' la loro base e la loro altezza sono congruenti.

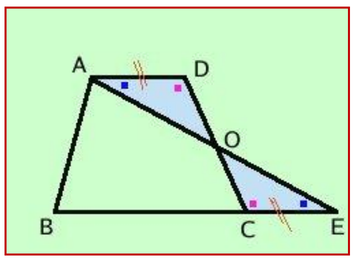
Quindi le due figure: il triangolo ABC ed il triangolo AA'O sono equicomposte e quindi equivalenti (equiestese).

## d) Equiscomponibilita' fra trapezio e triangolo

Un trapezio e' equivalente ad un triangolo avente come base la somma delle basi e come altezza la stessa altezza

Consideriamo il trapezio ABCD ed il triangolo ABE.

| **Ipotesi:** | **Tesi:** |
|---|---|
| **AD = CE** | **ABCD equivalente ABE** |




Considero i triangoli AOD ed OCE essi hanno:

- AD = CE per ipotesi
- $D\hat{A}O = O\hat{E}C$ perche' angoli alterni interni rispettoalle rette parallele AD e CE tagliate dalla trasversale AE

- $A\hat{D}O = O\hat{C}E$ perche' angoli alterni interni rispettoalle rette parallele AD e CE tagliate dalla trasversale DC.

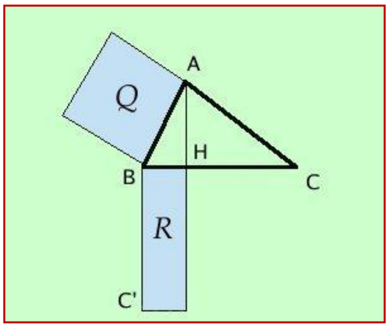
Quindi i due triangoli AOD ed OCE sono congruenti per il secondo criterio di congruenza.
Considero ora la figura ABCO:
aggiungendo alla figura ABCO il triangolo ADO, si ottiene il trapezio ABCD di partenza;
aggiungendo alla figura ABCO il triangolo OCE, si ottiene il triangolo ABE di partenza.
Le due figure ABCD ed ABE sono equicomposte e quindi equivalenti (equiestese). Come volevamo.

## 3. Applicazioni dell'equivalenza

Vediamo ora alcune importanti applicazioni dell'equivalenza,

### a) Primo teorema di Euclide

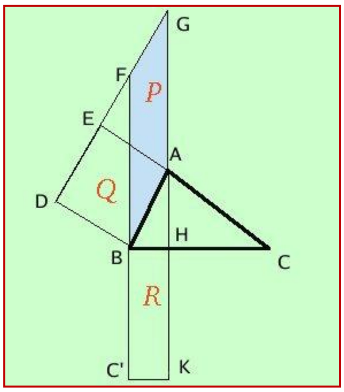
In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto e' equivalente ad un rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.




Ho costruito il rettangolo prendendo BC' congruente a BC
BH e' la proiezione del cateto AB.
In pratica devo dimostrare che, se il triangolo e' rettangolo, le due figure in azzurro, il quadrato $Q$ ed il rettangolo $R$, sono equivalenti.
Nei problemi sara' particolarmente importante la seguente forma del teorema
$AB^2 = BH \cdot BC$
Poiche' tale formula coinvolge 3 quantita' sara' sufficiente conoscerne 2 per trovare la terza
Passiamo alla dimostrazione:

| Ipotesi; | Tesi: |
|---|---|
| **BAC triangolo rettangolo** | **$Q$ equivalente $R$** |

Per poter dimostrare il teorema costruiamo una figura intermedia: il parallelogramma BFGA; dimostreremo che il quadrato e' equivalente al parallelogramma e poi che il parallelogramma e' equivalente al rettangolo; per la proprieta' transitiva dell'equivalenza seguira' la tesi.




- **Dimostriamo che il quadrato ABDE e' equivalente al parallelogramma BFGA**
  Le due figure hanno la stessa base AB.
  L'altezza del quadrato EA e' anche altezza per il parallelogramma (l'altezza e' qualunque segmnento di perpendicolare compreso fra i due lati paralleli di cui uno sia la base).
- **Dimostriamo ora che il parallelogramma BFGA e' equivalente al rettangolo BC'KH.**
  Intanto le due figure hanno la stessa altezza; perche' possiamo considerare come altezza qualunque segmento di perpendicolare condotto fra le rette parallele FC' e GK, dobbiamo dimostrare che hanno anche basi congruenti, cioe' che FB=BC'.

Siccome BC' e' stato costruito congruente all'ipotenusa BC dimostriamo che FB=BC.
Per dimostrarlo consideriamo i triangoli ABC e DBF; essi hanno:

- $B\hat{A}C = B\hat{D}F$ perche' entrambi angoli retti: uno per ipotesi e l'altro perche' angolo di un quadrato
- DB = AB perche' lati di un quadrato
- $D\hat{B}F = A\hat{B}C$ perche' complementari dello stesso angolo $F\hat{B}A$.
  cioe' se li sommo con l'angolo FBA^ ottengo da entrambi un angolo retto.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza ed in particolare avremo che BF=BC .
Il parallelogramma ed il rettangolo hanno quindi anche congruente la base e pertanto sono equivalenti.

Allora il quadrato Q e' equivalente al parallelogramma P e quest'ultimo e' equivalente al rettangolo R quindi, per la proprieta' transitiva dell'equivalenza, Q e' equivalente ad R.
Come volevamo.

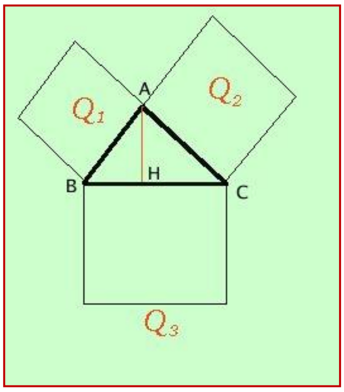
---

In lettere scriveremo:

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

## b) Teorema di Pitagora

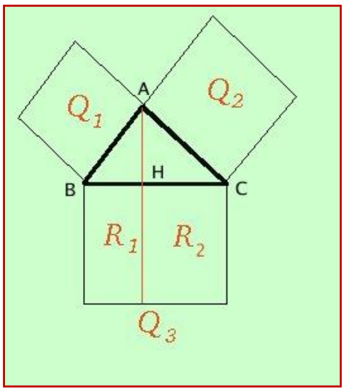
E' forse il teorema piu' noto della geometria ma non e' quello originale di Pitagora.




In ogni triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti e' equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa

Cioe' $Q_1 + Q_2$ equivalente a $Q_3$.
Nei problemi sara' particolarmente importante la seguente forma del teorema:
$AB^2 + AC^2 = BC^2$
Poiche' tale formula coinvolge 3 quantita', sara' sufficiente conoscerne 2 per trovare la terza.
Passiamo alla dimostrazione:

| **Ipotesi:** | **Tesi:** |
|---|---|
| **BAC triangolo rettangolo** | **$Q_1 + Q_2$ equivalente a $Q_3$** |




Prolungo l'altezza AH, in tal modo il quadrato $Q_3$ venga suddiviso nei rettangoli $R_1$ e $R_2$.
Per il primo teorema di Euclide $Q_1$ e' equivalente a $R_1$;
per il primo teorema di Euclide $Q_2$ e' equivalente a $R_2$;
quindi $Q_1 + Q_2$ equivalente a $R_1 + R_2 = Q_3$.
Come volevamo.

---

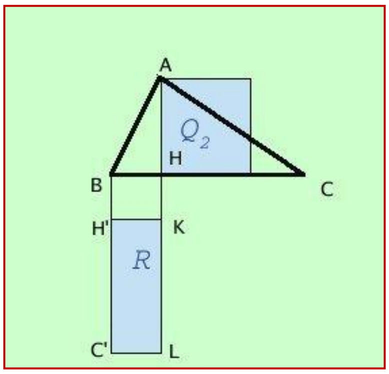
In lettere scriveremo:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

## c) Secondo teorema di Euclide

In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa e' equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

Nei problemi sara' particolarmente importante la seguente forma del teorema:



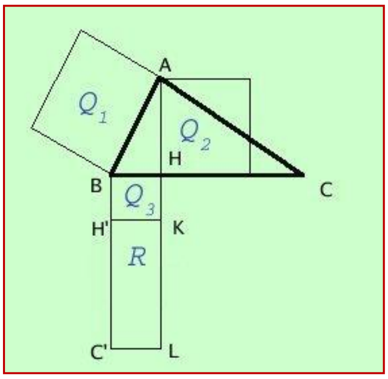

$AH^2 = BH \cdot HC$

Poiche' tale formula coinvolge 3 quantita', sara' sufficiente conoscerne 2 per trovare la terza,

Passiamo alla dimostrazione:

| **Ipotesi** | **Tesi** |
|---|---|
| **BAC triangolo rettangolo** | **$Q_2$ equivalente a $R$** |

In questo teorema la cosa piu' difficile e' fare la figura.
Come si costruisce la figura:
costruisco il quadrato sul lato AB; costruisco il quadrato sull'altezza AH siccome mi serve il rettangolo di lati BH ed HC considero il rettangolo di lati BH e BC (come nella figura del primo teorema di Euclide) e poi tolgo il quadrato di lato BH.




Per il primo teorema di Euclide ho che
$Q_1$ equivalente $Q_3 + R$.
Per il teorema di Pitagora ho che
$Q_1$ equivalente a $Q_2 + Q_3$.
Per la proprieta' transitiva dell'equivalenza avro'
$Q_3 + R$ equivalente $Q_2 + Q_3$.
Togliendo $Q_3$ da entrame le parti dell'equivalenza otteniamo
$R$ equivalente a $Q_2$.
Come volevamo dimostrare.

In lettere scriveremo:

$$AH^2 = BH \cdot HC$$

# M. *Teoria della misura*

La teoria della misura introdurra' in geometria il concetto di misura, cioe' di numero associato ad un ente geometrico; pertanto occorrera' d'ora in poi distinguere se parliamo, ad esempio, di un segmento oppure della misura del segmento stesso; indicheremo nel seguente modo:

AB segmento $\qquad \overline{AB}$ misura del segmento

## 1. Classi di grandezze

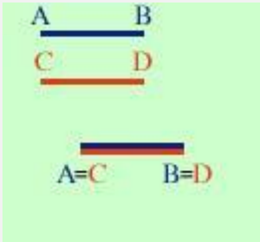
Potremo sviluppare la teoria della misura all'interno di una classe di grandezze.

Definiamo ***Classe di grandezze*** un insieme di enti per cui sia possibile definire:

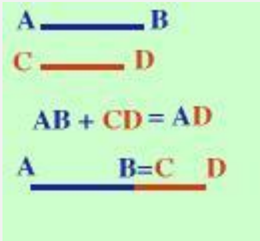
- l'uguaglianza (congruenza)
- la somma

La classe di grandezze su cui lavoreremo sara' quella dei segmenti; infatti l'insieme dei segmenti sara' una classe di grandezze perche':

Posso dire quando due segmenti sono congruenti



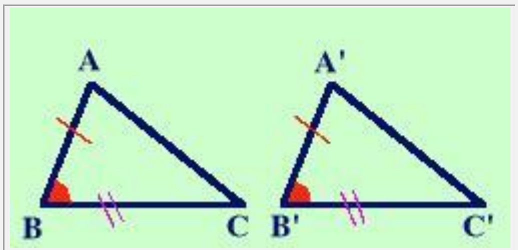

Posso definire la somma fra due segmenti in modo che il risultato sia ancora un segmento



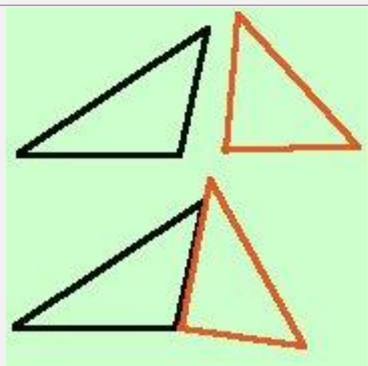

---

Per fare un esempio di insieme di enti che non e' una classe di grandezze, possiamo pensare l'insieme dei triangoli; infatti:

Posso dire quando due triangoli sono congruenti




Non posso definire la somma fra due triangoli in modo che il risultato sia **sempre** un triangolo

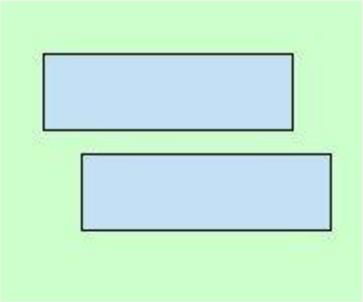


Vediamo qualche altro esempio di classi di grandezze.

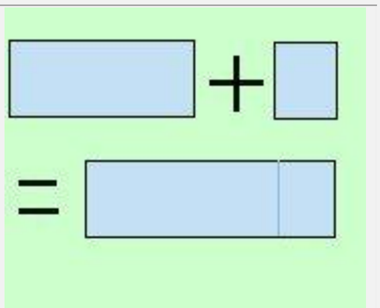
---

L'insieme dei rettangoli aventi altezze congruenti (va bene un qualunque lato congruente):

Posso dire quando due rettangoli con la stessa altezza sono congruenti (e' sufficiente che abbiano congruente anche la base)

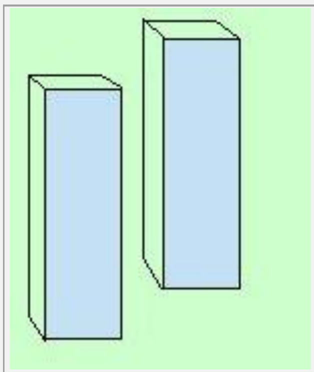


Posso definire la somma fra due rettangoli con la stessa altezza e il risultato e' ancora un rettangolo avente la stessa altezza e come base la somma delle basi

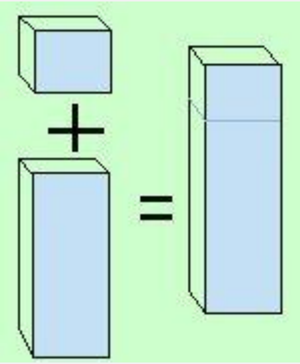


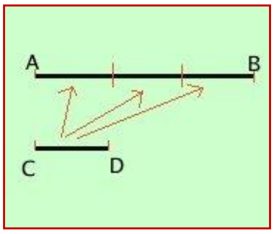
Un insieme di parallelepipedi retti aventi basi congruenti; la base puo' essere qualunque figura piana, ma come esempio in figura prendiamo la base rettangolare:

Posso dire quando due parallelepipedi con la stessa base sono congruenti(e' sufficiente che abbiano congruente anche l'altezza)



Posso definire la somma fra due parallelepipedi con la stessa base e il risultato e' ancora un parallelepipedoavente la stessa base e per altezza la somma delle altezze





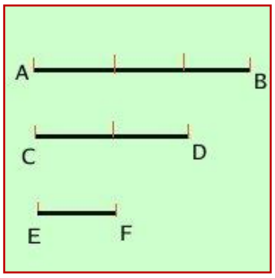

Ho fatto questi esempi perche' saranno queste classi di grandezze che mi permetteranno di applicare le misure alle figure piane ed alle figure solide.

## 2. Grandezze commensurabili

Diremo che due grandezze sono fra loro ***commensurabili*** se e' possibile individuare la misura di una grandezza rispetto all'altra.

Definiamo ***misura*** di una grandezza rispetto ad un'altra il numero di volte che la prima grandezza contiene la seconda (cioe' il rapporto fra la prima e la seconda grandezza).
Sono possibili due casi:

- **La prima grandezza contiene la seconda un numero intero di volte**
  In tal caso la misura della prima grandezza rispetto alla seconda e' data dal numero di volte che la prima grandezza contiene la seconda.
  In figura la misura del segmento AB rispetto al segmento CD vale 3:
  $$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 3$$
  Il segmento AB si dice ***multiplo*** di CD;
  il segmento CD si dice ***sottomultiplo*** di AB;
  la misura di AB rispetto a CD e' un numero intero.
- **La prima grandezza non contiene la seconda un numero intero di volte.**
  In tal caso occorre cercare una terza grandezza che sia contenuta esattamente sia nella prima che nella seconda (sottomultipla comune). Allora la misura cercata sara' il rapporto fra le misure della prima grandezza rispetto alla terza e la seconda grandezza rispetto alla terza.
  In figura la terza grandezza e' contenuta tre volte nella prima e due volte nella seconda quindi:
  $$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}}{\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}}} = \frac{3}{2}$$
  In questo caso la misura di AB rispetto a CD sara' un numero razionale.
  Ragionando con il senso comune, bastera' prendere come terza grandezza una grandezza abbastanza piccola ed allora sara' sempre possibile trovare una sottomultipla comune; pero' il senso comune non sempre e' esatto; anzi dimostreremo nella prossima pagina che vi sono segmenti per cui **non e' possibile** trovare una sottomultipla comune.

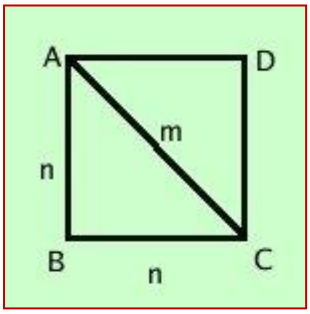



## 3. Grandezze incommensurabili

Mostriamo come prima cosa che esistono segmenti incommensurabili, cioe' per cui non e' possibile trovare nessuna sottomultipla comune: lo vedremo sul lato e la diagonale del quadrato.

Teorema:
La diagonale ed il lato di un quadrato sono fra loro incommensurabili.

| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| ABCD quadrato | $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \neq \frac{m}{n}$ |




La tesi significa che non posso trovare nessuna sottomultipla comune e quindi il rapporto fra AC ed AB non potra' essere espresso come rapporto di due numeri **m** ed **n** .

Facciamo la dimostrazione per assurdo:
supponiamo che esista una sottomultipla per cui AC valga m ed AB valga **n**; mostriamo che otteniamo un risultato impossibile.
Se $\overline{AC} = m$ ed $\overline{AB} = n$ per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABC avremo:
$m^2 = n^2 + n^2$
cioe':
$m^2 = 2\ n^2$
Ora esistono due teoremi sulla scomposizione di un numero in fattori primi che ci mostrano che questa uguaglianza e' impossibile:

- Primo:
  se due numeri sono uguali, allora hanno la stessa scomposizione in fattori primi
- Secondo:
  se un numero e' elevato al quadrato, allora tutti i suoi fattori primi compaiono un numero pari di volte (sarebbe a dire che tutti i fattori primi sono a potenze 2 o 4 o 6 eccetera; ad esempio 144 che e' il quadrato di 12 si scompone come $2^4 \cdot 3^2$).

Osserviamo l'uguaglianza:

$$m^2 = 2\ n^2$$

I due termini prima e dopo l'uguale devono avere gli stessi fattori primi e nello stesso numero.
Il fattore 2 nel primo termine, essendo questo un quadrato deve esservi un numero pari di volte: 2 oppure 4 oppure 6...
Il fattore 2 nel secondo termine, internamente ad $n^2$ dovra' comparire un numero pari di volte cioe' 2 o 4 o 6... pero' c'e' anche il 2 fuori di $n^2$ e quindi dopo l'uguale il fattore 2 compare un numero dispari di volte.
Quindi l'uguaglianza non e' vera ed il teorema e' dimostrato: i segmenti AC e AB sono tra loro incommensurabili.

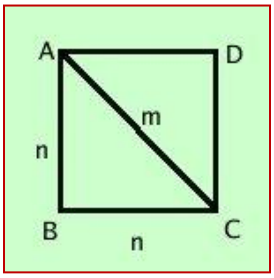
---

Diremo che due grandezze sono ***incommensurabili*** se non hanno nessuna sottomultipla comune.
Sara' a dire che la misura non potra' essere espressa da un numero razionale; per poter procedere quindi avremo bisogno di un nuovo tipo di numeri che ci permettano di superare l'ostacolo: i cosiddetti **Numeri Reali**

---

Non prendere questo teorema troppo alla leggera: e' il responsabile della morte di una grande civilta' (nota storica):
*Per parlare di questo teorema dobbiamo parlare di Pitagora e della setta dei pitagorici. I pitagorici erano una specie di multinazionale del quinto secolo avanti Cristo, con sede centrale a Crotone, ma con le mani in pasta nei governi delle varie citta' della Magna Grecia, dove riuscivano a indirizzare le politiche dei vari tiranni utilizzando la loro magia-religione basata sulla numerologia .*
*Erano persone piuttosto strane per l'epoca, vegetariani perche' credevano alla trasmigrazione delle anime, dormivano meno di 4 ore per notte e somigliavano piu' a dei monaci che a dei matematici.*

*Pitagora ed i pitagorici erano guidati dalla fede che il numero fosse il principio di tutte le cose, cioe' la Divinita' stessa. Ottennero vari successi, sembra che lo stesso Pitagora scoprisse la relazione fra la musica e le frazioni e questo lo rinforzo' nella sua fede.*
*Quando questo teorema fu scoperto, ebbe l'effetto di un terremoto sui pitagorici (non si sa se Pitagora fosse ancora vivo): il numero, che doveva essere la divinita', non riusciva nemmeno a misurare il rapporto fra due segmenti! Era come scoprire che il Dio fino allora adorato era il diavolo!*
*Si cerco' di tenere segreto il teorema anche fra gli adepti, ma ci fu chi parlo', e sebbene pagasse la sua colpa con il suo assassinio, ormai il teorema era nozione comune e la fede pitagorica crollo'.*
*Se una civilta' quale la pitagorica si basa su una fede e questa fede crolla, anche la civilta' e' destinata a sparire: vi furono rivolte ed i pitagorici furono perseguitati ed i loro centri bruciati, la civilta' pitagorica passo' il testimone a Platone ed Aristotele.*




## 4. Calcolo approssimato di $\sqrt{2}$

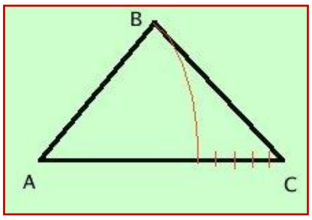
Cerchiamo di vedere come rappresentare e quanto vale questo nuovo tipo di numero che misura il rapporto fra la diagonale ed il lato del quadrato.
Partiamo da:
$m^2 = 2\, n^2$
Posso anche scrivere:

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

Applicando l'operazione di estrazione di radice da una parte e dall'altra otteniamo:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2}$$

Quindi il nuovo numero verra' indicato come $\sqrt{2}$.
Vediamo ora di calcolare approssimativamente quanto vale il numero trovato.
Riportiamo il segmento AB sulla diagonale AC, sara' contenuto 1 volta.
Ora prendiamo un decimo del segmento AB e riportiamolo sulla parte di AC che resta, sara' contenuto 4 volte.
Prendiamo un centesimo del segmento AB ..........




in questo modo posso avvicinarmi al valore di $\sqrt{2}$ quanto me lo permette il foglio di lavoro.
Cosi' facevano gli antichi greci.
Noi, che non siamo antichi greci, possiamo impostare sulla calcolatrice il valore $\sqrt{2}$ ed otteniamo:
$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095.....$ Nota:

---

E' un numero decimale illimitato e non periodico e, come tipo di numero lo chiameremo numero reale non razionale.
Naturalmente questo e' solo il primo di una serie infinita di numeri non razionali; tra i piu' importanti:
il rapporto fra la circonferenza ed il suo diametro;
il rapporto fra la diagonale del cubo ed il suo lato.
Sorge il problema:
se questi sono effettivamente numeri, deve essere possibile definirli facendo ricorso unicamente ai numeri gia' noti; il problema, gia' noto al tempo della Magna Grecia fu risolto solamente nel 19° secolo con le sezioni di Dedekind (classi contigue).

Nota: Devi fare attenzione alla differenza fra il numero $\sqrt{2}$ ed il numero 1,4142135623730950
Infatti per quanti termini tu prenda (anche centomila) il secondo numero sara' sempre approssimato e sempre un numero razionale, mentre il numero $\sqrt{2}$ e' un valore ben preciso ma diverso.
Comunque negli esercizi, quando dovrai rappresentarlo su una retta per calcolare dove si trova il numero userai il numero con le cifre decimali, mentre per indicare il numero preciso in figura dovrai scrivere $\sqrt{2}$

## 5. Come individuare $\sqrt{2}$ sulla retta razionale

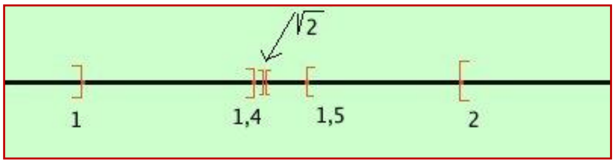
Vediamo come fare ad individuare il numero $\sqrt{2}$ sulla retta dei numeri razionali partendo dal valore:

$\sqrt{2}$ approssimato a 1,414293....

Facciamo due insiemi di numeri razionali a partire dal nostro numero:
a sinistra i numeri che otteniamo approssimando per difetto alla prima, seconda, terza,... cifra del numero
a destra i numeri che otteniamo approssimando per eccesso alla prima, seconda, terza.... cifra del numero

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1,4 | 1,5 |
| 1,41 | 1,42 |
| 1,414 | 1,415 |
| 1,4142 | 1,4143 |
| ........... | ........... |

Questi numeri sono tutti razionali, infatti, ad esempio 1,415 equivale alla frazione $\frac{1415}{1000}$.
Se andiamo a rappresentare questi numeri sulla retta razionale, otteniamo:




Prima ho rappresentato 1 e 2, poi 1,4 ed 1,5, poi 1,41 ed 1,42; non ho scritto questi ultimi numeri in figura perche' ormai troppo vicini; li ho solo indicati con le parentesi quadre.
I numeri per difetto si avvicinano da sinistra, i numeri per eccesso si avvicinano da destra.
Il numero $\sqrt{2}$ sara' in mezzo a questi numeri che si avvicinano sia da destra che da sinistra e pertanto sara' individuato.
Questo e' un ragionamento intuitivo: ora dobbiamo trasformarlo in un ragionamento formale: lo faremo nella prossima pagina.

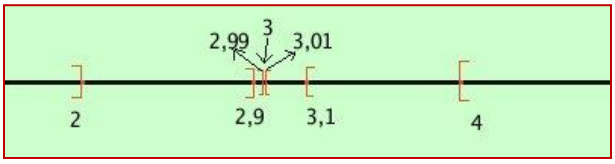
---

Intanto mostriamo che lo stesso ragionamento possiamo farlo per un qualunque numero razionale tipo 3, cioe' 3,000000..... o, che e' la stessa cosa, 2,999999......
Facciamo due insiemi di numeri razionali a partire dal nostro numero:
a sinistra i numeri che otteniamo approssimando per 3 per difetto alla prima, seconda, terza,... cifra del numero, considerandone la forma 2,99999...
a destra i numeri che otteniamo approssimando 3 eccesso alla prima, seconda, terza.... cifra del numero considerandone la forma 3,00000....

| | |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 2,9 | 3,1 |
| 2,99 | 3,01 |

2,999 3,001
2,9999 3,0001
........... ...........
........... ...........

Se andiamo a rappresentare questi numeri sulla retta razionale, otteniamo:




I numeri per difetto si avvicinano da sinistra, i numeri per eccesso si avvicinano da destra ed, alla fine, il numero 3 sara' dove si avvicinano questi numeri e pertanto sara' individuato.

***Approssimazione per difetto:***
significa approssimare il numero con valori piu' bassi
dato il numero decimale 1,414293.... per approssimare per difetto basta scrivere il numero fino alla cifra a cui si deve approssimare togliendo gli altri termini:

| | |
|---|---|
| approssimato per difetto alla prima cifra | 1 |
| approssimato per difetto alla seconda cifra | 1,4 |
| approssimato per difetto alla terza cifra | 1,41 |
| approssimato per difetto alla quarta cifra | 1,414 |
| approssimato per difetto alla quinta cifra | 1,4142 |

***Approssimazione per eccesso***:
Significa approssimare il numero con valori piu' alti
Dato il numero decimale 1,414293.... per approssimare per eccesso basta scrivere il numero fino alla cifra a cui si deve approssimare togliendo gli altri termini ed infine **aumentando di 1 l'ultima cifra**

| | | |
|---|---|---|
| approssimato per eccesso alla prima cifra | 1 + 1 | = 2 |
| approssimato per eccesso alla seconda cifra | 1,4 + 0,1 | = 1,5 |
| approssimato per eccesso alla terza cifra | 1,41 + 0,01 | = 1,42 |
| approssimato per eccesso alla quarta cifra | 1,414+ 0,001 | = 1,415 |
| approssimato per eccesso alla quinta cifra | 1,4142+ 0,0001 | = 1,4143. |

## 6. Classi contigue di numeri razionali

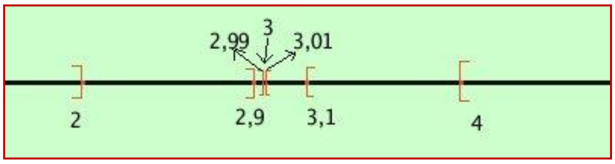
Ora esponiamo con rigore matematico quanto fatto intuitivamente nella pagina precedente: introduciamo il concetto di **classi contigue**.

Diremo che due insiemi di numeri (razionali nel nostro caso) formano due ***classi contigue*** se:

- gli insiemi sono **separati**: cioe' ogni elemento della prima classe e' sempre inferiore di ogni elemento della seconda classe
- gli insiemi godono dell'**avvicinamento indefinito**: cioe' posso scegliere un elemento del primo insieme ed un elemento del secondo insieme in modo che la loro differenza sia minore di un qualunque numero piccolissimo a piacere.

Esempio sulle proprieta' di due classi contigue:
Mostriamo che i due insiemi di numeri:

| Prima classe | Seconda classe |
|---|---|
| 2<br>2,9<br>2,99<br>2,999<br>2,9999<br>2,99999<br>........... | 4<br>3,1<br>3,01<br>3,001<br>3,0001<br>3,00001<br>........... |



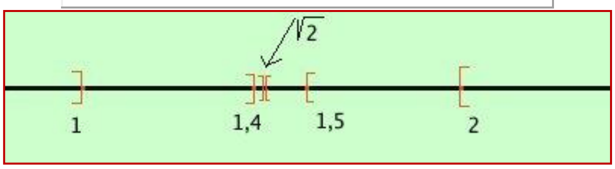

formano due classi contigue di numeri razionali:

- **sono separate**
  ogni numero della prima classe e' piu' piccolo di 3
  ogni numero della seconda classe e' piu' grande di 3
- **godono dell'avvicinamento indefinito**
  Scelgo un numero piccolissimo ad esempio 0,000001 (un milionesimo); posso prendere un numero nella prima classe ed un numero della seconda classe tali che la differenza sia ancora piu' piccola basta prendere due numeri con piu' di 6 cifre decimali, ad esempio prendo quelli con 7 cifre decimali
  2,9999999 3,0000001
  La loro differenza vale:
  3,0000001 - 2,9999999 = 0,0000002
  cioe' due decimilionesimi che e' meno di un milionesimo.

---

Mostriamo che i due insiemi di numeri:

| Prima classe | Seconda classe |
|---|---|
| 1<br>1,4<br>1,41<br>1,414<br>1,4142<br>1,41421<br>1,414213<br>1,4142135<br>1,41421356<br>1,414213562<br>1,4142135623<br>............ | 2<br>1,5<br>1,42<br>1,415<br>1,4143<br>1,41422<br>1,414214<br>1,4142136<br>1,41421357<br>1,414213563<br>1,4142135624<br>........... |




formano due classi contigue di numeri razionali:

- **sono separate**
  ogni numero della prima classe e' piu' piccolo di $\sqrt{2}$
  ogni numero della seconda clase e' piu' grande d i $\sqrt{2}$
- **godono dell'avvicinamento indefinito**
  Scelgo un numero piccolissimo ad esempio 0,000001 (un milionesimo); posso prendere un numero nella prima classe ed un numero della seconda classe tali che la differenza sia ancora piu' piccola basta prendere due numeri con piu' di 6 cifre decimali, questa volta prendo quelli con 9 cifre decimali
  1,414213562     1,414213563
  La loro diffferenza vale:
  1,414213563 - 1,414213562 = 0,000000001
  cioe' un miliardesimo che e' meno di un milionesimo.

---

Teorema (*senza dimostrazione*):
Due classi contigue ammettono uno ed un solo elemento separatore.

---

Il problema era di riuscire a definire i nuovi numeri utilizzando esclusivamente i numeri razionali che gia' conoscevamo.
Arrivati a questo punto possiamo finalmente definire il **Numero Reale** utilizzando le classi contigue di numeri razionali.

## 7. I numeri reali

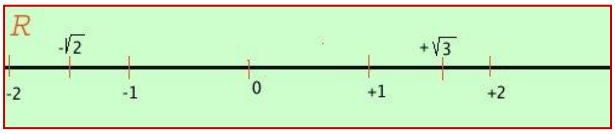
Definiamo ***Numero Reale*** l'elemento separatore di due classi contigue di numeri razionali ci accorgiamo subito che esistono due tipi di numeri reali:

- i **numeri reali razionali** cioe' i numeri reali che possono essere espressi anche come numeri razionali come ad esempio 3
- i **numeri reali non razionali** cioe' i numeri reali che non possono essere espressi anche come numeri razionali come ad esempio $\sqrt{2}$.

## 8. La retta reale

Facciamo ora la conoscenza di un ente che ci accompagnera' lungo tutta l'analisi matematica e la geometria cartesiana: la retta reale ***R***.

In questa retta ad ogni punto corrisponde un numero reale e ad ogni numero reale corrisponde un punto.
Cioe' esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti della retta ed i numeri reali:



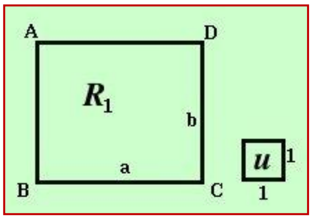

---

C'e' da dire che i numeri reali non razionali saranno molti di piu' dei numeri reali razionali: addirittura avremo che, mentre i numeri razionali, per quanto infiniti sono un'infinita' numerabile, i numeri reali sono un'infinita' non numerabile e siccome, rappresentandoli su una retta, fra un numero e l'altro, non esiste piu' spazio, si parlera' di **continuo.**
L'insieme dei numeri razionali e' un'infinita' numerabile: significa che e' possibile impostare una corrispondenza biunivoca fra i numeri razionali ed i numeri interi, facendo corrispondere ad ogni numero razionale un numero intero, anche se la cosa puo' sembrare strana.

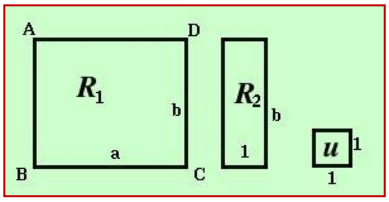
# 9. Applicazioni della teoria della misura

Ora possiamo passare a trattare le figure piane come superfici da misurare. Per indicare un'area, ad esempio del quadrilatero ABCD scriveremo:
$A_s(ABCD) =$ o, se non ci sono problemi di comprensione, semplicemente $A_s =$

## a) Area del rettangolo




Determiniamo quanto vale l'area del rettangolo $R_1$ di vertici ABCD sappiamo che:
$\overline{BC} = a$ e $\overline{CD} = b$
Misureremo l'area rispetto all'unita' di misura $u$ fornita dal rettangolo (quadrato) di lati 1 .
Per poter misurare l'area abbiamo bisogno di un rettangolo intermedio $R_2$ di lati b ed 1 .
Ora la misura di $R_1$ rispetto ad $R_2$ sara' a:




$$\frac{R_1}{R_2} = a$$

cioe'
$R_1 = a \cdot R_2$
Ora misuro $R_2$ rispetto ad $u$

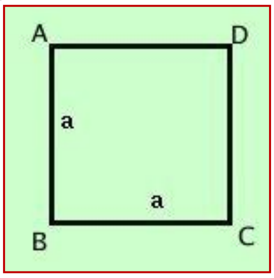
$$\frac{R_2}{u} = b$$

cioe'
$R_2 = b \cdot u$
Ora posso sostituire:
$R_1 = a \cdot R_2 = a \cdot b \cdot u = a\, b$
cioe'

| | |
|---|---|
| La misura dell'area del rettangolo si ottiene moltiplicando la misura della base per la misura dell'altezza | $A_s(ABCD) = a{\cdot}b$ |

Per memorizzarlo: **base per altezza**

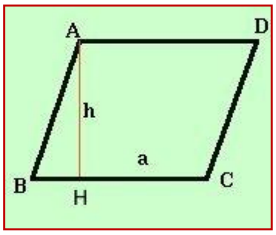
---




Se invece di un rettangolo abbiamo un quadrato di lato a la formula diventa
$A_s = a^2$
Cioe'
La misura dell'area del quadrato si ottiene elevando a quadrato la misura di un lato.
Per memorizzarlo: **lato al quadrato.**

---

## b) Area del parallelogramma




Per determinare l'area del parallelogramma basta fare riferimento all'osservazione fatta in fondo alla pagina dell'equiscomponibilita' fra parallelogrammi :
Un parallelogramma e' equivalente ad un rettangolo che abbia la stessa base e la stessa altezza.
Quindi:

| | |
|---|---|
| La misura dell'area del parallelogramma si ottiene moltiplicando la misura della base per la misura dell'altezza | $A_s(ABCD) = a \cdot h$ |

Per memorizzarlo: **base per altezza.**

## c) Area del triangolo e area del rombo

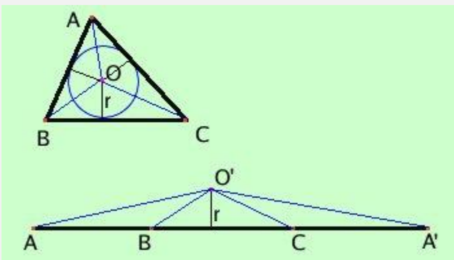
**Area del triangolo**
Anche qui e' sufficiente fare riferimento al teorema sull'equiscomponibilita' fra parallelogramma e triangolo:
Un triangolo e' equivalente ad un parallelogramma avente come base la stessa base e per altezza il doppio dell'altezza del parallelogramma.
Quindi:

| | |
|---|---|
| La misura dell'area del triangolo si ottiene dividendo a meta' il prodotto fra la misura della base e la misura dell'altezza | $A_s(ABC) = \dfrac{a \cdot h}{2}$ |

Per memorizzarlo: **base per altezza diviso 2**

---

Conoscendo il perimetro del triangolo ed il raggio del cerchio inscritto, per quanto visto nel capitolo sull'equivalenza, possiamo utilizzare la formula:

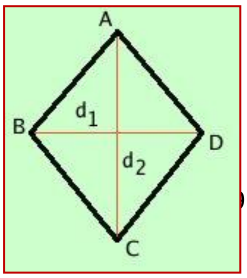



La misura dell'area del triangolo si ottiene dividendo a meta' il prodotto fra la misura del perimetro e la misura del raggio del cerchio inscritto nel triangolo:

$$A_s(ABC) = \frac{2p \cdot r}{2} = \frac{(a+b+c) \cdot r}{2}$$

---

**Area del rombo**



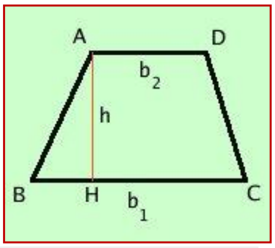

Come conseguenza notevole troviamo l'area del rombo considerandola come l'area di due triangoli.
Infatti il rombo ABCD puo' essere pensato composto da due triangoli congruenti ABD e BCD, di base la diagonale $d_1$ e con somma delle

altezze la diagonale $d_2$.
Quindi:

| | |
|---|---|
| La misura dell'area del rombo si ottiene dividendo a meta' il prodotto fra la misura delle due diagonali. | $A_s(ABCD) = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$ |

Per memorizzarlo: **diagonale per diagonale diviso 2.**

## d) Area del trapezio



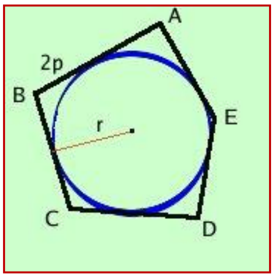

Facciamo riferimento al teorema sull'equiscomponibilita' fra trapezio e triangolo:
Un trapezio e' equivalente ad un triangolo avente come base la somma delle basi e per altezza la stessa altezza.
Quindi:

| | |
|---|---|
| La misura dell'area del trapezio si ottiene dividendo a meta' il prodotto fra la somma delle misure delle basi e la misura dell'altezza. | $A_s(ABCD) = \dfrac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$ |

Per memorizzarlo: **base maggiore piu' base minore per altezza diviso 2**

---

## e) Area del poligono circoscritto



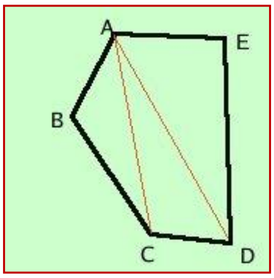

Facciamo riferimento al teorema sull'equiscomponibilita' fra poligono circoscritto e triangolo:
Un poligono circoscritto e' equivalente ad un triangolo avente come base il perimetro 2p e per altezza il raggio r (apotema)
Quindi:
indichiamo il perimetro come 2p in modo che p e' il perimetro diviso a meta'

| | |
|---|---|
| La misura dell'area di un poligono circoscritto si ottiene moltiplicando il semiperimetro per il raggio del cerchio inscritto. | $A_s(ABCDE) = p \cdot r$ |

Per memorizzarlo: **perimetro per apotema diviso 2**

---

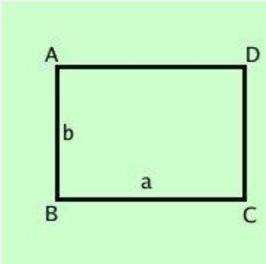
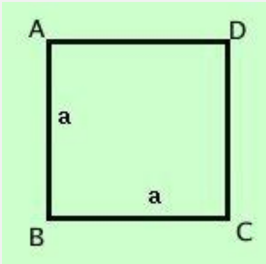
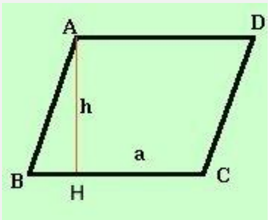
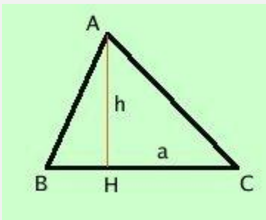
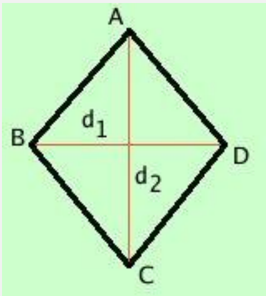
## f) Area di un poligono

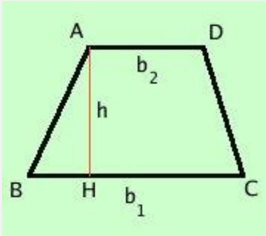
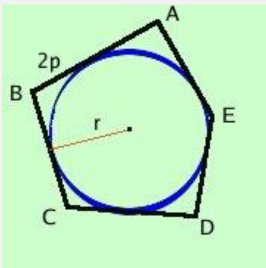
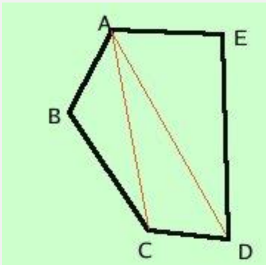



Se il poligono non e' circoscrittibile, per calcolarne l'area conviene dividerlo in triangoli e quindi trovare l'area dei singoli triangoli.

Troverai poi l'area del poligono sommando le aree dei singoli triangoli.

## g) Tabella di riepilogo

| | | |
|---|---|---|
| Rettangolo |  | $A_S\,(ABCD) = a \cdot b$<br>$A_s = \overline{BC} \cdot \overline{AB}$ |
| Quadrato |  | $A_s\,(ABCD) = a^2$<br>$A_s = \overline{BC^2}$ |
| Parallelogramma |  | $A_s\,(ABCD) = a \cdot h$<br>$A_s = \overline{BC} \cdot \overline{AH}$ |
| Triangolo |  | $A_s\,(ABC) = \dfrac{a \cdot h}{2}$<br>$A_s\,(ABC) = \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2}$ |
| Rombo |  | $A_s\,(ABCD) = \dfrac{d_1 \cdot d_1}{2}$<br>$A_s\,(ABCD) = \dfrac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2}$ |

| | | |
|---|---|---|
| Trapezio |  | $A_s(ABCD) = \dfrac{(b_1 + b_2)\cdot h}{2}$<br>$A_s(ABCD) = \dfrac{(\overline{BC} + \overline{AD})\cdot \overline{AH}}{2}$ |
| Poligono circoscritto |  | $A_s(ABCDE) = \dfrac{2p\cdot r}{2} = p\cdot r$ |
| Poligono qualunque |  | Dividere il poligono in triangoli, calcolarne le aree e poi sommarle |

# N. *Proporzionalita'*

Prima di passare alla similitudine tra figure, cioe' all'uguaglianza della forma, vediamo di parlare di proporzioni, cioe' di uguaglianze di rapporti.

## 1. Definizione di proporzione

Definizione:
Una proporzione e' l'uguaglianza fra due rapporti.
Ad esempio:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

cioe' in pratica si tratta semplicemente dell'uguaglianza di due frazioni equivalenti.

---

Scriveremo una proporzione sempre nel modo seguente:
**1 : 2 = 3 : 6**
Si legge:
**Uno sta a Due come Tre sta a Sei**
Il diviso si legge ***sta*** - l'uguale si legge ***come***.

## 2. Nomenclatura

E' importante: devi sapere come chiamare esattamente i termini di una proporzione:
Consideriamo come esempio la proporzione:

$1 : 2 = 3 : 6$

1,2,3 e 6 sono i **termini** della proporzione
1 e 3 essendo avanti al diviso si chiamano **antecedenti**
2 e 6 essendo dietro il diviso si chiamano **conseguenti**
2 e 3 essendo in mezzo nella proporzione si chiamano **medi**
1 e 6 essendo ai bordi nella proporzione si chiamano **estremi**
6 e' detto anche **quarto proporzionale**

---

Se in una proporzione i medi (oppure gli estremi) sono uguali allora la proporzione si dice **continua**
Esempio:sono continue le proporzioni
$1 : 2 = 2 : 4$ uguali i medi $2 : 1 = 4 : 2$ uguali gli estremi
In una proporzione continua il termine uguale si chiama **medio proporzionale**
$1 : 2 = 2 : 4$ 2 e' il medio proporzionale fra 1 e 4
In una proporzione continua il termine diverso al secondo membro si chiama **terzo proporzionale**
$1 : 2 = 2 : 4$ 4 e' il terzo proporzionale.

## 3. Proprieta' delle proporzioni

Le proprieta' delle proporzioni sono strettamente collegate alle proprieta' delle frazioni: se pensi la proporzione come uguaglianza fra due frazioni alcune proprieta' diventano banali; vediamo ora le proprieta' in particolare.

### a) Proprieta' fondamentale

La proprieta' fondamentale dice che:

**In ogni proporzione, il prodotto dei medi e' uguale al prodotto degli estremi**

Cioe' data, ad esempio, la proporzione:
$1 : 2 = 3 : 6$
avremo sempre:
$2 \cdot 3 = 1 \cdot 6$
**2** e **3** sono i medi ed **1** e **6** sono gli estremi; per indicare il prodotto ho preferito usare il simbolo · invece del simbolo specifico **x.**

---

Nota: se pensi la proporzione come una frazione:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

la proprieta' fondamentale si riduce a moltiplicare la frazioni in croce.

---

La proprieta' fondamentale e' utilissima per trovare il quarto proporzionale in una proporzione; infatti supponiamo di avere la proporzione:

**5 : 2 = 15 : x**

con quarto proporzionale **x** termine incognito.

Per trovare il valore della x applico la proprieta' fondamentale:

**2 · 15 = 5 · x**

Leggendo a rovescio l'uguaglianza:

**5x = 30**

Dividendo entrambe i termini per 5 ottengo:

$$\frac{5x}{5} = \frac{30}{5}$$

Ottengo:

**x = 6**

quindi il quarto proporzionale vale 6 e la mia proporzione e':

**5 : 2 = 15 : 6**

## b) Proprieta' dell'invertire

La proprieta' dell'invertire dice che:

> **Scambiando ogni antecedente con il proprio conseguente la proporzione resta valida**

Cioe' data, ad esempio, la proporzione:

**1 : 2 = 3 : 6**

**1** e **3** sono gli antecedenti e **2** e **6** sono i loro conseguenti.

Avremo valida anche la proporzione:

**2 : 1 = 6 : 3**

---

Nota: se pensi la proporzione come una frazione:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

la proprieta' dell'invertire si riduce ad invertire le frazioni, da cui il nome:

$$\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$$

## c) Proprieta' del permutare

La proprieta' del permutare dice che:

**Scambiando tra loro i medi oppure fra loro gli estremi la proporzione resta valida**

Cioe' data ad esempio la proporzione:
$1 : 2 = 3 : 6$
**2** e **3** sono i medi e **1** e **6** sono gli estremi.
Avremo valide anche le proporzioni:
$1 : 3 = 2 : 6$
$6 : 2 = 3 : 1$

---

Nota: se applichi la proprieta' fondamentale alle tre proporzioni sopra ottieni sempre gli stessi risultati:
$1 : 2 = 3 : 6 \qquad 2 \cdot 3 = 1 \cdot 6 \qquad 6 = 6$
$1 : 3 = 2 : 6 \qquad 3 \cdot 2 = 1 \cdot 6 \qquad 6 = 6$
$6 : 2 = 3 : 1 \qquad 2 \cdot 3 = 6 \cdot 1 \qquad 6 = 6$

---

## d) Proprieta' del comporre

La proprieta' del comporre dice che:

**La somma del primo termine e del secondo sta al primo come la somma del terzo e quarto termine sta al terzo**

ed anche:

**La somma del primo termine e del secondo sta al secondo come la somma del terzo e quarto termine sta al quarto**

Cioe' data, ad esempio, la proporzione:
$1 : 2 = 3 : 6$
avremo valide anche le proporzioni:

- $(1+2) : 2 = (3+6) : 6 \qquad 3 : 2 = 9 : 6$
- $(1+2) : 1 = (3+6) : 3 \qquad 3 : 1 = 9 : 3$

---

Nota: e' una proprieta' utile da applicare quando in una proporzione non conosci due dati, pero' conosci la loro somma.
Ad esempio, supponiamo di avere la proporzione:
$1 : 2 = x : y$
con x ed y incognite; se pero' sappiamo che, ad esempio:
$x + y = 9$
allora, applicando la proprieta' del comporre, avremo:
$(1+2) : 2 = (x+y) : y \qquad 3 : 2 = 9 : y$

Posso trovare la y;
applico la proprieta' fondamentale:
$3 \cdot y = 2 \cdot 9$
$3y = 18$
divido entrambe i termini per 3 ed ottengo $y = 6$
e siccome:
$x + y = 9$
avro':
$x + 6 = 9$
Quindi devo trovare quel numero che sommato a 6 mi da' come risultato 9
$x = 3$
e la mia proporzione e':
$1 : 2 = 3 : 6$

---

Per risolvere non ho usato esplicitamente le proprieta' delle equazioni, perche' di solito le proporzioni si fanno prima di sviluppare le equazioni.

## e) Proprieta' dello scomporre

La proprieta' dello scomporre dice che:

**La differenza fra il primo ed il secondo termine sta al primo come la differenza fra il terzo ed il quarto termine sta al terzo**

ed anche:

**La differenza fra il primo ed il secondo termine sta al secondo come la differenza fra il terzo ed il quarto termine sta al quarto**

Cioe' data, ad esempio, la proporzione:
$3 : 2 = 9 : 6$
avremo valide anche le proporzioni:

- $(3-2) : 2 = (9-6) : 6 \qquad 1 : 2 = 3 : 6$
- $(3-2) : 3 = (9-6) : 9 \qquad 1 : 3 = 3 : 9$

---

Nota: e' una proprieta' utile da applicare quando in una proporzione non conosci due dati, pero' conosci la loro differenza.
Ad esempio, supponiamo di avere la proporzione:
$3 : 2 = x : y$
con x ed y incognite; se pero' sappiamo che, ad esempio:
$x - y = 3$
allora, applicando la proprieta' dello scomporre, avremo:
$(3-2) : 2 = (x-y) : y \qquad 1 : 2 = 3 : y$
Posso trovare la y;

applico la proprieta' fondamentale:
$2 \cdot 3 = 1 \cdot y$
$6 = y$
$y = 6$
e siccome:
$x - y = 3$
avro':
$x - 6 = 3$
togliendo 6 da x ottengo 3 quindi:
$x = 9$
e la mia proporzione e':
$3 : 2 = 9 : 6$

---

Per risolvere non ho usato esplicitamente le proprieta' delle equazioni, perche' di solito le proporzioni si fanno prima di sviluppare le equazioni.

## f) Unicita' del quarto proporzionale

Vale la proprieta':

> **Dati tre termini di una proporzione esiste ed e' unico il quarto proporzionale**

Cioe' data, ad esempio, la proporzione:
$3 : 2 = 9 : x$
il quarto proporzionale **x** esiste ed e' unico.
Esiste in quanto, essendo x un estremo, posso ottenerlo facendo:

$$\text{Quarto proporzionale} = \frac{\text{Prodotto dei medi}}{\text{altro estremo}}$$

Se fosse un medio, potrei farlo diventare un estremo utilizzando la proprieta' dell'invertire.
Nel nostro caso:

$$x = \frac{2 \cdot 9}{3} = 6$$

E' unico perche' se per assurdo ne esistessero due diversi $x_1$ ed $x_2$ diversi fra loro, avremmo:

$$\frac{\text{Prodotto dei medi}}{\text{altro estremo}} = x_1 \neq x_2 = \frac{\text{Prodotto dei medi}}{\text{altro estremo}}$$

e quindi il primo e l'ultimo termine, identici tra loro, dovrebbero essere diversi: assurdo e quindi e' valida l'unicita' .

---

In quanto abbiamo ora visto, abbiamo anche come trovare il termine mancante di una proporzione:

- se mi manca un estremo applico la formula

$$\text{Termine mancante} = \frac{\text{Prodotto dei medi}}{\phantom{x}}$$

**altro estremo**

- se mi manca un medio applico la formula

$$\text{Termine mancante} = \frac{\text{Prodotto degli estremi}}{\text{altro medio}}$$

*Esempi:*

1) Trovare il termine mancante nella proporzione:

$4 : 3 = 8 : x$

Essendo mancante un estremo applico la prima formula:

$$x = \frac{\text{Prodotto dei medi}}{\text{altro estremo}} = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$$

e la proporzione e'

$4 : 3 = 8 : 6$

2) Trovare il termine mancante nella proporzione:

$4 : x = 8 : 6$

Essendo mancante un medio applico la seconda formula:

$$x = \frac{\text{Prodotto degli estremi}}{\text{altro medio}} = \frac{4 \cdot 6}{8} = 3$$

e la proporzione e':

$4 : 3 = 8 : 6$

## 4. Applicazione alle grandezze geometriche

Una grandezza geometrica e' un elemento di una classe di grandezze.
Chiameremo omogenee due grandezze appartenenti alla stessa classe di grandezze.
Ti consiglio un ripasso sul concetto di classe di grandezze.

Ora vogliamo applicare le proporzioni alle grandezze geometriche: pero' le grandezze geometriche sono di tipo diverso: segmenti, rettangoli con la stessa base, rettangoli con la stessa altezza, ecc...
Come fare quindi proporzioni fra coppie di grandezze diverse?
Per poterlo fare abbiamo bisogno di qualcosa che sia tipico di tutte le grandezze: questo sara' la loro misura.

**Diremo che quattro grandezze, due a due omogenee, sono in proporzione se sono in proporzione le loro misure.**

Quindi, d'ora in avanti, potremo parlare di proporzioni fra grandezze geometriche considerandone le relative misure.

# 5. Insiemi di grandezze proporzionali e criteri di proporzionalita'

Vediamo in questa pagina di fissare dei criteri che ci dicano quando due insiemi sono in proporzione.

Consideriamo due insiemi, ad esempio consideriamo l'insieme dei Numeri naturali, mettendo anche qualche numero ripetuto.
N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 3, 7, 8, ....}
E come corrispondente consideriamo l'insieme dei loro doppi, mettendo i numeri in corrispondenza:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N = { | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 3 | 7 | 4 | ... | } |
| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | | |
| 2N = { | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 10 | 6 | 14 | 8 | ... | } |

I due insiemi sono in proporzione secondo il rapporto 2, cioe' ogni numero della seconda classe diviso il numero corrispondente della prima classe ha come risultato 2.

Vediamo un criterio per dire quando due insiemi sono in proporzione senza dover calcolare il rapporto fra due elementi corrispondenti.

**Diremo che due classi di enti sono in proporzione se**
1. **Ad elementi uguali nella prima classe corrispondono nella seconda elementi uguali**
2. **Alla somma di elementi nella prima classe corrisponde nella seconda la somma degli elementi corrispondenti**

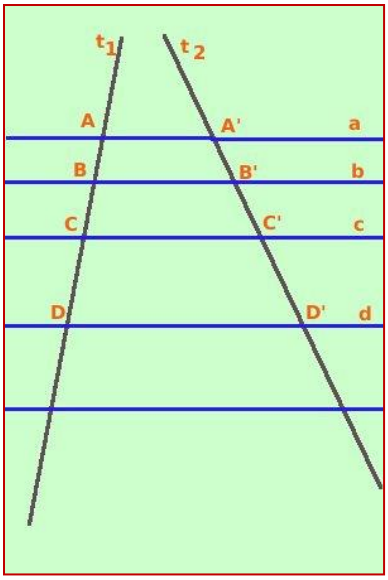
Vediamolo su un esempio:
1. **Ad elementi uguali nella prima classe corrispondono nella seconda elementi uguali**
   Significa che se sopra prendo due elementi uguali allora i corrispondenti sotto sono uguali.
   Se ad esempio sopra prendo **3** e **3** che sono uguali vedo che sotto corrispondono **6** e **6** che sono ancora uguali.
2. **Alla somma di elementi nella prima classe corrisponde nella seconda la somma degli elementi corrispondenti**
   Questo e' un po' piu' difficile perche' sembra uno scioglilingua, ma significa solamente che se sopra considero due numeri e la loro somma allora sotto i corrispondenti dei numeri mi danno la somma corrispondente a quella sopra.
   Se ad esempio sopra prendo **3** e **4** e considero che la loro somma e' **7** sotto i corrispondenti sono **6** e **8** e la loro somma e' **14** e **14** e' il corrispondente di **7**

$$\begin{array}{ccccc} 3 & + & 4 & = & 7 \\ | & & | & & | \\ 6 & + & 8 & = & 14 \end{array}$$

3. Alla somma di quelli sopra corrisponde la somma di quelli sotto.

Questo criterio ci permettera' di introdurre la proporzionalita' (similitudine) in geometria; bastera' mostrare che nella relazione fra grandezze geometriche si conservano l'uguaglianza e la somma.

# O. *Similitudine*




Partendo dai criteri fissati nella pagina precedente passiamo a definire la proporzione fra segmenti e successivamente definiamo la similitudine prima fra triangoli e poi fra figure in generale e vediamone anche alcune interessanti applicazioni.

## 1. Teorema di Talete

Il teorema di Talete e' uno dei pochi teoremi fondamentali della geometria, quindi devi studiarlo e conoscerlo perfettamente.
Vista la sua importanza lo dimostreremo nei particolari: per dimostrare che ci permette di costruire due insiemi di grandezze proporzionali useremo i criteri di proporzionalita' evidenziati nelle pagine precedenti.
Prima dimostreremo che si conserva l'uguaglianza poi dimostreremo che si conserva la somma.

### a) Enunciato del teorema di Talete

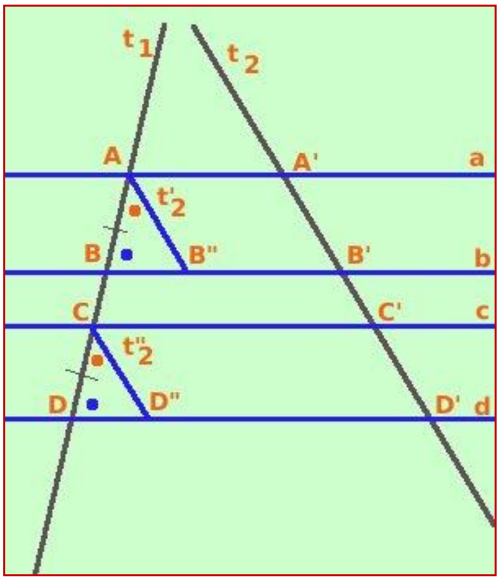
Segmenti compresi fra rette parallele tagliate da due trasversali formano due classi di grandezze proporzionali.

---

Un fascio di rette parallele e' l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data; naturalmente noi non possiamo disegnarle tutte, disegneremo solo quelle che ci servono, ma tu devi pensare che per ogni punto passa una delle rette del fascio.
Naturalmente quando parliamo di segmenti in proporzione intendiamo che le loro misure sono in proporzione

---

So per ipotesi che le rette **a**, **b**, **c**, **d** sono parallele, devo dimostrare che i segmenti formati sulla prima retta $\mathbf{t_1}$ e quelli formati sulla seconda retta $\mathbf{t_2}$ sono fra loro proporzionali:
**AB : A'B' = CD : C'D'**




| Ipotesi | Tesi |
|---|---|
| a // b // c // d //... | AB : A'B' = CD : C'D' |

Dividiamo la dimostrazione in due parti:
1. Prima dimostriamo che a segmenti uguali sulla prima trasversale corrispondono segmenti uguali sulla seconda trasversale.
2. Successivamente dimostriamo che alla somma di due segmenti sulla prima trasversale corrisponde sulla seconda la somma dei

segmenti corrispondenti (E' piu' difficile da dire che da fare).

## b) Conservazione dell'uguaglianza

Dimostriamo che a segmenti uguali sulla prima trasversale corrispondono segmenti uguali sulla seconda trasversale.

So per ipotesi che le rette **a**, **b**, **c**, **d** sono parallele, devo dimostrare che se i segmenti formati sulla prima retta sono uguali fra loro, allora anche i segmenti formati sulla seconda retta sono uguali fra loro:
se **AB = CD** allora **A'B' = C'D'**

| Ipotesi | | Tesi |
|---|---|---|
| a // b // c // d | AB=CD | A'B' = C'D' |

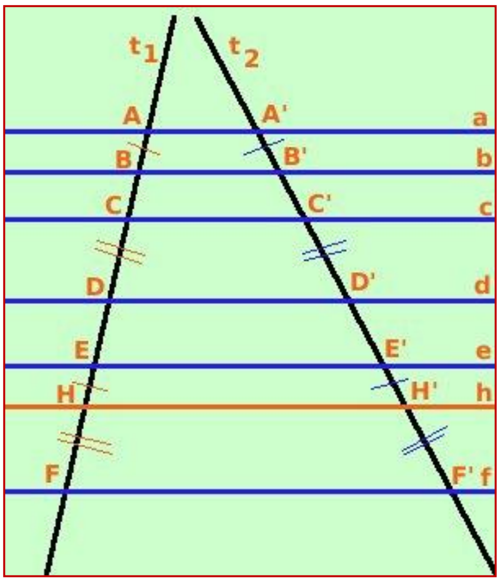
Dimostrazione:
Dal punto A traccio la parallela a $t_2$ che taglia la retta b in B";
Dal punto C traccio la parallela a $t_2$ che taglia la retta d in D".
La figura A B" B' A', avendo i lati opposti due a due paralleli, e' un parallelogramma e quindi AB"= A'B'.
La figura C D" D' C', avendo i lati opposti due a due paralleli, e' un parallelogramma e quindi CD"= C'D'.
Quindi per dimostrare che A'B'= C'D' bastera' dimostrare che sono uguali i triangoli ABB" e CDD" . Essi hanno:

- AB = CD per ipotesi
- $B\hat{A}B'' = D\hat{C}D''$
  perche' angoli corrispondenti rispetto alle parallele $t'_2$ e $t''_2$ tagliate dalla trasversale $t_1$
- $A\hat{B}B'' = C\hat{D}D''$.
  perche' angoli corrispondenti rispetto alle parallele b e d tagliate dalla trasversale $t_1$

Quindi per il secondo criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti ed in particolare AB"=CD".
Poiche' AB"= A'B' e CD"= C'D' segue:
A'B'= C'D'
Come volevamo dimostrare.

---

## c) Conservazione della somma



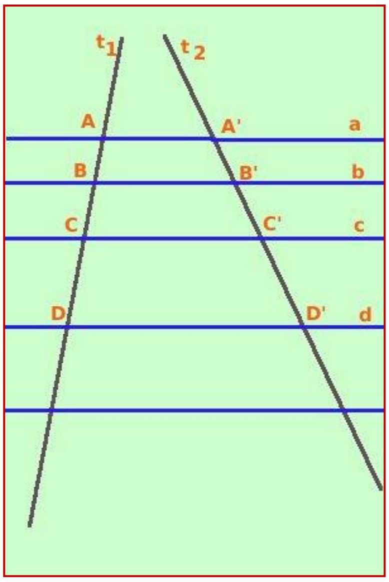

Dimostriamo che si conserva la somma, cioe' se **EF** e' la somma di **AB** e **CD** allora **E'F'** e' la somma di **A'B'** e **C'D'**.

Sarebbe a dire:
alla somma di segmenti sulla prima trasversale corrisponde, sulla seconda trasversale, la somma dei segmenti corrispondenti.

So per ipotesi che le rette **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** sono parallele;

devo dimostrare che se vale:
**EF = AB + CD**
allora vale anche:
**E'F' = A'B' + C'D'**

| Ipotesi | Tesi |
|---|---|
| a // b // c // d // e // f EF = AB + CD | E'F' = A'B' + C'D' |




*Dimostrazione:*
Scelgo la retta del fascio **h** in modo che **EH = AB**, di conseguenza **HF = CD.**
Per le dimostrazione precedente essendo **EH = AB** sara' anche **E'H' = A'B'.**
Per le dimostrazione precedente essendo **HF = CD** sara' anche **H'F' = C'D'.**
Quindi tutto **E'F' = E'H'+ H'F' = A'B' + C'D'.**
Come volevamo dimostrare.

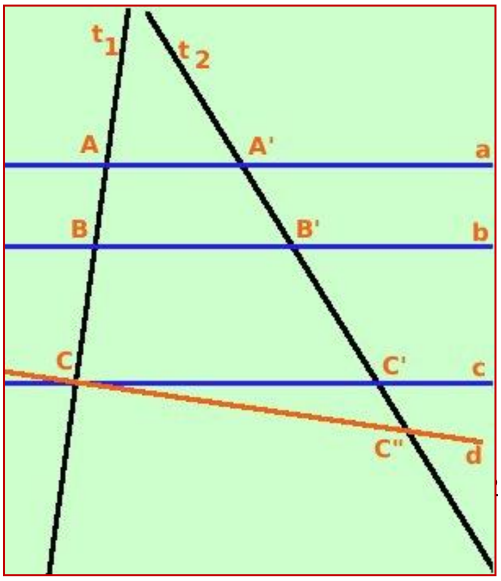
## d) Conclusioni

Abbiamo quindi dimostrato che:
- Si conserva l'uguaglianza: a segmenti uguali sulla prima trasversale corrispondono segmenti uguali sulla seconda trasversale.
- Si conserva la somma: alla somma di segmenti sulla prima trasversale corrisponde sulla seconda la somma dei segmenti corrispondenti.

Possiamo quindi concludere che ci troviamo di fronte ad una proporzionalita'; cioe' i segmenti compresi fra rette parallele tagliate dalle due trasversali formano due classi di grandezze le cui misure sono in proporzione; piu' brevemente si sottointendono le misure e si dice:

Segmenti compresi fra rette parallele tagliate da due trasversali formano due classi di grandezze proporzionali.

**AB : A'B' = CD : C'D' = .....**




# 2. Teorema inverso di Talete

Al solito: dimostriamo il teorema inverso, cosi' i due fatti (fascio di parallele tagliato da due trasversali e segmenti proporzionali) diventano equivalenti.

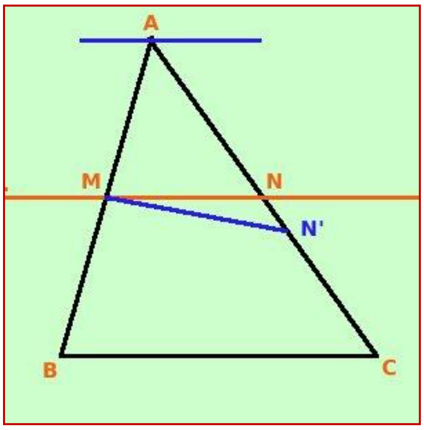
Se segmenti compresi fra rette tagliate da due trasversali formano due insiemi di segmenti proporzionali e se, inoltre, sono parallele due rette che congiungono due coppie di punti corrispondenti, allora anche le altre rette sono parallele alle prime due.

---

So per ipotesi che i segmenti sono fra loro proporzionali, cioe':
**AB : A'B' = BC : B'C'**
ed inoltre so che le rette **a** e **b** sono parallele, devo dimostrare che anche la retta **c** e' parallela alle altre due:

| Ipotesi | | Tesi |
|---|---|---|
| AB : A'B' = BC : B'C' | a // b | c // b |

*Dimostrazione:*
Dal punto **C** mando la parallela **d** alla retta **b**.
Allora per il teorema di Talete vale:
**AB : A'B' = BC : B'C"**
ma per ipotesi vale anche:
**AB : A'B' = BC : B'C'**
di conseguenza, per l'unicita' del quarto proporzionale, dovra' essere:
**B'C' = B'C"**
Quindi la retta **d**, che abbiamo costruita parallela alla retta **b** coincide con la retta **c** e la retta **c** e' parallela alla retta **b.** Come volevamo.




---

Dalla figura sembra che la retta **d** non sia parallela alla retta **b**, ho dovuto farla cosi' per fartela vedere, ma tu devi immaginare che io l'abbia tracciata vicinissima alla retta **c** in modo da non poter capire dal disegno quale delle due rette **c** e **d** sia la vera parallela.

## 3. Importante corollario al teorema di Talete

Corollario:
Se una retta divide due lati di un triangolo in parti ordinatamente proporzionali allora essa e' parallela al terzo lato.

| Ipotesi | Tesi |
|---|---|
| AM : MB = AN : NC | MN // BC |

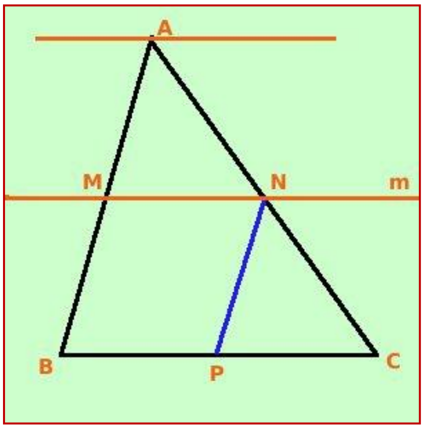
Applicando la proprieta' del comporre all'ipotesi posso scrivere:
**(AM + MB) : MB = (AN + NC) : NC**
**AB : MB = AC : NC**
Per assurdo neghiamo la tesi; supponiamo che **MN** non sia la parallela e sia invece **MN'** la parallela; allora per il teorema di Talete posso scrivere:
**AB : MB = AC : NC'**
Ma per ipotesi vale:
**AB : MB = AC : NC**
E per l'unicita' del quarto proporzionale deve essere:

**NC' = NC**
Quindi **MN** coincide con la parallela alla retta **BC**, come volevamo.

---

Come esercizio vediamo in particolare cosa succede quando il punto in cui la retta taglia il lato e' il punto medio del lato stesso:
In ogni triangolo la parallela ad un lato passante per il punto medio di un altro lato divide il terzo lato a meta'.
Vale anche l' inverso:
In ogni triangolo la congiungente i punti medi di due lati e' parallela al terzo lato.

---




Dimostriamo la prima parte.
Considero la retta **m** parallela alla base **BC** e passante per il punto medio **M** del lato **AB.**
Devo dimostrare che **N** e' il punto medio del lato **AC.**

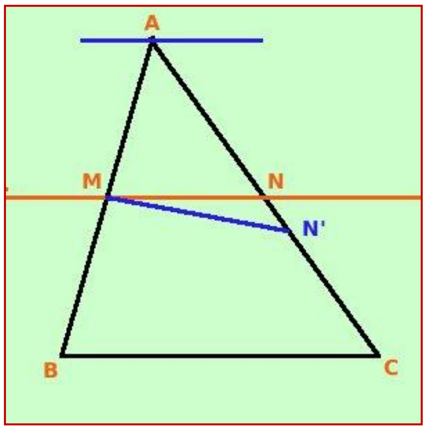
| Ipotesi | | Tesi |
|---|---|---|
| m // BC | AM = MB | AN = NC |

*Dimostrazione:*
Essendo la retta **m** parallela a **BC,** ho che due rette mi individuano un fascio di rette parallele (per indicarlo, in figura, ho messo la retta del fascio passante per **A**).
Vale il teorema di Talete; quindi posso scrivere:
**AM : MB = AN : NC**
Essendo **AM = MB** sono uguali i primi due termini della proporzione; avro' di conseguenza che sono uguali anche il terzo e quarto termine della proporzione; quindi: **AN = NC**
cioe' **N** e' il punto medio del lato **AB.**

---

Potevo fare la costruzione mandando da **N** la parallela (in blu) al lato **AB** e quindi avrei ottenuto il punto **P**: punto medio del lato **BC.**

---




Dimostriamo ora l'inverso.
So che **M** e' il punto medio del lato **AB**:
**AM = MB**
Inoltre **N** e' il punto medio del lato **AC**:
**AN = NC**
Devo dimostrare che la retta **MN** e' parallela a **BC.**

| Ipotesi | | Tesi |
|---|---|---|
| AM = MB | BN = NC | MN // BC |

*Dimostrazione:*
Considero la retta **MN'** parallela a **BC;** ho che due rette mi individuano un fascio di rette parallele (per indicarlo, in figura, ho messo la retta del fascio passante per **A**).
Vale il teorema di Talete quindi posso scrivere:
**AM : MB = AN' : N'C**
Essendo **AM = MB** sono uguali i primi due termini della proporzione; avro' di conseguenza che sono uguali anche il terzo e quarto termine della proporzione, quindi: **AN' = N'C.**
Cioe' **M** e' il punto medio del lato **AB.** Pero', siccome per ipotesi **N** e' il punto medio del lato

**AC** segue che **N** ed **N'** devono coincidere e quindi la retta **MN = MN'** e' parallela alla retta **BC**. Come volevamo.

---

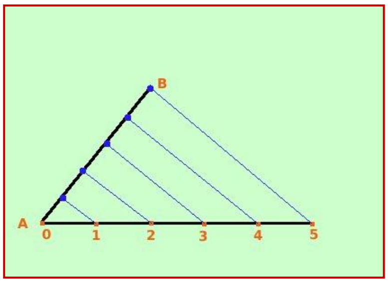
Anche qui ripeto che nella figura sembra che la retta **MN'** non sia parallela alla retta **BC**, ho dovuto farla cosi' per fartela vedere, ma tu devi immaginare che io l'abbia tracciata vicinissima alla retta **MN** in modo da non poter capire dal disegno quale delle due rette **MN** e **MN'** sia la vera parallela alla base.

# 4. Applicazione alle costruzioni geometriche

Utilizzando il teorema di Talete possiamo fare alcune notevoli costruzioni geometriche e precisamente:

- Dividere un segmento in piu' parti uguali
- Dividere un segmento in parti proporzionali a numeri dati
- Trovare il segmento quarto proporzionale dopo tre segmenti dati

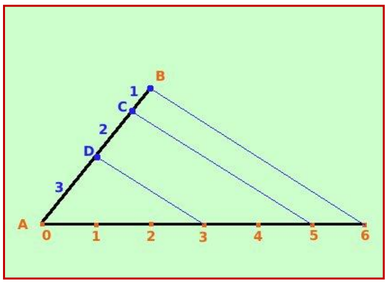
## a) Dividere un segmento in piu' parti uguali




Considero il segmento **AB**, voglio, come esempio, dividerlo in 5 parti uguali.
Prendo un segmento (orizzontale) con sopra una scala numerica (tipo il doppio decimetro) e faccio coincidere il punto **A** con lo **0.**
Dal punto **5** traccio la congiungente al punto B, quindi traccio le parallele alla retta **B5** passante per i valori **4,3,2,1.**
In questo modo divido il segmento **AB** in 5 parti che, per il teorema di Talete, sono ugali fra loro.
Come volevamo.

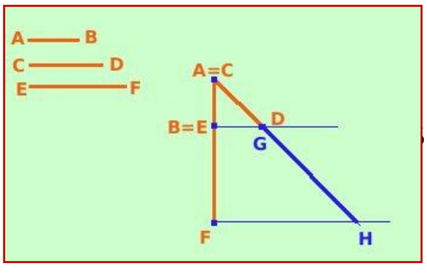
---

## b) Dividere un segmento in parti proporzionali a numeri dati




Considero il segmento **AB**, voglio, come esempio, dividerlo in parti proporzionali ai numeri 1, 2 e 3.
Ho che:
$1 + 2 + 3 = 6$
quindi dovro' prendere 6 segmenti uguali.
Prendo un segmento (orizzontale) con sopra una scala numerica (tipo il doppio decimetro, cosi' ho segmenti uguali) e faccio coincidere il punto **A** con lo **0.**
Dal punto **6** traccio la congiungente al punto B, quindi traccio le parallele alla retta **B6** passante per i valori **5** e **3.**
In questo modo il segmento **AB** e' diviso in 3 parti tali che **CD** e' il doppio di **BC** e **DA** e' il triplo di **BC.**
Come volevamo.

## c) Trovare il segmento quarto proporzionale dopo tre segmenti dati




Consideriamo i tre segmenti **AB**, **CD** ed **EF.** Voglio trovare il segmento **GH** tale che valga la proporzione:
**AB : CD = EF : GH**

Allineo i segmenti **AB** ed **EF**; inoltre pongo il segmento **CD** in modo da far coincidere il punto **C** con il punto **A.**
Traccio la retta passante per i punti **B** e **D**; traccio poi la sua parallela passante per **F.**
Prolungo il segmento **CD** oltre **D** fino ad incontrare in **H** la parallela tracciata prima.
Il segmento **DH** (o meglio **GH**) e' il segmento cercato perche' per i segmenti cosi' posizionati e' valido il teorema di Talete.
**AB : EF = CD : GH**
Scambio fra loro i medi:
**AB : CD = EF : GH**
Come volevamo.

---

Potevo fare la costruzione in modo da avere direttamente il risultato senza dover fare lo scambio dei medi: prova a farlo tu per esercizio

---

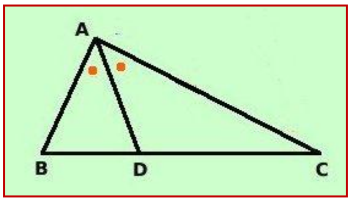
## 5. Conseguenze del teorema di Talete: teoremi sulle bisettrici

Utilizzando il teorema di Talete vediamo alcune interessanti proprieta' delle bisettrici di un triangolo:

- Teorema sulla bisettrice di un angolo interno di un triangolo
- Teorema inverso
- Teorema sulla bisettrice di un angolo esterno di un triangolo

### a) Teorema sulla bisettrice di un angolo interno di un triangolo

Vale il teorema:
La bisettrice dell'angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.
So che la retta AD e' la bisettrice dell'angolo BAC; devo dimostrare che vale **AB : AC = BD : DC.**



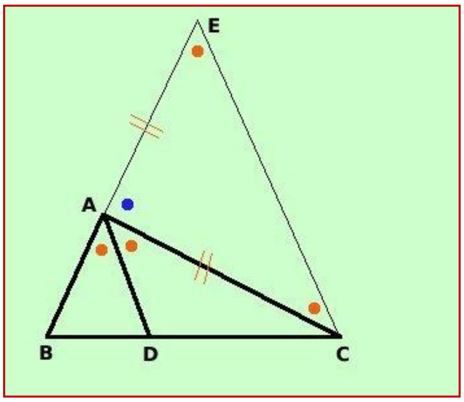

| **Ipotesi** | **Tesi** |
|---|---|
| $B\hat{A}D = D\hat{A}C$ | **AB : AC = BD : DC** |

*Dimostrazione:*

---

Intuitivamente: dobbiamo far vedere che vale il teorema di Talete, quindi cercheremo, mediante costruzioni, di richiamare la figura del teorema di Talete.

---




Prolungo il segmento **BA** dalla parte di **A** di un segmento **AE = AC**; quindi congiungo **E** con **C.**
Il triangolo **AEC** e' isoscele e quindi avremo $A\hat{E}C = A\hat{C}E$.
Inoltre sappiamo che la somma degli angoli interni di un triangolo vale un angolo piatto cioe' la somma:
$A\hat{E}C + A\hat{C}E + C\hat{A}E$
**e' uguale ad un angolo piatto.**
Ma anche l'angolo:
$B\hat{A}E = B\hat{A}D + D\hat{A}C + C\hat{A}E$
**e' uguale ad un angolo piatto.**
Ed essendo tutti gli angoli piatti congruenti, avremo:

$\widehat{AEC} + \widehat{ACE} + \widehat{CAE} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} + \widehat{CAE}$

Possiamo eliminare l'angolo $\widehat{CAE}$ da entrambe le parti:

$\widehat{AEC} + \widehat{ACE} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$

Ma noi sappiamo che gli angoli $\widehat{AEC}$ e $\widehat{ACE}$ sono congruenti per costruzione e gli angoli $\widehat{BAD}$ e $\widehat{DAC}$ sono congruenti per ipotesi.

Ne deriva che $\widehat{DAC} = \widehat{ACE}$.

Essendo gli angoli congruenti $\widehat{DAC}$ ed $\widehat{ACE}$ angoli alterni interni rispetto alle rette **AD** e **CE,** ne segue che le rette sono parallele e quindi siamo nelle condizioni del teorema di Talete.

Pertanto vale:

$BA : AE = BD : DC$

Essendo $AE = AC$ posso scrivere:

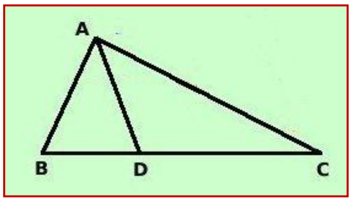
$AB : AC = BD : DC$

Come volevamo.

## b) Teorema inverso del precedente

Vale il teorema:

Se la congiungente il vertice con un punto del lato opposto divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati allora tale congiungente e' la bisettrice dell'angolo al vertice

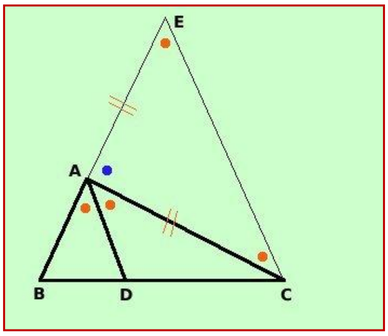



So che vale $AB : AC = BD : DC$ devo dimostrare che la retta AD e' la bisettrice dell'angolo BAC;

| Ipotesi | Tesi |
| --- | --- |
| $AB : AC = BD : DC$ | $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ |

*Dimostrazione:*

Qui partiamo dalla validita' del teorema di Talete, quindi partiamo dalle parallele e cerchiamo di arrivare a mostrare che gli angoli sono uguali




Siccome vale la proporzione, posso riportare un segmento **AE** = **AC** sul prolungamento di **BA** dalla parte di **A;** congiungo **E** con **C.**

Essendo valido il teorema inverso del teorema di Talete, avremo che le rette **AD** ed **EC** sono fra loro parallele, e per il teorema inverso del fondamentale sul parallelismo avremo che gli angoli $\widehat{DAC}$ ed $\widehat{ACE}$ sono congruenti fra loro.

Abbiamo inoltre che il triangolo **AEC** e' isoscele e quindi avremo $AEC = ACE$.

Sappiamo che la somma degli angoli interni di un triangolo vale un angolo piatto cioe' la somma:

$\widehat{AEC} + \widehat{ACE} + \widehat{CAE}$

**e' uguale ad un angolo piatto.**

Ma anche l'angolo:

$\widehat{BAE} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} + \widehat{CAE}$

**e' uguale ad un angolo piatto.**

ed essendo tutti gli angoli piatti congruenti avremo:

$\widehat{AEC} + \widehat{ACE} + \widehat{CAE} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} + \widehat{CAE}$

Possiamo eliminare l'angolo $\widehat{CAE}$ da entrambe le parti:

**$A\hat{E}C + A\hat{C}E = B\hat{A}D + D\hat{A}C$**
Ma noi sappiamo che gli angoli **$A\hat{E}C$** e **$A\hat{C}E$** sono congruenti per costruzione, e siccome **$D\hat{A}C$** ed **$A\hat{C}E$** sono congruenti fra loro, per il teorema inverso del fondamentale sul parallelismo ne deriva che gli angoli **$B\hat{A}D$** e **$D\hat{A}C$** sono congruenti, cioe' la retta **AD** e' la bisettrice dell'angolo **$B\hat{A}C$.**
Come volevamo.

## c) Proprietà della bisettrice di un angolo esterno di un triangolo

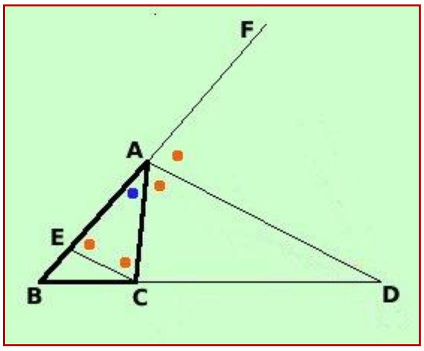
Intanto dobbiamo dire che il teorema e' valido solamente se la bisettrice dell'angolo esterno incontra il prolungamento del lato del triangolo opposto al vertice da cui si traccia la bisettrice; essendo valida questa condizione possiamo procedere.
C'e' anche da dire che questo e' un teorema minore e, francamente, non ho mai avuto occasione di applicarlo in nessun problema, quindi se vuoi trascurarlo va bene, basta che ti ricordi che esiste.

Vale il teorema:
Se la bisettrice dell'angolo esterno di un triangolo incontra il prolungamento del lato opposto al vertice considerato, allora i segmenti congiungenti il punto di incontro con i vertici del lato opposto sono proporzionali agli altri due lati.
So che la retta AD e' la bisettrice dell'angolo esterno CAF; devo dimostrare che vale **BD : CD = BA : AC.**

| Ipotesi | Tesi |
| --- | --- |
| **$C\hat{A}D = D\hat{A}F$** | **BD : CD = BA : AC** |

*Dimostrazione:*

Intuitivamente: anche qui dobbiamo far vedere che vale il teorema di Talete, quindi cercheremo, mediante costruzioni, di richiamare la figura del teorema di Talete.



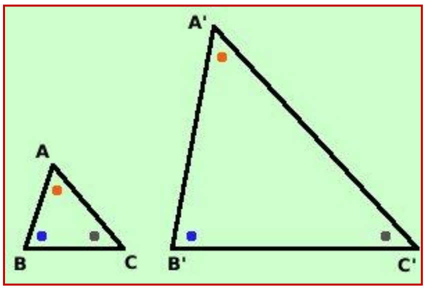

Prolungo il segmento **BC** dalla parte di **C** fino ad incontrare la bisettrice nel punto **D.**
Dal punto **C** mando la parallela alla retta **DA** che incontra il lato **AB** nel punto **E.**
Abbiamo che
**$A\hat{E}C = A\hat{C}E$** perche' alterni interni rispetto alle parallele **AD** ed **EC** tagliate dalla trasversale **AC.**
Inoltre sappiamo che la somma degli angoli interni di un triangolo vale un angolo piatto cioe' la somma:
**$A\hat{E}C + A\hat{C}E + C\hat{A}E$**
**e' uguale ad un angolo piatto.**
Ma anche l'angolo:
**$B\hat{A}F = B\hat{A}C + C\hat{A}D + D\hat{A}F$**
**e' uguale ad un angolo piatto.**
ed essendo tutti gli angoli piatti congruenti avremo
**$A\hat{E}C + A\hat{C}E + C\hat{A}E = B\hat{A}C + C\hat{A}D + D\hat{A}F$**
Possiamo eliminare l'angolo **$B\hat{A}C = C\hat{A}E$** da entrambe le parti:
**$A\hat{E}C + A\hat{C}E = C\hat{A}D + D\hat{A}F$**
Ma noi sappiamo che gli angoli
**$C\hat{A}D$** e **$D\hat{A}F$** sono congruenti per ipotesi

ed essendo
**$A\hat{C}E = C\hat{A}D$** perche' alterni interni ,
ne deriva che **$A\hat{E}C$ e $A\hat{C}E$** sono congruenti;
quindi il triangolo **ACE** e' isoscele ed abbiamo **CE = CB.**
Posso applicare il teorema di Talete, pertanto vale:
**BC : CD = BE : EA**
Applico la proprieta' del comporre:
**(BC+CD) : CD = (BE+EA) : EA**
**BD : CD = BA : EA**
Ed essendo **EA = AC** posso scrivere:
**BD : CD = BA : AC**
Come volevamo.

## 6. Similitudine fra triangoli

### a) Definizione

Intuitivamente possiamo dire che la similitudine e' una corrispondenza fra figure che conserva la forma ma non l'estensione; pensa al cinematografo ed allo schermo. Ponendo lo schermo a differenti distanze otterremo figure simili ma di dimensioni diverse; nella similitudine si conserveranno uguali gli angoli delle varie figure in corrispondenza, e quindi, per il teorema di Talete, avremo che le varie misure di grandezze corrispondenti saranno in proporzione.




Diremo:

**Due triangoli si dicono simili se hanno gli angoli ordinatamente uguali ed i lati opposti a tali angoli in proporzione.**

**ABC simile ad A'B'C' equivale a**
**Angoli A=A' B=B' C=C' ed inoltre AB:A'B'=BC:B'C'=CA:C'A'**

---

Ordinatamente significa che se il perimetro di un triangolo ABC e' percorso in senso antiorario, allora anche il triangolo simile A'B'C' sara' percorso in senso antiorario.
E' importante sottolineare che i lati opposti ad angoli congruenti si corrisponderanno nella proporzione e viceversa gli angoli opposti a lati proporzionali sono congruenti fra loro.

---

Naturalmente e' piuttosto complicato, dati due triangoli, controllare che i tre angoli siano uguali e i lati corrispondenti siano in proporzione; pertanto utilizzeremo dei criteri che ci permetteranno di verificare la similitudine con un numero ridotto di elementi in corrispondenza.
Nelle prossime pagine vedremo 3 criteri che saranno fondamentali per lo studio della similitudine (e quindi da sapere molto bene)

---

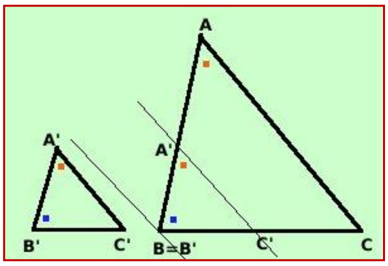
Ti ricordo che un criterio e' una "scorciatoia" che ci permette di ottenere un risultato in modo abbreviato senza dover applicare tutti i passaggi.

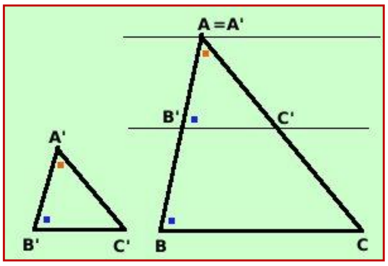
## b) Primo criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno due angoli congruenti, allora i due triangoli sono simili.

| Ipotesi | Tesi |
|---|---|
| $B\hat{A}C = B'\widehat{A'}C'$ | $B\hat{C}A = B'\widehat{C'}A'$ |
| $A\hat{B}C = A'\widehat{B'}C'$ | $AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$ |

Intanto possiamo dire che i triangoli, avendo due angoli congruenti, avranno congruenti anche il terzo angolo per un teorema precedente; resta quindi da dimostrare che i lati corrispondenti sono in proporzione.
Trasporto il triangolo **B'A'C'** sul triangolo **BAC** in modo che l'angolo **A'** coincida con l'angolo **A**; in questo modo i lati **BC** e **B'C'**, tagliati dalla trasversale **AC**, hanno angoli corrispondenti uguali e quindi sono paralleli, ma allora ci troviamo nelle condizioni del teorema di Talete e possiamo dire che vale
**$AB : A'B' = AC : A'C'$.**
Per dimostrare l'altra parte della proporzione basta sovrapporre i triangoli facendo coincidere l'angolo **B'** con l'angolo **B**.
Replicando lo stesso ragionamento otteniamo:
$AB : A'B' = BC : B'C'$
Come volevamo.



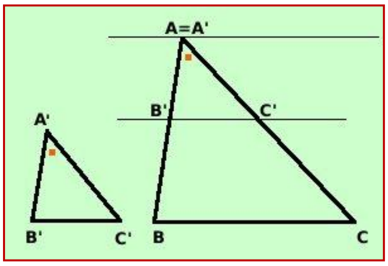




## c) Secondo criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali, allora i due triangoli sono simili.

| Ipotesi | Tesi |
|---|---|
| $AB : A'B' = AC : A'C'$ | $B\hat{C}A = B'\widehat{C'}A' \quad A\hat{B}C = A'\widehat{B'}C'$ |
| $B\hat{A}C = B'\widehat{A'}C'$ | $AB : A'B' = BC : B'C'$ |

Trasporto il triangolo **B'A'C'** sul triangolo **BAC** in modo che l'angolo **A'** coincida con l'angolo **A**, in questo modo il lato **A'B'** va sopra **AB** ed il lato **A'C'** va sopra **AC**.
Traccio per **A** la retta parallela alla retta **B'C'**; siccome vale:
$AB : A'B' = AC : A'C'$
per il teorema inverso del teorema di Talete la retta **BC** e' parallela alla retta **B'C'**, ed avremo:
$B\hat{C}A = B'\widehat{C'}A'$
perche' angoli corrispondenti rispetto alle rette parallele **B'C'** e **BC** tagliate dalla trasversale **AC;**
$A\hat{B}C = A'\widehat{B'}C'$



perche' angoli corrispondenti rispetto alle rette parallele **B'C'** e **BC** tagliate dalla trasversale **AB.**
Quindi i due triangoli hanno tutti e tre gli angoli uguali e per il primo criterio sono simili.
Come volevamo.

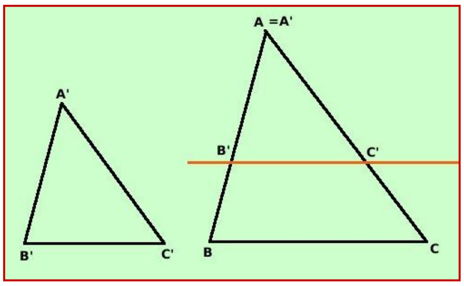
## d) Terzo criterio

Questo e' uno dei teoremi meno usati, ma quando capita .... Insegnavo alle magistrali quando ho incontrato un esercizio (l'unico mai visto) basato sul terzo criterio e ci sono stato sopra 3 giorni prima di capire cos'era e come venirne a capo.

Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente in proporzione, allora i due triangoli sono simili.

| Ipotesi | Tesi |
|---|---|
| $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$ | $B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$<br>$B\hat{C}A = B'\hat{C}'A'$<br>$A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$ |

Consideriamo prima la proporzione:
$AB : A'B' = AC : A'C'$
Se $AB = A'B'$ e quindi $AC = A'C'$ (e vale anche $BC = B'C'$), allora i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza e quindi i triangoli sono simili:



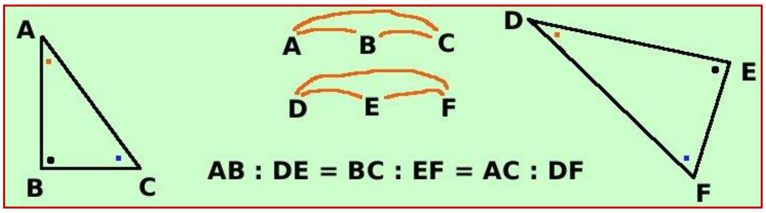

Tutti i triangoli congruenti fra loro sono simili con rapporto di similitudine uguale ad 1. Possiamo dire che la relazione di congruenza e' contenuta nella relazione di similitudine nel senso che figure congruenti sono anche simili, mentre figure che sono simili generalmente non sono congruenti.

Se invece **AB** e' diverso da **A'B',** allora, supponendo che $A'B' < AB$, possiamo sovrapporre **A'B'** su **AB**, partendo da **A** ed anche **A'C'** su **AC**, sempre partendo da **A**. Allora per il corollario al teorema di Talete possiamo dire che **B'C'** e' parallelo a **BC** e quindi:
$A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$
perche' angoli corrispondenti rispetto alle rette parallele **B'C'** e **BC** tagliate dalla trasversale **AB;**
$B\hat{C}A = B'\hat{C}'A'$
perche' angoli corrispondenti rispetto alle rette parallele **B'C'** e **BC** tagliate dalla trasversale **AC.**
Posso poi rifare lo stesso ragionamento relativamente alla proporzione:
$AB : A'B' = BC : B'C'$
e quindi ottenere la tesi.

# e) Esercizi

## (1) Considerazioni preliminari sugli esercizi di similitudine fra triangoli

Una delle difficolta' che si incontrano quando si risolve un problema sui triangoli simili e' il mettere correttamente in proporzione i lati omologhi: non sempre e' facile da una figura, spesso fatta frettolosamente e con poca corrispondenza ai dati, vedere quale e' la proporzione esatta da considerare.
Fortunatamente e' possibile elaborare un metodo semplice per scrivere bene la proporzione:
I lati proporzionali sono di fronte agli angoli uguali.
Quindi, considerati ad esempio i triangoli simili **ABC** e **DEF** ti conviene considerare gli angoli uguali e scriverli ognuno sopra il suo uguale e poi mettere in proporzione i lati opposti a tali angoli; in pratica, basta prendere sia sopra che sotto le stesse lettere



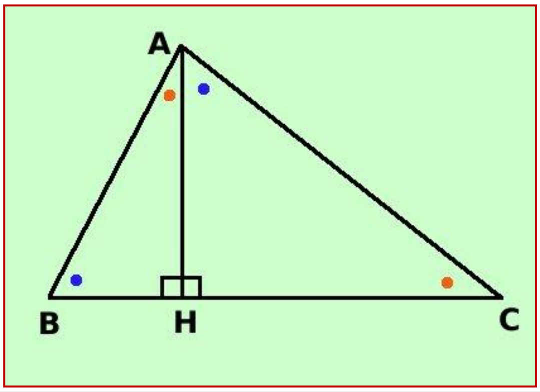

Se collego A con B allora collego anche D con E e quindi scrivo AB:DE
Se collego B con C allora collego anche E con F e quindi scrivo BC:EF
Se collego A con C allora collego anche D con F e quindi scrivo AC:DF

---

Vediamo come comportarci su un esempio abbastanza complicato, che capita in parecchi problemi.
Consideriamo il triangolo rettangolo ABC retto in A, e, dal punto A tracciamo la perpendicolare al lato BC sino ad incontrarlo nel punto H:

1. **Mostrare che i triangoli ACH ed ABH sono simili e scrivere le proporzioni fra i lati corrispondenti**

   Considerato il triangolo rettangolo ABC retto in A, e, dal punto A tracciata la perpendicolare al lato BC sino ad incontrarlo nel punto H, mostrare che i triangoli ACH ed ABH sono simili e scrivere le proporzioni fra i lati corrispondenti.
   Intanto disegniamo la figura:




| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **Ipotesi:**<br>$\mathbf{B\widehat{A}C}$ = angolo retto<br>**AH** perpendicolare a **BC** | **Tesi:**<br>i triangoli **BAH** ed **AHC** sono simili |

Mostriamo che sono triangoli simili, utilizzando il primo criterio di similitudine, poi scriviamo la

proporzione.
Considero i triangoli **ABH** ed **AHC.**
Essi hanno:
$\mathbf{B\hat{H}A = A\hat{H}C}$ perche' angoli retti (per ipotesi)
Se sommo l'angolo $\mathbf{A\hat{B}H}$ con l'angolo $\mathbf{B\hat{A}H}$ ottengo un angolo retto.
Se sommo l'angolo $\mathbf{C\hat{A}H}$ con l'angolo $\mathbf{B\hat{A}H}$ ottengo ancora un angolo retto.
Quindi $\mathbf{A\hat{B}H = C\hat{A}H}$ perche' complementari dello stesso angolo (cioe' con lo stesso angolo $\mathbf{B\hat{A}H}$ formano un angolo retto)
Quindi i due triangoli, avendo due angoli congruenti sono simili per il primo criterio di similitudine.
Metto gli angoli uguali corrispondenti in verticale:

| | | |
|---|---|---|
| A | B | H |
| C | A | H |

ora per scrivere la proporzione prendo due lettere sopra ed in corrispondenza le due lettere sotto:
**AB : CA = BH : AH = AH : CH**

---

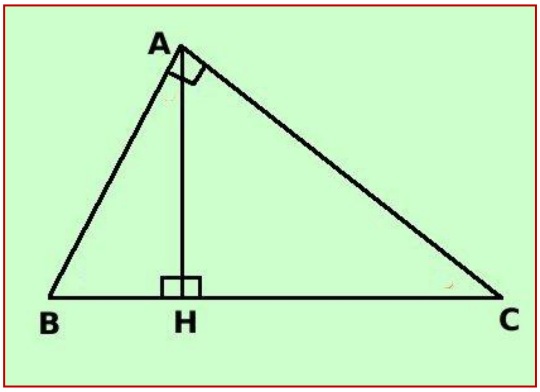
Da notare che il prendere due lettere sopra e le lettere corrispondenti sotto equivale a prendere segmenti opposti ad angoli uguali; infatti se, ad esempio sono uguali gli angoli H allora nel primo triangolo togliendo H avremo AB e nel secondo togliendo H avremo CA e noi scriviamo AB:CA.
Togliere H significa prendere il segmento di fronte all'angolo H.
Se considero A nel primo triangolo ed il suo uguale C nel secondo triangolo allora togliendo A nel primo triangolo ottengo BH e togliendo C nel secondo triangolo ottengo AH quindi scrivo BH:AH.

---

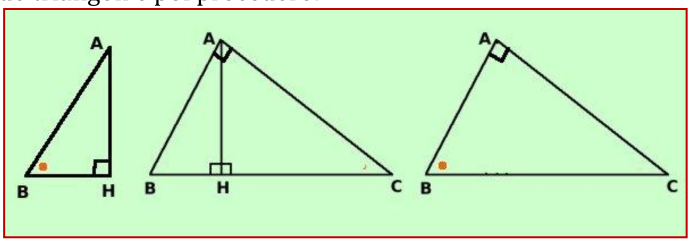
In un problema reale prenderemo solo parte della proporzione e precisamente quella parte in cui conosciamo 3 elementi: due elementi del primo triangolo ed uno del secondo (o viceversa).

## 2. Mostrare che i triangoli ABC ed ABH sono simili e scrivere le proporzioni fra i lati corrispondenti

Considerato il triangolo rettangolo ABC retto in A, e, dal punto A tracciata la perpendicolare al lato BC sino ad incontrarlo nel punto H, mostrare che i triangoli ABC ed ABH sono simili e scrivere le proporzioni fra i lati corrispondenti.
Intanto disegniamo la figura:




Stavolta abbiamo due triangoli in cui uno e' sovrapposto all'altro: se questo ti fa difficolta' puoi sempre pensare di staccare i due triangoli e poi procedere:




| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| $\mathbf{B\hat{A}C}$ = angolo retto<br>**AH** perpendicolare a **BC** | i triangoli **ABH** ed **ABC** sono simili |

Mostriamo che sono triangoli simili, utilizzando il primo criterio di similitudine, poi scriviamo la proporzione.
Considero i triangoli **ABH** ed **ABC**.
Essi hanno:
**$A\hat{B}H = A\hat{B}C$** perche' angoli coincidenti;
**$A\hat{H}B = B\hat{A}C$** perche' retti per ipotesi.
Quindi i due triangoli, avendo due angoli congruenti sono simili per il primo criterio di similitudine.

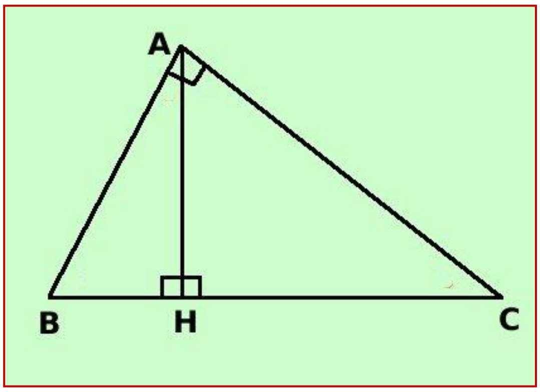
Metto gli angoli uguali corrispondenti in verticale:

A B H
C B A

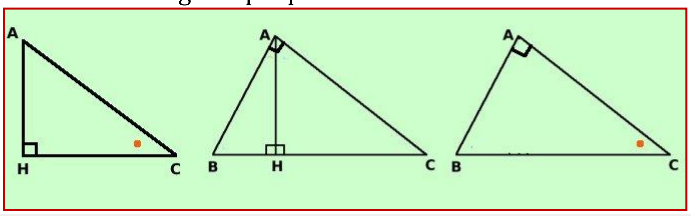
Ora per scrivere la proporzione prendo due lettere sopra ed in corrispondenza le due lettere sotto:
**AB : CB = BH : BA = AH : CA**
o meglio (mettendo le lettere dei segmenti in ordine alfabetico):
**AB : BC = BH : AB = AH : AC.**

## 3. Mostrare che i triangoli ABC ed ACH sono simili e scrivere le proporzioni fra i lati corrispondenti

Considerato il triangolo rettangolo ABC retto in A, e, dal punto A tracciata la perpendicolare al lato BC sino ad incontrarlo nel punto H, mostrare che i triangoli ABC ed ACH sono simili e scrivere le proporzioni fra i lati corrispondenti.
Intanto disegniamo la figura:




Anche stavolta abbiamo due triangoli in cui uno e' sovrapposto all'altro: se questo ti fa difficolta' puoi sempre pensare di staccare i due triangoli e poi procedere:




| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **$B\hat{A}C$** = angolo retto<br>**AH** perpendicolare a **BC** | i triangoli **AHC** ed **ABC** sono simili |

Mostriamo che sono triangoli simili, utilizzando il primo criterio di similitudine, poi scriviamo la proporzione.
Considero i triangoli **AHC** ed **ABC**.
Essi hanno:
**$A\hat{C}H = A\hat{C}B$** perche' angoli coincidenti;
**$A\hat{H}C = B\hat{A}C$** perche' retti per ipotesi.
Quindi i due triangoli, avendo due angoli congruenti sono simili per il primo criterio di similitudine
Metto gli angoli uguali corrispondenti in verticale:

A H C

B A C

Ora per scrivere la proporzione prendo due lettere sopra ed in corrispondenza le due lettere sotto:
**AH : BA = HC : AC = AC : BC**
o meglio:
**AH :AB = CH : AC = AC : BC**

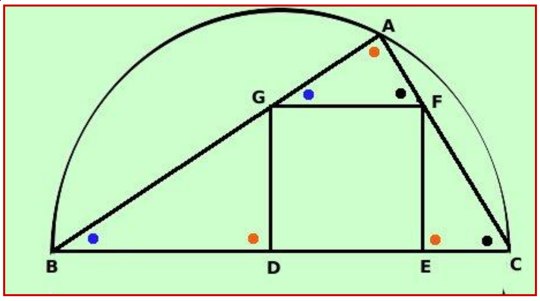
## (2) Esercizi teorici

Sono esercizi in cui devi "dimostrare" che i triangoli sono simili, quasi sempre utilizzando il primo criterio di similitudine, e quindi scrivere la proporzione; negli esami, di solito, capitano all'inizio di un problema piu' complesso.

---

### 1) Se in un triangolo rettangolo e' iscritto un quadrato con un lato sull'ipotenusa, allora l'ipotenusa e' divisa in 3 segmenti in cui quello centrale e' medio proporzionale fra gli altri due.

Costruiamo prima di tutto la figura




| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| **B$\hat{A}$C** = angolo retto<br>**GD, FE** perpendicolari a **BC**<br>**GDEF** e' un quadrato | **BD : DE = DE : EC** |

---

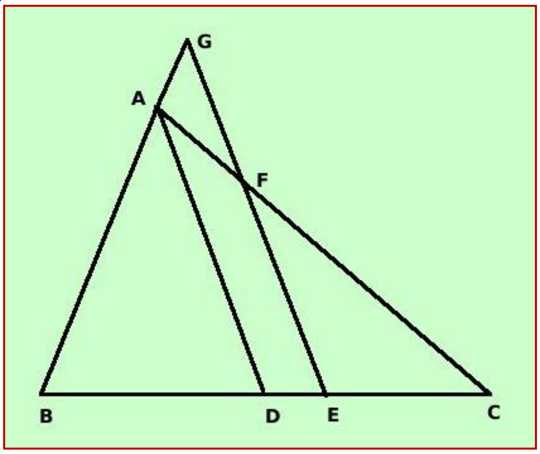
Dimostriamo prima che sono simili i triangoli **BDG** e **AGF**; poi dimostriamo che **AGF** e' simile a **FEC**.
Per la proprieta' transitiva della similitudine avremo che **BDG** risulta simile a **FEC** e quindi scriveremo la proporzione ricordando che i quattro lati del quadrato sono congruenti.

---

Considero i triangoli **BDG** ed **AGF.**
Essi hanno:
**B$\hat{D}$G = G$\hat{A}$F** perche' angoli retti (il primo e' un angolo esterno di un quadrato, il secondo e' retto per ipotesi).
Essendo **GDEF** un quadrato con il lato **DE** sull'ipotenusa del triangolo **ABC**, ne segue che **GF** e' parallelo a **BC** e quindi:
**G$\hat{B}$D = A$\hat{G}$F** perche' angoli corrispondenti rispetto alle parallele **BC** e **GF** tagliate dalla trasversale **AB;** quindi per il primo criterio di similitudine i due triangoli sono simili.
Considero ora i triangoli **AGF** ed **ECF.**
Essi hanno:
**F$\hat{A}$G = F$\hat{E}$C** perche' angoli retti (il primo e' retto per ipotesi, il secondo e' un angolo esterno di un quadrato).
Essendo **GDEF** un quadrato con il lato **DE** sull'ipotenusa del triangolo **ABC**, ne segue che **GF** e' parallelo a **BC** e quindi:
**G$\hat{F}$A = E$\hat{C}$F** perche' angoli corrispondenti rispetto alle parallele **BC** e **GF** tagliate dalla trasversale **AC;** quindi per il primo criterio di similitudine i due triangoli sono simili.
Allora, per la proprieta' transitiva della similitudine posso dire che il triangolo **GBD** e' simile al triangolo **FEC** e posso scrivere:
**BD : EF = CD : EC**
ed essendo **EF = CD = DE** perche' lati di un quadrato, ne segue la tesi:
**BD : DE = DE : EC**
Come volevamo dimostrare.

**2) Dato il triangolo ABC si consideri la mediana AD. Per il punto E, preso su BC si tracci la parallela ad AD che interseca le rette AC ed AB nei punti F e G. Dimostrare che vale: EF+EG=2AD**

Costruiamo prima di tutto la figura




| **Ipotesi:** BD = DC EG // AD | **Tesi:** EF + EG = 2 AD |
|---|---|

---

Essendo **EG** parallela ad **AD** si formano due coppie di triangoli simili; cioe':
**ABD** simile a **GBE**
**CFE** simile a **CAD**
Considero i triangoli **ABD** e **GBE**; essi sono simili perche' hanno l'angolo in **B** in comune ed i due lati opposti a tale angolo paralleli.
Il fatto di avere lati paralleli comporta sempre l'avere angoli congruenti:
Quindi posso scrivere la proporzione:
BD : BE = AD : EG
Considero i triangoli **CFE** e **CAD**, essi sono simili perche' hanno l'angolo in **C** in comune ed i due lati opposti a tale angolo paralleli.
Quindi posso scrivere la proporzione:
EC : CD = EF : AD

---

Ho quindi ottenuto le due proporzioni:
**BD : BE = AD : EG**
**EC : CD = EF : AD**
Nella prima applico la proprieta' dell'invertire in modo da avere **AD** come ultimo termine:
**BE : BD = EG : AD**
**EC : CD = EF : AD**
Essendo le proporzioni delle uguaglianze posso fare la somma termine e termine ed ottenere ancora una proporzione valida:

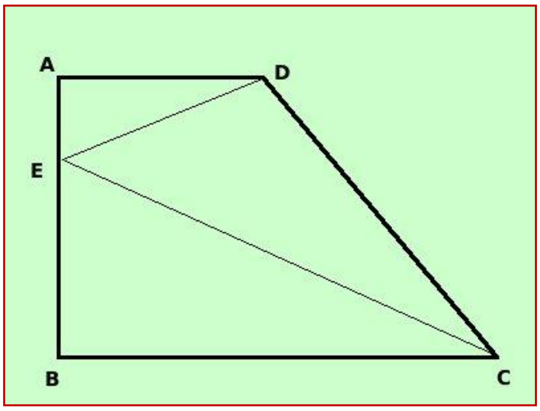
BE : BD = EG : AD
EC : CD = EF : AD

---

(BE+EC):(BD+CD) = (EG+EF):(AD+AD)
Ma vale:
**BE + EC = BC**
**BD + CD = BC**
Quindi posso scrivere:
**BC:BC = (EG+EF):2AD**
Ed essendo uguali i primi due termini della proporzione dovrenno essere uguali fra loro anche il terzo ed il quarto termine, cioe':

**EG + EF = 2AD**
Come volevamo dimostrare.

### 3) **In un trapezio rettangolo congiungere un punto del lato perpendicolare alle basi con gli estremi del lato obliquo in modo che i due triangoli rettangoli che si ottengono siano simili tra loro.**




| **Ipotesi:** | **Tesi:** |
|---|---|
| **ADE** simile ad **EBC** | Trovare la posizione del punto **E** |

Troviamo ad esempio quale deve essere la lunghezza del segmento **AE** utilizzando i lati del trapezio pensati come noti.
Essendo i triangoli **ADE** e **EBC** simili per ipotesi posso scrivere la proporzione:
**AD : AE = BC :EB**
Per trasportare AE ed EB dalla stessa parte dell'uguale applico la proprieta' del permutare; scambiando tra loro i medi la proporzione resta valida:
**AD : BC = AE :EB**
Adesso applico la proprieta' del comporre:
**(AD+BC):AD = (AE+EB): AE**
so che **AE+EB = AB**, quindi:
**(AD+BC):AD = AB: AE**
e, ricavando **AE** dalla proporzione ottengo:

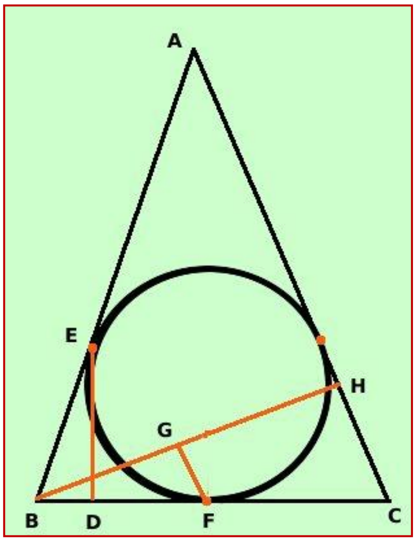
$$AE = \frac{AB \bullet (AD+BC)}{AD}$$

Come volevamo.

### 4) **Dato un qualunque triangolo isoscele e considerata la circonferenza in esso inscritta, dimostrare che la distanza della base dal punto di contatto della circonferenza con ognuno dei lati congruenti e' la meta' della misura dell'altezza relativa ad ognuno dei lati congruenti.**

Per risolvere il problema occorre sapere che i segmenti di tangente condotti da un punto esterno ad una circonferenza sono sempre congruenti, ancora non l'abbiamo fatto, quindi te lo anticipo, ma che ne dici di provare a dimostrarlo?

Qui il difficile e' capire il testo e fare bene la figura: una volta fatta bene la figura il problema diventa elementare; nella figura per semplicita' considero uno dei lati congruenti per volta, poi posso ripetere il ragionamento per l'altro.
ED e' la distanza dalla base del punto di contatto della circonferenza con il lato AB.
BH e' l'altezza relativa al lato AH.




Prima dimostro che i triangoli **BED** e **BHC** sono simili, poi costruisco il triangolo **BGF** con **FG** perpendicolare a **BG** ed **F** punto di contatto fra la circonferenza e la base (quindi **F** e' il punto medio) e dimostro poi che **BGF** e' simile a **BHC** (con dimensioni meta') ed inoltre dimostro che e' congruente a **BED.**

| | |
|---|---|
| **Ipotesi:**<br>**ABC** triangolo isoscele<br>**ED** perpendicolare a **BC**<br>**BH** perpendicolare ad **AC** | **Tesi:**<br>**BH = 2 ED** |

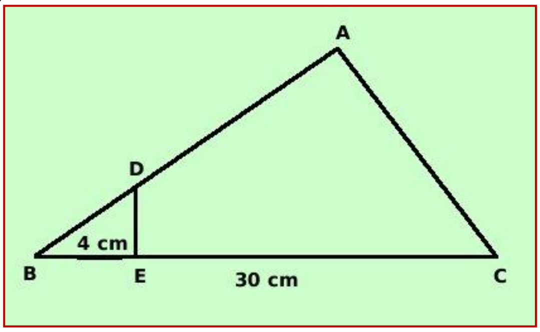
Considero i triangoli **BED** e **BHC**; essi hanno:
**E$\hat{B}$D = B$\hat{C}$H** perche' angoli alla base di un triangolo isoscele.
**B$\hat{D}$E = B$\hat{H}$C** perche' angoli retti (per ipotesi).
Quindi per il primo criterio di similitudine i due triangoli **BED** e **BHC** sono simili.
Costruisco il triangolo **BFG** mandando dal punto di tangenza **F** della circonferenza con la base la perpendicolare alla retta **BH** sino ad incontrarla in **G.**
Considero ora i triangoli **BFG** e **BCH**, essi hanno:
l'angolo **C$\hat{B}$H** in comune;
**B$\hat{G}$F = B$\hat{H}$C** perche' angoli retti.
Ne deriva che le rette **FG** ed **HC** sono parallele (avendo gli angoli corrispondenti rispetto alla trasversale **BH** congruenti) ed essendo **BC = 2BF** segue **BH = 2BG** (esercizio sul corollario del teorema di Talete)
Dimostriamo infine che i triangoli **BDE** e **BFG** sono congruenti.
Infatti tali triangoli hanno:
gli angoli ordinatamente uguali perche' sono simili; infatti **BDE** e' simile a **BHC** e quest'ultimo e' simile a **BFG**; quindi, per la proprieta' transitiva della similitudine, i due triangoli sono simili e quindi hanno tutti gli angoli congruenti:
**BE = BF** perche' segmenti di tangente condotti da un punto esterno ad una circonferenza (fare link quando sara' fatto).
Quindi per il secondo criterio di congruenza, avendo due angoli ed il lato compreso congruenti i due triangoli sono congruenti; in particolare **ED = BG** ed essendo **BH = 2BG** ne segue **BH = 2ED.**
Come volevamo.

## (3) Esercizi numerici

In questi esercizi devi trovare il valore numerico della misura di segmenti.
Di solito si cerca sempre di considerare due triangoli simili tali che del primo di conoscano due lati e del secondo si conosca un lato corrispondente ad uno del primo, in modo da impostare la proporzione per trovare il valore del secondo lato.
Per ora sono sviluppati solamente i primi due esercizi .

1) **Nel triangolo rettangolo ABC, retto in A il cateto AB e' 4/3 del cateto AC e l'ipotenusa vale cm 30. Condurre la perpendicolare all'ipotenusa da un punto D del cateto AB che tagli l'ipotenusa nel punto E. Sapendo che il triangolo DBE ha il lato BE che misura 4 cm determinarne le dimensioni**

Costruiamo prima di tutto la figura




| Dati: | Trovare: |
| --- | --- |
| $B\hat{A}C$ = angolo retto<br>$\overline{BC} = 30$ cm<br>AB = 4/3 AC<br>$\overline{BE} = 4$ cm | $\overline{BD} = ?$<br>$\overline{DE} = ?$ |

---

Prima troviamo le tre dimensioni del triangolo ABC, poi mostriamo che ABC e BDE sono simili e siccome di BDE conosciamo un lato potremo impostare la proporzione per trovarne gli altri due lati.

---

Pongo:
AC = x
avro':
AB = 4/3 x
Per trovare il valore della x applico il teorema di Pitagora al triangolo ABC:
$BC^2 = AB^2 + BC^2$
$30^2 = (4/3\,x)^2 + x^2$
$900 = 16/9\,x^2 + x^2$
$900 = 25/9\,x^2$
$x^2 = 900 \cdot 9/25$
Per trovare la x faccio la radice quadrata dei due termini: $x = 30 \cdot 3/5$
x = 18 cm
Ottengo quindi:
$\overline{AC} = 18$ cm
$\overline{AB} = 4/3 \cdot 18 = 24$ cm
Quindi del triangolo ABC conosco i tre lati.
I triangoli ABC e DBE sono simili perche':
l'angolo in B e' in comune
gli angoli BAC e BED sono congruenti perche' retti.
Quindi per il primo criterio di similitudine i due triangoli sono simili e posso scrivere la proporzione
BC : BD = AC : DE = AB : BE
30 : BD = 18 : DE = 24 : 4
Consideriamo la proporzione formata dal primo e dal terzo termine e troviamo il valore di BD
30 : BD = 24 : 4

$$BD = \frac{30 \cdot 4}{24}$$

$\overline{BD} = 5$ cm

Consideriamo la proporzione formata dal secondo e dal terzo termine e troviamo il valore di BD
18 : DE = 24 : 4

$$\text{DE} = \frac{18 \cdot 4}{24}$$

$\overline{DE} = 3$ cm

Come volevamo trovare.

---

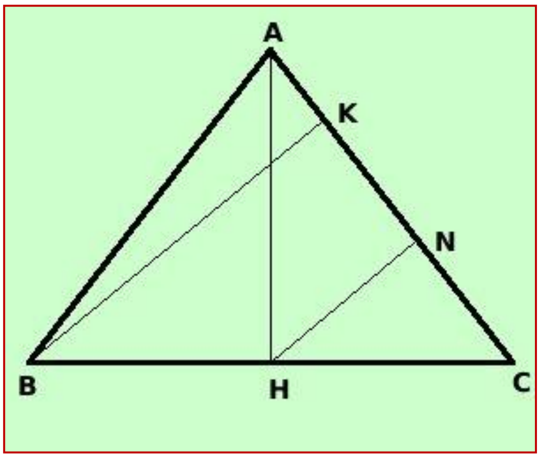
## 2) Il triangolo isoscele ABC ha il perimetro che misura 30 cm; sapendo che l'altezza relativa al lato obliquo e' 6/5 di quella relativa alla base BC calcolare la misura dell'area del triangolo

---

Per risolvere il problema osserviamo che il punto H e' il punto medio della base e se da esso mando la perpendicolare HN al lato obliquo questa perpendicolare e' la meta' di BK .

---

Costruiamo prima di tutto la figura:




| Dati: | Trovare: |
|---|---|
| $AB = AC$<br>$\overline{BK} = 6/5\ \overline{AB}$<br>$B\hat{H}A$ = angolo retto<br>$B\hat{K}C$ = angolo retto<br>$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 30$ cm | $\overline{AB} = ?$<br>$\overline{BC} = ?$ |

---

Ponendo AH = x e costruendo HN parallelo a BK ottengo il triangolo HNC simile a BKC e questo mi permettera' di trovare tutti i lati in funzione di AH .

---

Pongo:

$\overline{AH} = x$

$\overline{BK} = 6/5\,x$

Dal puno H traccio la parallela HN alla perpendicolare BK ed ottengo il triangolo HNB che e' simile al triangolo BKC; inoltre, essendo H il punto medio di AB, ne segue che, per il corollario al teorema di Talete, il segmento HN e' la meta' del segmento BK:

$\overline{HN} = \overline{BK}/2 = 3/5\,x$

Considero il triangolo AHN; esso e' rettangolo e posso applicare il teorema di Pitagora per trovare (con la x) il lato AN: Nota:

(Senza scomodare il teorema di Pitagora si puo' considerare la terna pitagorica 3 4 5: hai
$HN = 3/5\,x = 3 \cdot 1/5\,x$
$AH = x = 5 \cdot 1/5\,x$
quindi avremo
$AN = 4 \cdot 1/5\,x = 4/5\,x$)

$\overline{AH}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{NH}^2$

$\overline{AN} = \sqrt{\overline{AH2}^2 - \overline{NH}^2} = \sqrt{x^2 - (3/5\,x)^2} = \dfrac{4}{5}\,x$

Considero ora il triangolo rettangolo AHC; conosco le misure:

$\overline{AN} = 4/5\,x$ e $\overline{HN} = 3/5\,x$

Posso applicare il secondo teorema di Euclide per trovare il valore di NC:

$\overline{HN}^2 = \overline{AN} \cdot \overline{NC}$

$\overline{NC} = \dfrac{\overline{HN}^2}{\overline{AN}} = \dfrac{9/25\,x^2}{4/5\,x} = \dfrac{9}{20}\,x$

Questo mi permette di trovare la misura di AC.

$\overline{AC} = \overline{AN} + \overline{NC} = 4/5\,x + 9/20\,x = 16/20\,x + 9/20\,x = 25/20\,x = 5/4\,x$

Adesso, applicando il primo teorema di Euclide al triangolo AHC, posso trovare il valore di HC:

$\overline{HC}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{NC}$

$\overline{HC} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{NC}} = \sqrt{5/4\,x \cdot 9/20\,x} = 3/4\,x$

Ottengo quindi:

$\overline{BC} = 2\overline{HC} = 6/4x = 3/2\,x$

Ed essendo:

$\overline{AB} = \overline{AC} = 5/4\,x$

Finalmente posso utilizzare la relazione di partenza:

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 30\text{ cm}$

$5/4\,x + 5/4\,x + 3/2\,x = 30$

m.c.m = 4

$\dfrac{5 + 5 + 6}{4}\,x = \dfrac{120}{4}$

$16x = 120$

$x = 120/16 = 15/2\text{ cm} = 7{,}5\text{ cm}$

Abbiamo quindi:

$\overline{AH} = x = 7{,}5\text{ cm}$

$\overline{BC} = 3/2\,x = 3/2 \cdot 15/2\text{ cm} = 45/4\text{ cm} = 11{,}25\text{ cm}$

E possiamo calcolare l'area:

$\text{Area} = \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} = 45/4 \cdot 1\,5/2 \cdot 1/2 = 225/8 = 28{,}125\text{ cm}^2$

---

3) Il perimetro di un trapezio misura 76 cm; i due lati obliqui sono congruenti alla base minore e ognuna delle proiezioni dei due lati obliqui sulla base maggiore misura 8 cm. Trovare il rapporto tra l'area del trapezio e l'area del triangolo che si ottiene prolungando i lati obliqui.

Soluzione

---

4) Considerare il trapezio ABCD rettangolo in A e B con AD base minore; sapendo che le misure di AD, AB e BC sono rispettivamente a, b, c determinare un punto M su AB in modo che l'area del triangolo CDM sia $l^2$.

Tra quali limiti puo' variare l perche' il punto M sia su AB?

Soluzione

---

# 7. Applicazioni sui triangoli rettangoli

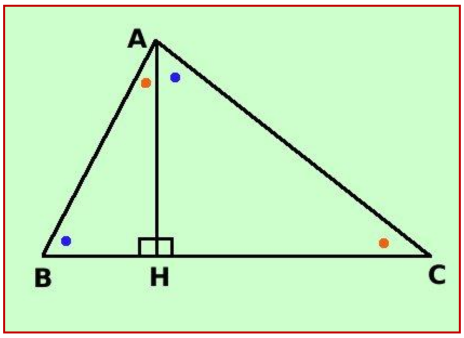
Vediamo ora come, utilizzando la similitudine, possiamo dimostrare alcuni teoremi gia' dimostrati mediante l'equivalenza.

## a) Teorema di base

Dato un qualunque triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli simili sia tra loro che con il triangolo dato.
Prima dimostriamo che sono simili fra loro, poi mostreremo che uno di essi e' simile al triangolo di partenza.

---

Prima parte:

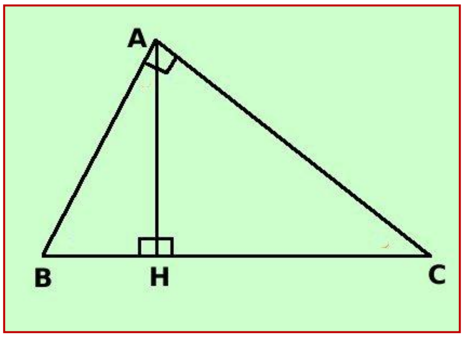



| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| $B\hat{A}C$ = angolo retto<br>AH perpendicolare a BC | i triangoli BAH ed AHC sono simili |

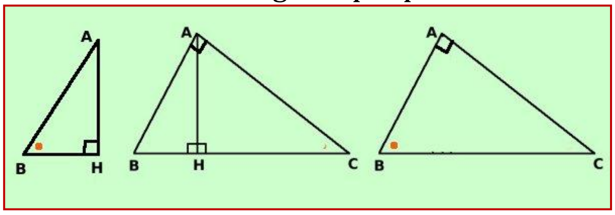
Mostriamo che sono triangoli simili, utilizzando il primo criterio di similitudine:
Considero i triangoli **ABH** ed **AHC**:
Essi hanno:
$\mathbf{B\hat{H}A = A\hat{H}C}$ perche' angoli retti (per ipotesi)
Se sommo l'angolo $\mathbf{A\hat{B}H}$ con l'angolo $\mathbf{B\hat{A}H}$ ottengo un angolo retto.
Se sommo l'angolo $\mathbf{C\hat{A}H}$ con l'angolo $\mathbf{B\hat{A}H}$ ottengo ancora un angolo retto.
Quindi $\mathbf{A\hat{B}H = C\hat{A}H}$ perche' complementari dello stesso angolo (cioe' con lo stesso angolo $\mathbf{B\hat{A}H}$ formano un angolo retto).
Quindi i due triangoli, avendo due angoli congruenti sono simili per il primo criterio di similitudine.
Come volevamo.

---

Seconda parte:
Dimostriamo ora che uno dei triangoli, ad esempio **ABH,** e' simile al triangolo di partenza **ABC**, (potrei fare lo stesso ragionamento con **AHC;** quindi entrambe i triangolini sono simili al triangolo di partenza)




Stavolta abbiamo due triangoli in cui uno e' sovrapposto all'altro: se questo ti fa difficolta' puoi sempre pensare di staccare i due triangoli e poi procedere:

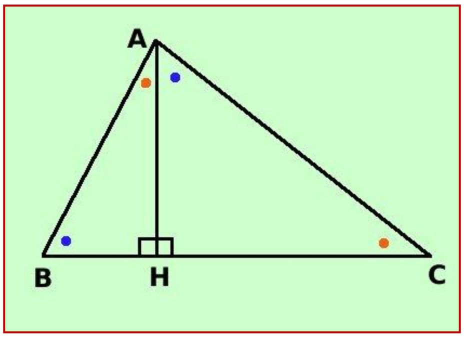



| Ipotesi: | Tesi: |
|---|---|
| $B\hat{A}C =$ angolo retto<br>AH perpendicolare a BC | i triangoli ABH ed ABC sono simili |

Mostriamo che sono triangoli simili, utilizzando il primo criterio di similitudine:
Considero i triangoli **ABH** ed **ABC**.
Essi hanno:
$A\hat{B}H = A\hat{B}C$ perche' angoli coincidenti
$A\hat{H}B = B\hat{A}C$ perche' retti per ipotesi.
Quindi i due triangoli, avendo due angoli congruenti sono simili per il primo criterio di similitudine.
Come volevamo.

## b) Primo teorema di Euclide

In ogni triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa e' media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.




Utilizziamo il teorema di base; considero i due triangoli **ABH** e **AHC** sono simili.

Metto gli angoli uguali corrispondenti uno sopra l'altro in verticale:

| | | |
|---|---|---|
| A | B | H |
| C | A | H |

Ora, per scrivere la proporzione, prendo due lettere sopra ed in corrispondenza le due lettere sotto:

**AB : CA = BH : AH = AH : CH**

In particolare considero:

**BH : AH = AH : CH**

Come volevamo.

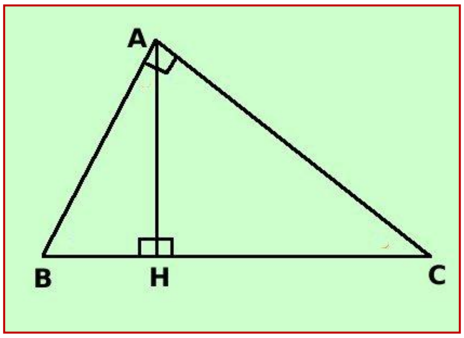
---

Da notare che se applichiamo la proprieta' fondamentale delle proporzioni (prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi) otteniamo il risultato del teorema gia' dimostrato nell'equivalenza:

$AH^2 = BH \cdot HC$

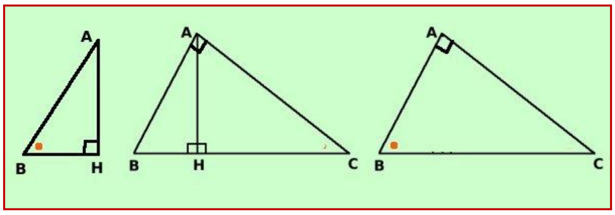
## c) Secondo teorema di Euclide

In ogni triangolo rettangolo un cateto e' medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.




Utilizziamo il teorema di base: considero i due triangoli simili **ABH** e **ABC**

Per vederli meglio te li stacco:




Metto gli angoli uguali corrispondenti uno sopra l'altro in verticale:

| | | |
|---|---|---|
| A | B | H |
| C | B | A |

Ora per scrivere la proporzione prendo due lettere sopra ed in corrispondenza le due lettere sotto:

**AB : CB = BH : BA = AH : CA**

In particolare considero:

**AB : BC = BH : AB**

Applico la proprieta' dell'invertire:

**BC : AB = AB : BH**
Come volevamo.

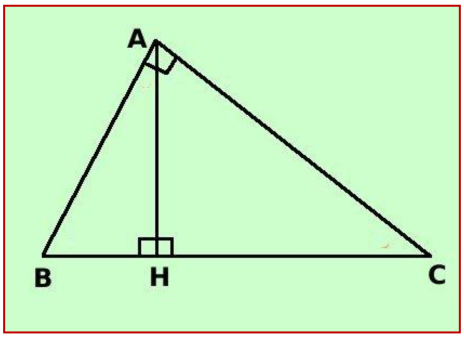
---

Da notare che se applichiamo la proprieta' fondamentale delle proporzioni (prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi) otteniamo il risultato del teorema gia' dimostrato nell'equivalenza:
$AB^2 = BC \cdot BH$

---

### d) Teorema di Pitagora

In ogni triangolo rettangolo la misura dell'area del quadrato costruito sull'ipotenusa e' uguale alla somma delle misure delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.




Utilizziamo il primo teorema di Euclide.
Per il primo teorema di Euclide applicato al cateto AB scrivo:
$AB^2 = BH \cdot BC$
Per il primo teorema di Euclide applicato al cateto AC scrivo:
$AC^2 = HC \cdot BC$
Sommo termine a termine:
$AB^2 + AC^2 = BH \cdot BC + HC \cdot BC$
Raccolgo BC al secondo termine:
$AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BH + HC)$
Ma BH + HC vale BC, quindi:
$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BC$
$AB^2 + AC^2 = BC^2$
Leggendo da destra a sinistra otteniamo quello che volevamo.
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

---

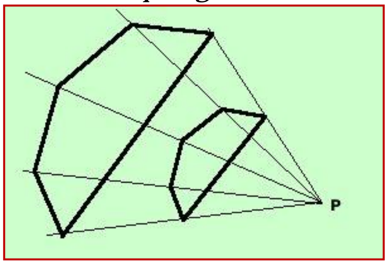
## 8. Poligoni simili

Vediamo ora di estendere il concetto di similitudine dai triangoli ai poligoni.

### a) Definizione di poligoni simili

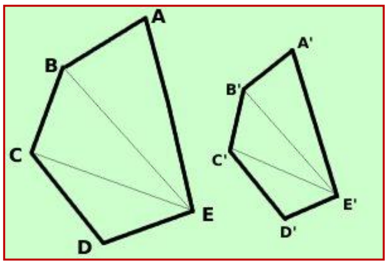
Definizione:
Due poligoni sono simili se hanno tutti gli angoli uguali ed i lati corrispondenti in proporzione.
Se il rapporto di similitudine vale 1 allora i due poligoni, oltre che simili, sono anche congruenti.

Secondo me migliore e' la definizione:
*Se congiungendo i vertici corrispondenti di due poligoni tutte le congiungenti si intersecano in un unico punto allora i due poligoni sono simili.*




Per la corrispondenza si preferisce parlare di omotetia
Se i due poligoni sono congruenti allora il punto di intersezione e' all'infinito e le rette sono parallele.

Siccome e' piuttosto complicato considerare tutti i lati e gli angoli, anche qui si potra' parlare di criteri di similitudine, ma, operativamente, useremo un metodo piu' intuitivo.
Due poligoni sono simili se e' possibile suddividerli in triangoli ordinatamente simili.




Basta che consideri due vertici in corrispondenza e, da essi, tracci le congiungenti agli altri vertici: tutti i triangoli ottenuti sono tra loro simili.

Puoi comunque considerare anche un punto interno al poligono ed il suo corrispondente nel secondo poligono e da questo tracciare tutte le congiungenti i vertici ed ottenere ancora triangoli simili; il problema e' trovare due punti corrispondenti nei due poligoni. Se usi la seconda definizione, due punti si corrisponderanno nella similitudine se sono allineati con il centro dell'omotetia (cioe' il punto in cui si incriociano tutte le congiungenti i vertici).

## b) Criteri di similitudine fra poligoni

Siccome di solito si preferisce suddividere i poligoni in triangoli simili i criteri, operativamente, non vengono utilizzati, sono comunque un discreto esercizio mentale: se consideriamo l'equivalente dei criteri di similitudine fra triangoli scartando quello che non viene considerato.
Vediamo i vari casi

Il primo criterio di similitudine fra triangoli dice che due triangoli sono simili se hanno due angoli congruenti (cioe' manca un angolo; allora diremo che:
Il primo criterio di similitudine fra poligoni dice che due poligoni sono simili se sappiamo che tutti gli angoli sono congruenti eccetto uno e tutti i lati sono in proporzione eccetto due lati consecutivi.
L'angolo ed i lati nel senso non che sia diverso, ma che non lo sappiamo: anche quello sara' necessariamente uguale o proporzionale.
Devo mettere tutti i lati in proporzione eccetto due altrimenti, se mi riferissi solamente agli angoli senza indicare i lati, tutti i rettangoli (ad esempio) sarebbero tra loro proporzionali.

Il secondo criterio di similitudine fra triangoli dice che due triangoli sono simili se hanno due lati proporzionali e congruenti gli angoli compresi fra i due lati (cioe' manca un lato e due angoli); allora diremo che:
Il secondo criterio di similitudine fra poligoni dice che due poligoni sono simili se sappiamo che tutti i lati meno uno sono in proporzione e tutti gli angoli compresi fra i lati in proporzione (cioe' tutti gli angoli meno due) sono congruenti.
Nel senso non che l'ultimo lato non sia in proporzione, ma che non lo sappiamo.

Il terzo criterio di similitudine fra triangoli dice che due triangoli sono simili se hanno tutti e tre i lati ordinatamente in proporzione (cioe' non so che sono congruenti i tre angoli); allora diremo che:
Il terzo criterio di similitudine fra poligoni dice che due poligoni sono simili se seppiamo che tutti i lati sono ordinatamente in proporzione e tutti gli angoli, eccetto tre, sono congruenti.
Nel senso non che i tre angoli siano diversi, ma nel senso che non lo sappiamo.

Visto l'utilizzo molto raro di tali criteri saltiamo la dimostrazione (intuitivamente basta suddividere il poligono in triangoli ed applicare a ogni coppia di questi triangoli il criterio relativo partendo dai triangoli che hanno tutte le caratteristiche per applicare tali criteri).

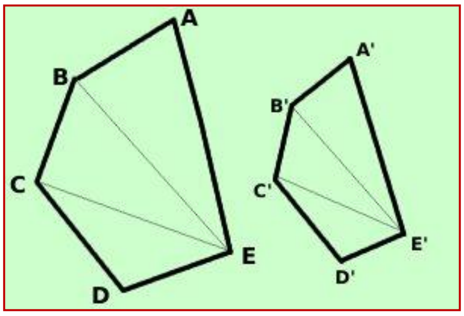
## c) Poligoni regolari (anche raggi e apoteme)

Possiamo dire per i poligoni regolari:
**Tutti i poligoni regolari dello stesso tipo sono simili**
nel senso che:
**Tutti i triangoli equilateri sono simili tra loro**
**Tutti i quadrati sono simili tra loro**
eccetera

Valgono anche le relazioni (equivalenti a quelle sui poligoni normali);
nei poligoni regolari:
**I perimetri stanno in proporzione come i rispettivi lati**
**Le apoteme stanno in proporzione come i rispettivi lati**
**Le aree stanno in proporzione come i quadrati dei rispettivi lati.**

## d) Proporzionalita' fra perimetri

Vale il teorema:
In poligoni simili i perimetri stanno tra loro come i rispettivi lati.
Cioe' se i due pentagoni:



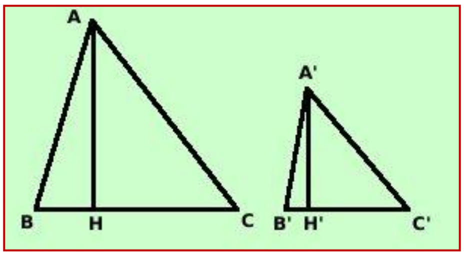

Sono simili allora posso scrivere anche:
**Perimetro (ABCDE) : Perimetro(A'B'C'D'E') = AB : A'B'**

---

Dimostrazione.
Essendo i poligoni simili, posso scrivere:
**AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A'**
(sono proporzioni valide considerando i rapporti due a due)
Posso applicare la proprieta' del comporre; posso farlo con una proporzione per volta oppure, per far prima, con tutte le proporzioni insieme:
**(AB+BC+CD+DE+EA) : AB =(A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A') : A'B'**
Applico la proprieta' del permutare: scambiando fra loro i medi la proporzione resta valida:
**(AB+BC+CD+DE+EA) : (A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A') = AB : A'B'**
e quindi:
**Perimetro (ABCDE) : Perimetro(A'B'C'D'E') = AB : A'B'**
come volevamo

## e) Proporzionalita' fra altezze

Vale il teorema:
In poligoni simili le altezze stanno tra loro come i lati corrispondenti.
Cioe' se, ad esempio i due triangoli:




sono simili, allora posso scrivere anche:
**AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C' = AH : A'H'**

---

*Dimostriamolo*.
So che i triangoli ABC ed A'B'C' sono simili.
Allora sono simili anche i triangoli ABH ed A'B'H'.
Infatti avremo che:
gli angoli ABH ed A'B'H' sono congruenti perche' angoli corrispondenti di triangoli simili;
gli angoli BHA e B'H'A' sono congruenti perche' retti.
Quindi per il primo criterio di similitudine i due triangoli sono simili e posso scrivere la proporzione:

BH : B'H' = AH : A'H'
ma sono simili anche i triangoli AHC ed A'H'C'.
Infatti avremo che:
gli angoli HCA ed H'C'A' sono congruenti perche' angoli corrispondenti di triangoli simili
gli angoli AHC e A'H'C' sono congruenti perche' retti.
Quindi per il primo criterio di similitudine i due triangoli sono simili e posso scrivere la proporzione:
HC : H'C' = AH : A'H'

Sommando due proporzioni valide ottengo ancora una proporzione valida:
(BH+HC) : (B'H'+H'C') = (AH+AH) : (A'H'+A'H')
BC : B'C' = 2 AH : 2 A'H'

Dopo l'uguale ho una frazione e questa non cambia il suo valore se divido numeratore e denominatore per lo stesso numero; divido quindi per 2:
BC : B'C' = AH : A'H'
Come volevamo.

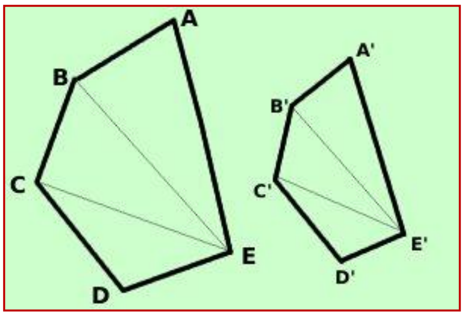
---

Si puo' dimostrare in modo piu' semplice utilizzando AB ed A'B' senza fare la somma: prova a farlo per esercizio

---

## f) Proporzionalita' fra aree

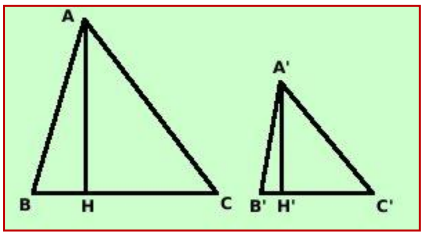
Vale il teorema:
In poligoni simili le aree stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi lati.
Cioe' se i due pentagoni




sono simili allora posso scrivere anche:
**Area (ABCDE) : Area(A'B'C'D'E') = (AB)$^2$ : (A'B')$^2$**

---

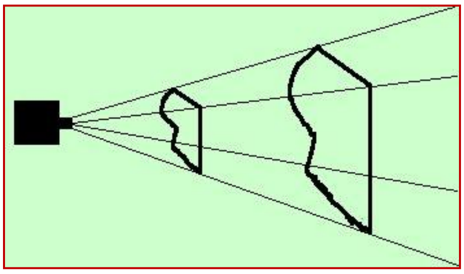
*Dimostrazione:*




Per semplicita' facciamo la dimostrazione su un triangolo; poi dividendo un qualunque poligono in triangoli potremo esportare la proprieta' a tutti i poligoni.
Essendo i triangoli simili posso scrivere la proporzione con le altezze (vedi pagina precedente):
AB : A'B' = AH : A'H'
Posso scrivere anche la proporzione (sempre valida):
AB : A'B' = AB : A'B'
Essendo le due proporzioni valide sara' valido anche il loro prodotto termine e termine:
(AB·AB) : (A'B'·A'B') = (AB·AH) : (A'B'·A'H')

Quindi, essendo AB·AH la doppia area di ABC e A'B'·A'H' la doppia area di A'B'C' avremo:
$(AB)^2 : (A'B')^2 = 2\,Area(ABC) : 2\,Area(A'B'C')$
Dopo l'uguale ho una frazione e questa non cambia il suo valore se divido numeratore e denominatore per lo stesso numero; divido quindi per 2:
$(AB)^2 : (A'B')^2 = Area(ABC) : Area(A'B'C')$
Come volevamo.

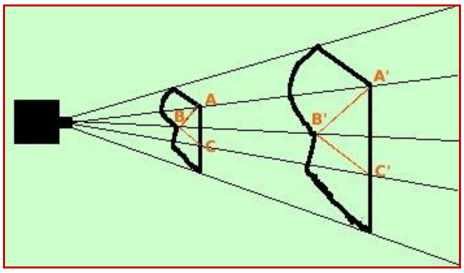
## 9. Similitudine fra figure piane qualsiasi



Per capire la similitudine fra figure piane qualsiasi pensiamo ad un proiettore e ad uno schermo che si possa avvicinare ed allontanare dal proiettore sempre sulla stessa linea (senza torsione): le figure appariranno sullo schermo piu' o meno grandi, ma "simili" fra loro nel senso che conserveranno la forma

Naturalmente questo concetto e' solamente intuitivo e quindi dobbiamo trovare un criterio "matematico" da utilizzare:

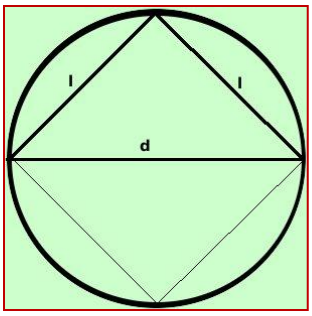
**Due figure si dicono simili se, considerate punto a punto, le distanze di punti corrispondenti sono fra loro proporzionali.**




In pratica, se prendo dei punti sulla prima figura (tipo A,B,C) ed i punti sulla seconda figura che sono sugli stessi raggi di proiezione (A',B',C'), allora se le figure sono simili avremo:
$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$
Per semplicita' di rappresentazione ho preso i punti A, B e C sul bordo, ma avrei potuto prenderli tranquillamente all'interno della figura: la proprietà delle distanze deve valere per **tutti** i punti delle figure.

# P. *Applicazioni metriche ad alcuni problemi di geometria*

## 1. Triangolo rettangolo isoscele




Il triangolo rettangolo isoscele e' il triangolo rettangolo con due cateti uguali, quindi:

- Ha due angoli di 45°
- E' meta' di un quadrato

Nel triangolo rettangolo isoscele basta conoscere almeno un lato (cateto o ipotenusa) per risolvere il triangolo.
Infatti per gli angoli avremo:
**Angolo retto = 90°**
**Angoli alla base del triangolo isoscele = 90°/2 = 45°**
Per i lati avremo che, chiamati **l** i cateti e **d** l'ipotenusa vale il teorema di Pitagora quindi:
$l^2 + l^2 = d^2$
$2l^2 = d^2$

---

Quindi essendo noto il valore d dell'ipotenusa avremo:

$2l^2 = d^2$

$l^2 = d^2 /2$

$l = \sqrt{(d^2 /2)}$

$l = d/\sqrt{2}$

Razionalizzo ed ottengo:

$$l = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

---

Essendo invece noto il valore **l** del cateto avremo:

$2l^2 = d^2$

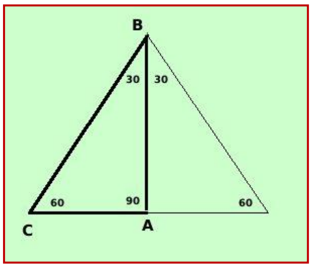
$d^2 = 2l^2$

$d = \sqrt{(2l^2)}$

$d = l\sqrt{2}$

## 2. Triangolo con angoli 30°, 60° e 90°

E' logicamente un triangolo rettangolo poiche' ha un angolo di 90°; inoltre e' la meta' di un triangolo equilatero: infatti eseguendo un ribaltamento attorno al cateto maggiore ottengo un triangolo con tre angoli di 60°, cioe' equiangolo e quindi equilatero.




Anche in questo triangolo basta conoscere almeno un lato (cateto o ipotenusa) per risolvere il triangolo.

Per i lati avremo che, chiamata **l** l'ipotenusa **BC** avremo che **CA** e' meta' del lato del triangolo equilatero quindi vale **l/2** cateti e siccome vale il teorema di Pitagora possiamo trovare l'altro cateto **h**:

$BC^2 = AC^2 + AB^2$

$l^2 = (l/2)^2 + h^2$

$h^2 = l^2 - (l^2/4)$

$h^2 = 3l^2/4$

$h = \sqrt{3l^2/4}$

Porto fuori di radice i quadrati ed ottengo:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

---

Quindi essendo noto il valore **l** dell'ipotenusa **BC** avremo:

$CA = l/2$

$$AB = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

---

Essendo invece noto il valore **h** del cateto **AB** avremo:

$$AB = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$$

$$2\,AB = BC\sqrt{3}$$

$$BC\sqrt{3} = 2\,AB$$

$$BC = \frac{2\,AB}{\sqrt{3}}$$

Razionalizzo ed ottengo:

$$BC = \frac{2AB\sqrt{3}}{3}$$

Quindi

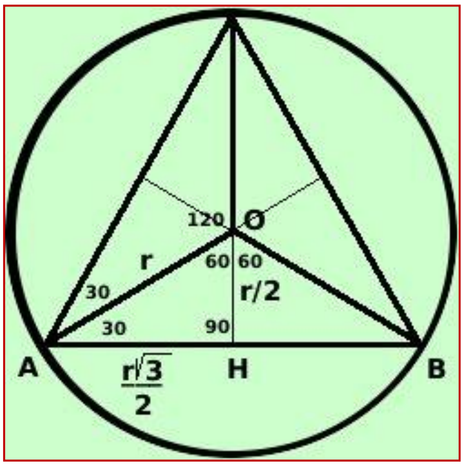
$$BC = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$$

e **AC** essendo al meta' di **BC** vale:

$$AC = \frac{h\sqrt{3}}{3}$$

---

## 3. Triangolo equilatero inscritto in una circonferenza




Anche in questo caso e' possibile risolvere completamente il triangolo conoscendo solamente il valore del raggio del cerchio circoscritto.
Infatti congiungendo il centro del cerchio con i vertici del triangolo equilatero ottengo tre triangoli isosceli con un angolo al vertice di 120°; mandando poi le altezze ( che sono anche bisettrici e mediane) dal centro del cerchio ottengo 6 triangoli tra loro congruenti. Ne considero uno, ad esempio **AHO.**
Esso ha:
**AO = r** perche' raggio del cerchio circoscritto;
**l'angolo AOH = 60°** perche' meta' dell'angolo di **120°** essendo l'altezza **OH** anche bisettrice dell'angolo **AOB;**
**l'angolo AHO = 90°** perche' **OH** e' l'altezza del triangolo **AOB.**
Quindi il triangolo **AOH** e' un triangolo con angoli di **30°, 60°** e **90°** e siccome conosco il valore del lato **AO = r** avremo:

$$OH = r/2$$

$$AH = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

---

Naturalmente e' possibile anche, noto il valore del lato l del triangolo, trovare il valore del raggio del cerchio circoscritto; infatti se:

$AB = l$

$AH = l/2$

$$AH = \frac{AO\sqrt{3}}{2}$$

$$2\,AH = AO\sqrt{3}$$

$$AO\sqrt{3} = 2\,AH$$

$$AO = \frac{2\,AH}{\sqrt{3}}$$

Razionalizzo ed ottengo:

$$AO = \frac{2AH\sqrt{3}}{3}$$

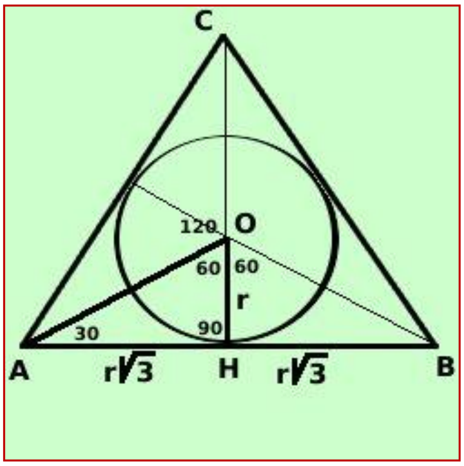
Quindi:

$$AO = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

---

## 4. Triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza

Anche in questo caso e' possibile risolvere completamente il triangolo conoscendo solamente il valore del raggio del cerchio inscritto.
Infatti tracciando dal centro del cerchio le perpendicolari ai lati del triangolo equilatero e congiungendo il centro con i vertici del triangolo ottengo tre triangoli.
Per il teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza, le altezze di questi triangoli sono anche mediane e quindi i tre triangoli sono isosceli con un angolo al vertice di 120° (angolo giro diviso tre).




Posso quindi considerare 6 triangoli tra loro congruenti: le meta' dei 3 triangoli isosceli.
Ne considero uno, ad esempio **AHO.**
Esso ha:
**OH = r** perche' raggio del cerchio circoscritto;

**l'angolo AOH = 60°** perche' meta' dell'angolo di **120°** essendo l'altezza **OH** anche bisettrice dell'angolo **AOB;**
**l'angolo AHO = 90°** perche' **OH** e' l'altezza del triangolo **AOB.**
Quindi il triangolo **AOH** e' un triangolo con angoli di **30°, 60°** e **90°** e siccome conosco il valore del lato **OH = r** avremo:

$AO = 2r$

$$AH = \frac{AO\sqrt{3}}{2}$$

$$AH = \frac{2r\sqrt{3}}{2}$$

Semplifico:

$AH = r\sqrt{3}$

$AB = l = 2\,r\sqrt{3}$

Da notare che l'altezza **CH** del triangolo equilatero vale **3r;** infatti:
**CH = CO + OH = 2r + r = 3r**

---

Noto il valore del lato l del triangolo, per trovare il valore del raggio del cerchio inscritto basta fare la formula inversa, infatti, noto il valore **l** del lato AB avremo:

$l = 2\,r\sqrt{3}$

Devo ricavare **r**

$2\,r\sqrt{3} = l$

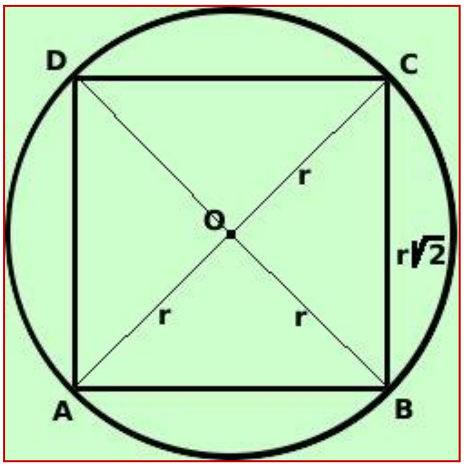
$$r = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

Razionalizzo:

$$r = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

---

## 5. Quadrato inscritto in una circonferenza




E' possibile risolvere completamente il quadrato conoscendo il valore del raggio del cerchio circoscritto al quadrato stesso.
Infatti la diagonale del quadrato corrisponde al diametro del cerchi; quindi:

$AC = 2r$

$AO = r$

Ma anche $OC = r$

Inoltre il triangolo **BOC** e' rettangolo ed isoscele

---

E' un triangolo rettangolo perche' congiungendo il centro del cerchio con i vertici del quadrato, ottengo 4

triangoli congruenti (3° Criterio di congruenza) e quindi l'angolo giro di 360° viene suddiviso nei 4 triangoli e quindi ogni triangolo ha un angolo di 90°.
E' un triangolo isoscele perche' le congiungenti il centro con i vertici del quadrato sono raggi.

---

Posso applicare il teorema di Pitagora per trovare il valore del lato BC:

$BC^2 = BO^2 + OC^2$

$BC^2 = r^2 + r^2$

$BC^2 = 2\,r^2$

$BC = r\,\sqrt{2}$

---

Noto il valore del lato del quadrato, per trovare il valore del raggio del cerchio circoscritto al quadrato basta fare la formula inversa; infatti, noto il valore **l** del lato AB avremo:

$l = r\sqrt{2}$

Devo ricavare **r:**

$r\sqrt{2} = l$

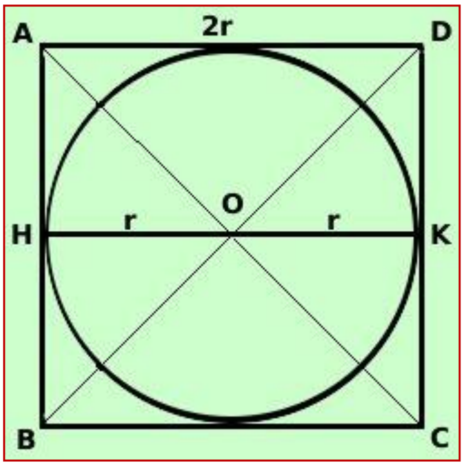
$$r = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

razionalizzo

$$r = \frac{l\,\sqrt{2}}{2}$$

---

## 6. Quadrato circoscritto ad una circonferenza




In questo caso il diametro del cerchio corrisponde al lato del quadrato quindi:

$AD = HO + OK = r + r = 2r$

---

Noto il valore del lato del quadrato, per trovare il valore del raggio del cerchio circoscritto al quadrato basta fare la formula inversa; infatti, noto il valore **l** del lato AB, avremo:

$l = 2r$

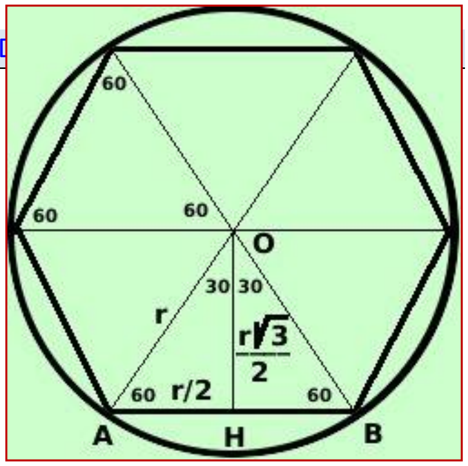
$2r = l$

$r = l/2$

## 7. Esagono regolare inscritto in una circonferenza

Congiungendo il centro del cerchio con i vertici dell'esagono si ottengono 6 triangoli equilateri.

Se considero uno di questi triangoli equilateri, ad esempio **AOB**, l'altezza **AH**, apotema




dell'esagono, lo divide in due triangoli rettangoli con angoli 30° e 60° e che quindi sappiamo risolvere.

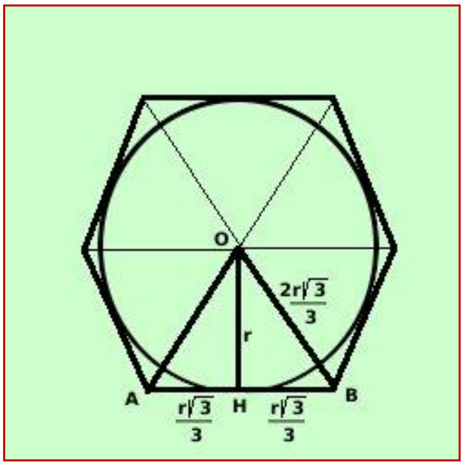
---

Quindi conoscendo il valore di **AO = r**, raggio del cerchio avremo:

**AB = HO + OK = r**

$$\text{Apotema} = OH = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

## 8. Esagono regolare circoscritto ad una circonferenza




Anche qui, congiungendo il centro del cerchio con i vertici dell'esagono si ottengono 6 triangoli equilateri. Se considero uno di questi triangoli equilateri, ad esempio **AOB**, l'altezza **AH**, apotema dell'esagono, lo divide in due triangoli rettangoli con angoli 30° e 60° e che quindi sappiamo risolvere.

---

Quindi conoscendo il valore di **OH = r**, raggio del cerchio avremo:

$$AH = \frac{OH\sqrt{3}}{3}$$

$$AB = AO = BO = \frac{2OH\sqrt{3}}{3}$$

---

Naturalmente possiamo anche calcolare le formule inverse: conoscendo il valore del lato **l** dell'esagono circoscritto possiamo trovare il valore **r** del raggio del cerchio inscritto

$$l = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

$$3\,l = 2r\sqrt{3}$$

$$2r\sqrt{3} = 3\,l$$

$$r = \frac{3\,l}{2\sqrt{3}}$$

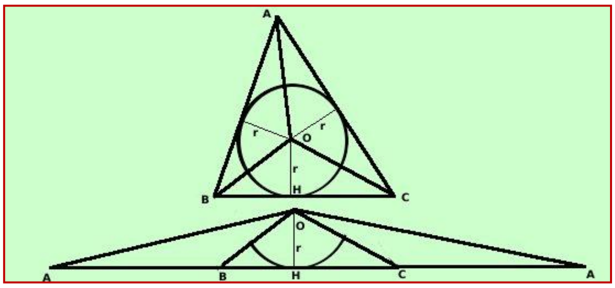
Razionalizzo:

$$r = \frac{3\,l\sqrt{3}}{6}$$

## 9. Area del triangolo noto perimetro e raggio del cerchio inscritto

Considero un triangolo ed il suo cerchio inscritto:
conosco il valore del perimetro del triangolo **2p**
conosco anche il valore del raggio **r** del cerchio inscritto
Con queste condizioni posso calcolare l'area del triangolo.

Congiungendo il centro del cerchio con i vertici del triangolo ottengo tre triangoli che hanno come altezza il raggio.
Per il teorema sull'equivalenza fra triangoli aventi stessa base e stessa altezza posso trasformare la figura in un secondo triangolo avente come base il perimetro e come altezza il raggio.




Ognuno dei triangolini di cui e' composta la seconda figura ha la stessa area del triangolino corrispondente nella prima figura (quelli corrispondenti hanno gli stessi vertici).

Ma la seconda figura e' un triangolo che ha come base il perimetro del primo triangolo e come altezza il raggio quindi per l'area vale:

$$A_s(ABC) = \frac{(AB+BC+CA)\cdot OH}{2} = \frac{2p \cdot r}{2}$$

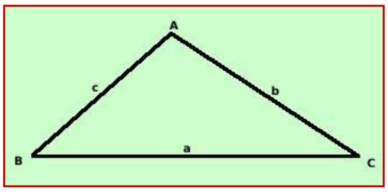
**L'area del triangolo si ottiene moltiplicando il perimetro del triangolo per il valore del raggio del cerchio inscritto e dividendo il risultato per 2:**

$$A_s = = \frac{2p \cdot r}{2}$$

Oppure piu' semplicemente, essendo **p** il semiperimetro:
**L'area del triangolo si ottiene moltiplicando il semiperimetro del triangolo per il valore del raggio del cerchio inscritto:**
$A_s = p \cdot r$

## 10. Area del triangolo note le misure dei lati (Erone)

Consideriamo un triangolo qualunque: consideriamo la figura:



Abbiamo come misure dei lati:
AB = c
BC = a
CA = b
Perimetro = 2p
p = semiperimetro
Vale la (famigerata) **Formula di Erone:**
$A_s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

---

Facciamo un esempio semplicissimo: considero il triangolo di lati 3,4 e 5 cm.

---

E' semplicissimo: infatti e' un triangolo rettangolo poiche' i lati rispettano il teorema di Pitagora: $3^2 + 4^2 = 5^2$; quindi per l'area avremo:
Area = cateto per cateto diviso 2 = $3 \cdot 4 / 2 = 6$ cm$^2$

---

Calcoliamo l'area con la formula di Erone.
Il semiperimetro vale:
(3+4+5)/2 = 6 cm quindi

$A_s = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$

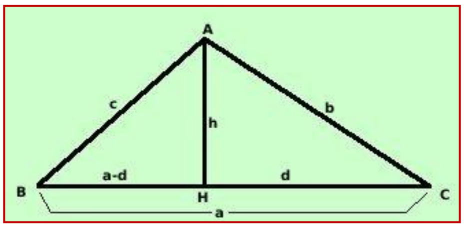
$A_s = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36}$

Estraggo di radice ed ottengo:
$A_s = 6$ cm$^2$
Come sapevamo.

---

Di solito, a partire dalle medie, la formula viene data senza dimostrarla; comunque, se ne hai bisogno, ecco la dimostrazione della formula di Erone:

Consideriamo un triangolo qualunque: esso avra' comunque due angoli acuti: chiamiamoli B e C e consideriamo la figura:




---

Nota: se metto al posto di B oppure C un angolo ottuso invece delle somme nella dimostrazione dovro' fare le differenze.

---

Abbiamo come misure note:
AB = c
BC = a
CA = b
Perimetro = 2p
p = semiperimetro
Considero la perpendicolare **AH** a **BC** e pongo **AH = h** e **HC = d**; quindi **AH = a-d.**

---

Per trovare l'area devo trovare il valore dell'altezza mediante i dati noti **a**, **b** e **c**: prima calcolo le due parti **AH** ed **HC** della base, poi, tramite questi, calcolo il valore dell'altezza **h.**

---

1. Calcolo il valore di **HC = d**
   Il triangolo ABH e' rettangolo per costruzione, quindi posso applicare il teorema di Pitagora:
   $c^2 = (a-d)^2 + h^2 = a^2 - 2ad + d^2 + h^2 =$
   ma siccome anche il triangolo AHC e' rettangolo so che vale:
   $d^2 + h^2 = b^2$ ed ottengo:
   $c^2 = a^2 - 2ad + b^2$
   Ricavo **d:**
   $2ad = a^2 + b^2 - c^2$
   $$d = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$
2. Questo valore trovato mi da' anche il valore di **BH;** infatti :
   $$BH = a - d = a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{2a^2 - a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} =$$
3. Calcolo ora il valore di **h**
   Il triangolo ACH e' rettangolo per costruzione, quindi posso applicare il teorema di Pitagora:
   $h^2 = b^2 - d^2 =$
   Sostituisco a **d** il valore trovato prima:
   $$h^2 = b^2 - \left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right]^2 =$$
4. Eseguo il quadrato al denominatore e faccio il minimo comune multiplo:
   $$= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} =$$
5. Sopra posso scomporre come differenza di due quadrati:
   $$= \frac{[2ab + (a^2 + b^2 - c^2)]\cdot[2ab - (a^2 + b^2 - c^2)]}{4a^2} =$$
6. Tolgo le parentesi interne:
   $$= \frac{[2ab + a^2 + b^2 - c^2][2ab - a^2 - b^2 + c^2]}{4a^2} =$$
7. Posso raccogliere dentro parentesi i termini che sono quadrati di un binomio:
   $$= \frac{[(a^2 + 2ab + b^2) - c^2][-(a^2 - 2ab + b^2) + c^2]}{4a^2} =$$
8. $$= \frac{[(a+b)^2 - c^2)][c^2 - (a-b)^2]}{4a^2}$$
9. Scompongo ancora come differenza di quadrati entro le parentesi quadre ed ottengo:
   $$h^2 = \frac{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(c+a-b)\cdot(c-a+b)}{4a^2} =$$
10. Ora abbiamo che, per ogni fattore trovato vale:
    $a+b+c = 2p$
    $a+b-c = a+b+c - 2c = 2p - 2c$
    $c+a-b = a+c-b = a+b+c - 2b = 2p - 2b$
    $c-a+b = c+b-a = a+b+c - 2a = 2p - 2a$
    Quindi, sostituendo ottengo:

$$h^2 = \frac{2p\cdot(2p-2c)\cdot(2p-2b)\cdot(2p-2a)}{4a^2} =$$

11. Raccolgo i 2 dentro parentesi, li porto fuori e li moltiplico:

$$h^2 = \frac{16p\cdot(p-c)\cdot(p-b)\cdot(p-a)}{4a^2} =$$

12. Semplifico per 4:

$$= \frac{4p\cdot(p-c)\cdot(p-b)\cdot(p-a)}{a^2}$$

13. Estraendo la radice ottengo il valore di **h:**

$$h = 2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

Ora possiamo trovare il valore dell'area:

$$A_s = \frac{a\cdot h}{2} =$$

$$= \frac{a\cdot 2}{2}\;\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

E quindi, semplificando:

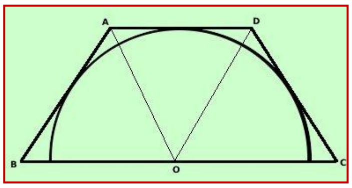
$$A_s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

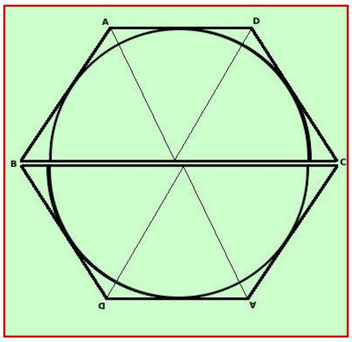
Come vedi, se la formula non viene dimostrata c'e' la buona ragione che la di mostrazione e' troppo complicata: e' per questo che io chiamo la formula "famigerata" perche' si sa che esiste sin dalla scuola media, pero' non si dimostra mai

## 11. Trapezio isoscele con lato obliquo congruente alla base minore

Veramente nei libri di testo questo esempio non l'ho mai visto, pero' siccome ho trovato nella mia carriera tanti problemi che si basavano su di esso, penso che meriti di essere considerato fra gli altri casi.

Considero un trapezio isoscele in cui il lato obliquo sia congruente alla base minore.

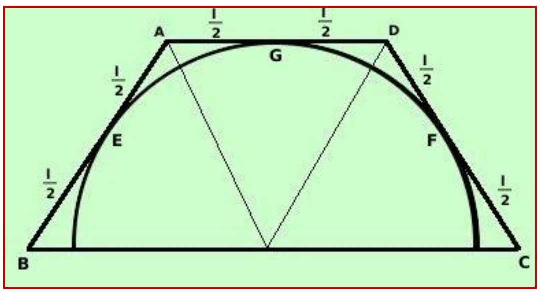



La figura corrisponde a meta' dell'esagono regolare circoscritto alla circonferenza e pertanto potremo basarci su di essa per discuterla.

Infatti, se considero il trapezio isoscele con lato obliquo congruente alla base minore e lo "ribalto" attorno alla base maggiore ottengo un esagono regolare quasi regolare: colpa mia! Non sono troppo preciso nel disegno.

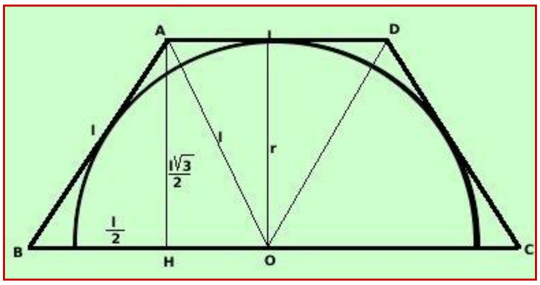
Una proprieta' abbastanza interessante e' data dal fatto che i segmenti di tangente condotti da un punto esterno ad una circonferenza sono fra loro congruenti; quindi, avremo che i lati obliqui e la base minore del trapezio sono suddivisi a meta' dal punto di tangenza al cerchio:



$BE = EA = AG = GD = DF = FC = l/2$

In genere posso considerare tre tipi di problemi:

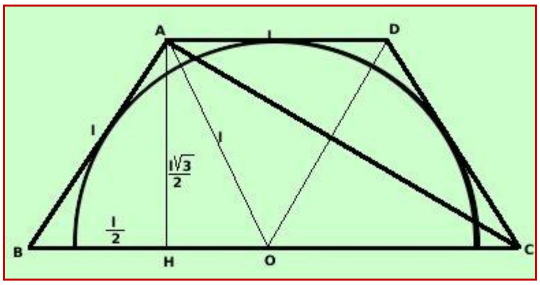
- Dato il valore del lato obliquo risolvere il trapezio.
  Supponiamo di conoscere il valore **l** del lato obliquo:
  $AB = CD = AD = l$
  Inoltre:
  $BC = BO + OC = l + l = 2\,l$




  Se considero il semicerchio inscritto, congiungendo i vertici con il centro del semicerchio, posso dividere il trapezio in tre triangoli equilateri. Consideriamo il triangolo equilatero **ABO.**
  L'altezza **AH** lo divide in due triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60°.
  Considero il triangolo **ABH.**
  Posso trovare il valore di **AH** altezza del trapezio:

  $$AH = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \text{raggio del cerchio circoscritto}$$

- Inoltre, essendo i triangoli equilateri, conosco anche il valore della base maggiore:
  $BC = 2l$
- Problemi collegati al gran numero di triangoli rettangoli che si possono formare nella figura.



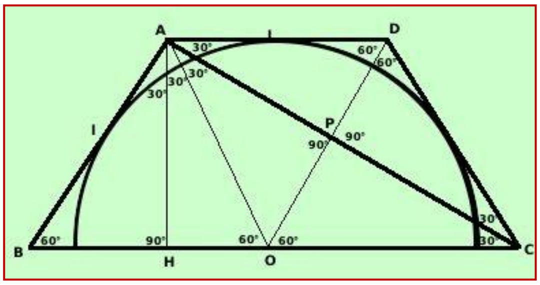

  Congiunto un vertice della base maggiore con il vertice opposto della base minore, risolvere il triangolo rettangolo che cosi' si viene a formare. Il triangolo (ad esempio **ABC**)che si forma ha un lato doppio dell'altro ed un angolo di 60° come anche il triangolo **ABH.** Quindi i due triangoli **ABC** ed **ABH** sono simili per il secondo criterio di similitudine; quindi anche **ABC** e' un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°.

  Naturalmente sono rettangoli anche i triangoli in cui **ABC** e' diviso dalla sua altezza relativa all'ipotenusa.

  Se inoltre considero il quadrilatero **AOCD** esso e' un rombo e viene diviso dalle sue diagonali in 4 triangoli rettangoli, anche questi con angoli di 30° e 60°.

  Pensa che oltre cio' e' possibile considerare anche la congiungente **BD** e quindi....

  Problemi collegati al valore degli angoli




  Ti illustro nella figura i valori di alcuni angoli: da questi puoi renderti conti di quali e quanti problemi si potrebbero costruire con questa figura

# Q. *Ciclometria*

## 1. Introduzione

In questo capitolo cercheremo di risolvere il problema classico della misura del cerchio (ciclo = cerchio metròs = misura) ed anche rettificazione della circonferenza, cioe' "stendere" la circonfernza su una retta e trovare la relazione tra tale segmento ed il raggio
Il problema della rettificazione della circonferenza, dato il raggio e' uno dei tre grandi problemi dell'antichita':

---

Gli altri erano:
*Con riga e compasso trovare:*
*La trisezione di un angolo: come dividere un angolo in tre parti uguali .*
*La duplicazione del cubo: dato un cubo trovare il lato di un altro cubo che abbia volume doppio del dato.*
Il primo problema e' risolvibile solo in casi particolari perche' equivale a risolvere un'equazione di terzo grado e quindi non e' sempre risolvibile con riga e compasso.
Anche il secondo non e' risolvibile con riga e compasso: l'uso di riga e compasso equivale a risolvere il problema mediante equazioni risolubili con le sole operazioni razionali ed anche radici quadrate: per risolvere il problema invece devo trovare la radice cubica di un numero.

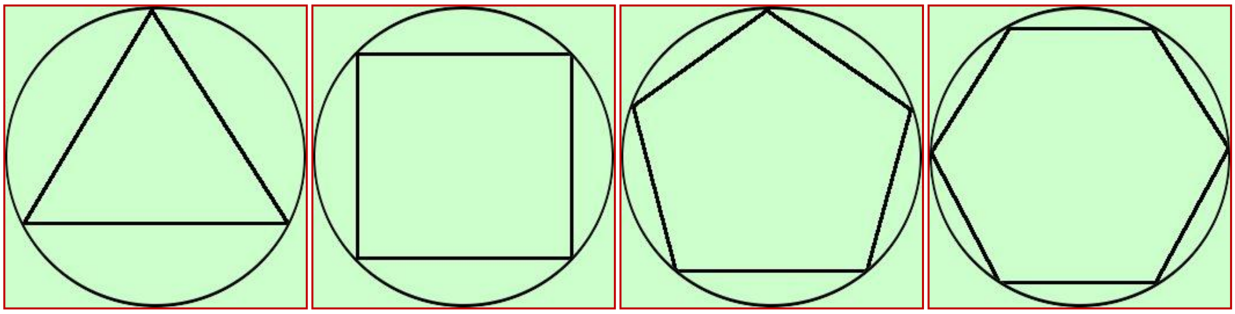
---

Anche il terzo problema, che e' quello che ci interessa, non e' risolvibile con riga e compasso, ma useremo il metodo, gia' usato per introdurre i numeri reali, delle sezioni di Dedekind, utilizzando pero' delle classi contigue di misure di perimetri (per la circonferenza) e di aree (per il cerchio).

---

## 2. Poligoni regolari inscritti in una circonferenza

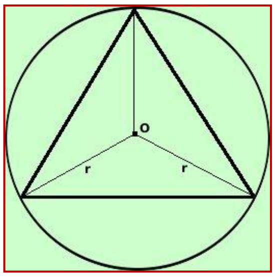
Enuncio alcune proprieta' senza dimostrazione.
Abbiamo che:
**Dato un qualsiasi poligono regolare e' sempre possibile inscriverlo in una circonferenza.**

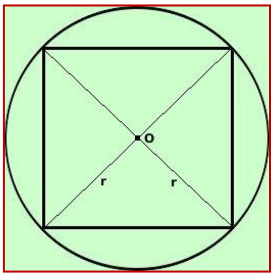


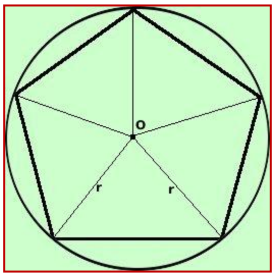
ecc...

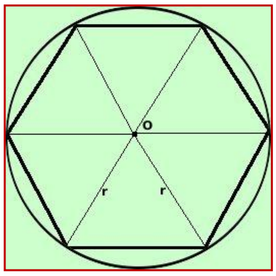
---

In questo caso i raggi dei cerchi coincidono con i lati dei triangoli congruenti in cui possiamo suddividere i vari poligoni regolari, congiungendo il centro del cerchio circoscritto con i vertici dei poligoni:



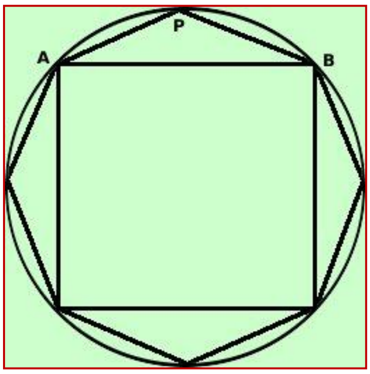




Inoltre avremo che:

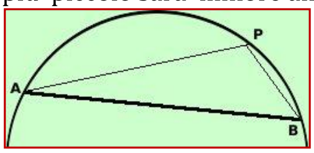
**All'aumentare del numero dei lati la misura del perimetro di un poligono regolare inscritto in una circonferenza aumenta avvicinandosi alla misura della lunghezza della circonferenza stessa.**




Ad esempio se considero il quadrato inscritto e poi l'ottagono regolare inscritto avremo che il perimetro dell'ottagono e' maggiore del perimetro del quadrato ma minore della lunghezza della circonferenza.

Per mostrare che la misura circonferenza e' maggiore della misura del perimetro di qualunque poligono inscritto basta ricordare che ogni corda e' minore del suo arco.
Prova a dimostrarlo per esercizio (vedi esercizio)
Se considero il lato del quadrato **AB** ed i lati dell'ottagono **AP** e **PB,** essi formano il triangolo **APB** ed in ogni triangolo ogni lato e' minore della somma degli altri due; quindi:
**AB < AP + PB**
Applicandolo a tutti i lati del quadrato e dell'ottagono ottengo la proprieta'.

***Esercizio:***
Dimostrare che in ogni circonferenza una corda e' minore del suo arco.
Intanto una corda determina sulla circonfernza due archi: consideriamone il minore (se la corda e' minore del piu' piccolo sara' minore anche del piu' grande).

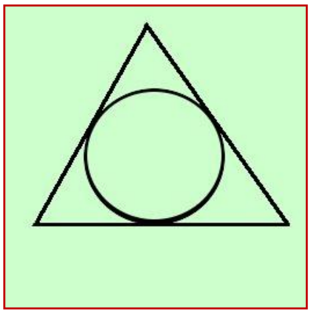
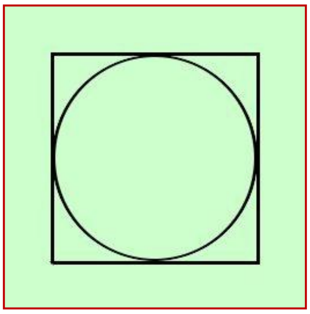
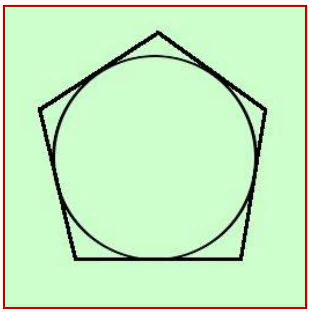
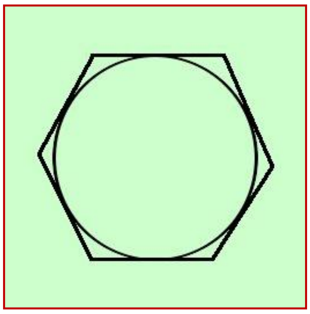



Devo considerare AB come corda ed anche AB come arco.
Dobbiamo dimostrare che la corda AB e' minore dell'arco AB.
Sull'arco AB considero un qualunque punto P diverso da A e da B, e congiungo P con A e con B.
Ottengo il triangolo **PAB** ed in ogni triangolo ogni lato e' minore della somma degli altri due, quindi:
**AB < AP + PB**
Poiche', per ogni corda e relativo arco e' possibile ripetere questo ragionamento, e ripetendolo per le corde AP e PB, e reiterando il ragionamento per tutte le successive corde che determineremo, ne segue che:
**corda AB < arco AB**

## 3. Poligoni regolari circoscritti ad una circonferenza

Enuncio alcune proprieta' senza dimostrazione.
Abbiamo che:

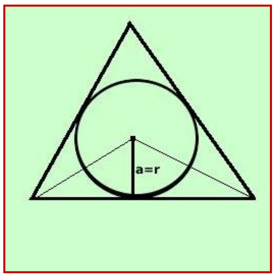
**Dato un qualsiasi poligono regolare e' sempre possibile circoscriverlo ad una circonferenza**

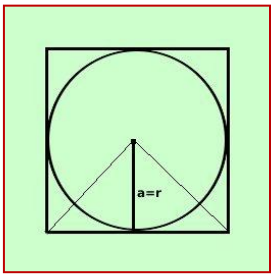





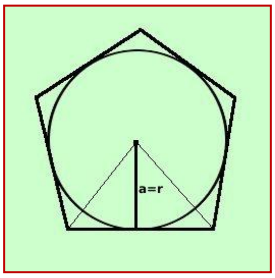
ecc...

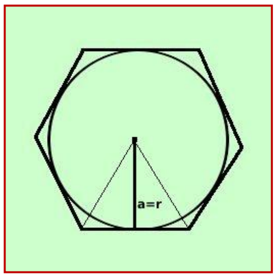
---

In questo caso i raggi dei cerchi coincidono con le apoteme dei vari poligoni regolari:





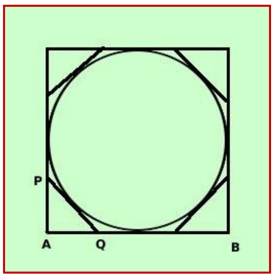





---

Inoltre avremo che:

**All'aumentare del numero dei lati la misura del perimetro di un poligono regolare circoscritto ad una circonferenza diminuisce avvicinandosi alla misura della lunghezza della circonferenza stessa.**




Ad esempio, se considero il quadrato circoscritto e poi l'ottagono regolare circoscritto, avremo che il perimetro dell'ottagono e' minore del perimetro del quadrato ma maggiore della lunghezza della circonferenza.

Infatti, se considero il triangolo **APQ**, siccome in ogni triangolo un lato e' minore della somma degli altri due, avremo:

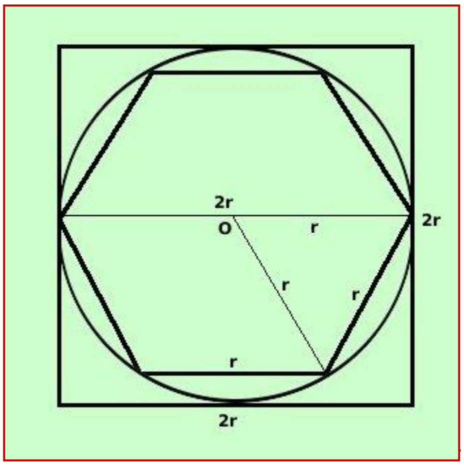
$PQ < AP + AQ$

Applicando tale ragionamento opportunamente ai lati del quadrato e dell'ottagono ottengo la proprieta' .

## 4. Una prima determinazione della lunghezza della circonferenza

Cerchiamo, intuitivamente di capire quanto "grosso modo" puo' misurare la circonferenza di raggio dato **r** .

Considero una circonferenza di raggio **r** e ne considero l'esagono regolare inscritto e il quadrato circoscritto.




Il quadrato ha il lato di misura **2r** essendo tale lato congruente al diametro della circonferenza.

Quindi avremo che il perimetro del quadrato vale:

$\text{Perimetro} = 2p = 4 \cdot 2r = 8r$

L'esagono regolare inscritto in una circonferenza ha il lato congruente al raggio della circonferenza stessa.

Pertanto l'esagono avra' perimetro di misura:

$\text{Perimetro} = 2p = 6 \cdot r = 6r$

La circonferenza avrà una lunghezza che dipendera' dal suo diametro (se varia il diametro varia anche la circonferenza); chiamiamo tale lunghezza:
**Misura circonferenza = numero · 2r**
e la misura della circonferenza sara' minore del perimetro del quadrato ma maggiore del perimetro dell'esagono:
**6r < numero · 2r < 8r**
Divido tutti i termini di questa disuguaglianza per **2r** cioe' per il diametro.

---

Vedi teoria della misura: equivale a dire "misuro la circonferenza rispetto al suo diametro"

---

Ottengo:
**3 < numero < 4**
Quindi la misura della circonferenza rispetto al suo diametro e' un numero compreso fra 3 e 4. Tale numero, per convenzione, verra' chiamato **pi greco** e, per indicarlo, verra' utilizzato il simbolo $\pi$ .
**$3 < \pi < 4$**
Ed indicheremo la misura della lunghezza della circonferenza come:
**Misura circonferenza = $2\pi r$**

## 5. Lunghezza della circonferenza

---

Ora individuiamo, in modo matematico, il valore della lunghezza della circonferenza.

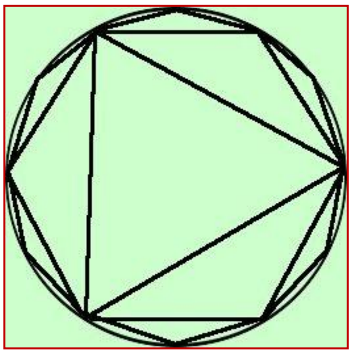
---

Considero una circonferenza di raggio **r** e ne considero tutti i poligoni regolari inscritti

---

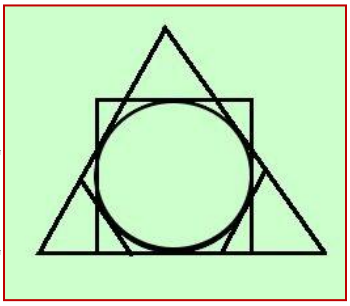
In figura, per semplicita' di rappresentazione, ne considero solo alcuni, ma tu devi pensarli tutti

---



La misura del perimetro (chiamiamolo 2p) di tali poligoni aumentera' all'aumentare del numero dei lati e si avvicinera' indefintamente al valore della lunghezza della circonferenza, che, in accordo con la pagina precedente, chiameremo **$2\pi r$** .
Chiamando tali perimetri di poligoni regolari inscritti:
**$2pi_3$** perimetro del triangolo equilatero inscritto
**$2pi_4$** perimetro del quadrato inscritto
**$2pi_5$** perimetro del pentagono regolare inscritto
**$2pi_6$** perimetro dell'esagono regolare inscritto
**$2pi_7$** perimetro dell'ettagono regolare inscritto
............................
............................
Avremo:
**$2pi_3 < 2pi_4 < 2pi_5 < 2pi_6 < 2pi_7 <\ldots\ldots<$ lunghezza circonferenza= $2\pi r$**

Considero poi anche tutti i poligoni regolari circoscritti.



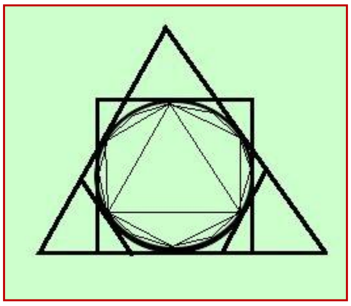
---

In figura, per semplicita' di rappresentazione, ne considero solo alcuni, ma tu devi pensarli tutti.

---

La misura del perimetro di tali poligoni diminuira' all'aumentare del numero dei lati e si avvicinera' indefinitamente al valore della

lunghezza della circonferenza.
Chiamando tali perimetri di poligoni regolari circoscritti:
$2pc_3$ perimetro del triangolo equilatero circoscritto
$2pc_4$ perimetro del quadrato circoscritto
$2pc_5$ perimetro del pentagono regolare circoscritto
$2pc_6$ perimetro dell'esagono regolare circoscritto
$2pc_7$ perimetro dell'ettagono regolare circoscritto
............................
............................
avremo:
$2pc_3 > 2pc_4 > 2pc_5 > 2pc_6 > 2pc_7 > ...... >$ lunghezza circonferenza$= 2\pi r$
Quindi, raccogliendo, per la lunghezza della circonferenza potremo scrivere
$2pi_3 < 2pi_4 < 2pi_5 < 2pi_6 < 2pi_7 < ...... < 2\pi r < ....... < 2pc_7 < 2pc_6 < 2pc_5 < 2pc_4 < 2pc_3$



Ora le due classi di perimetri inscritti e circoscritti formano due classi contigue di numeri perche':

- Sono classi separate; ogni perimetro di poligono regolare inscritto e' minore di ogni perimetro di poligono regolare circoscritto.
- Godono dell'avvicinamento indefinito; dato un numero piccolo a piacere posso trovare un perimetro di poligono regolare circoscritto ed un perimetro di poligono regolare inscritto tali che la loro differenza sia minore del numero fissato (basta aumentare sufficientemente il numero dei lati).

Le due classi contigue individuano un unico elemento separatore cioe' la lunghezza della circonferenza, che, in questo modo, ottiene a pieno titolo la sua cittadinanza matematica.

**Misura lunghezza circonferenza $= 2\pi r$**

---

Visto il ragionamento fatto a volte si dice anche che la circonfernza e' il poligono regolare con un numero infinito di lati.

---

## 6. Utilizzo del "numero" pi greco

**Pi greco** e' un numero reale e non razionale.
E' possibile, misurando il perimetro dei poligoni inscritti e circoscritti, come fatto nelle pagine precedenti, determinare in modo piu' preciso il valore di pigreco (esempio: Archimede nell'opera "Misura del cerchio") ma, geometricamente, e' quasi impossibile superare la seconda cifra decimale : bisognera' utilizzare le serie di potenze per avere la determinazione del valore di pigreco fino alla cifra decimale voluta:
$\pi = 3{,}141592654.....$
Di solito, nei problemi scolastici di misura, nella scuola media inferiore, si approssima alla seconda cifra decimale:
$\pi \sim 3{,}14$

---

**NOTA IMPORTANTE**

Quando risolvi un problema di matematica in modo esatto non puoi sostituire al valore di **pi greco** un numero, per quanti decimali esso abbia: il numero **pi greco** (trascendente) e' un decimale illimitato e non periodico.

Quindi, per poter risolvere un problema in modo matematico, dovrai sempre mantenere il simbolo **pi greco** (naturalmente ricordando che vale circa 3,14). Ad esempio:

***Problema:***

Trovare la lunghezza della circonferenza di raggio **r = 5 cm**

Soluzione

**Circonferenza** $= 2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ **cm**

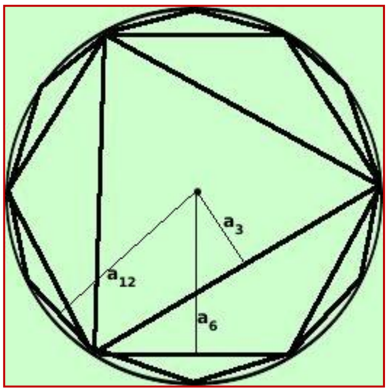
questo e' il valore matematico della lunghezza della circonferenza.

Il fatto che vale all'incirca 31,4 cm (10 · 3,14..) ti deve essere noto, ma non deve essere scritto nello svolgimento del problema.

## 7. Area del cerchio

Facciamo ora per l'area del cerchio l'equivalente di quanto fatto per la lunghezza della circonferenza.

Considero una circonferenza di raggio **r** e considero l'area di tutti i poligoni regolari in essa inscritti.




In figura, per semplicita' di rappresentazione, ne considero solo alcuni, ma tu devi pensarli tutti.

La misura dell'Area di tali poligoni (perimetro per apotema diviso due o meglio semiperimetro per apotema) aumentera' all'aumentare del numero dei lati e si avvicinera' indefintamente al valore dell' area della circonferenza, che chiameremo per ora $A_S$.

Chiamando **2p** il perimetro e quindi **p** il semiperimetro e chiamando **a** le apoteme avremo che le aree sono:

$p_3 \cdot a_3$ area del triangolo equilatero inscritto

$p_3 \cdot a_3$ area del quadrato inscritto

$p_3 \cdot a_3$ area del pentagono regolare inscritto

$p_3 \cdot a_3$ area dell'esagono regolare inscritto

$p_3 \cdot a_3$ area dell'ettagono regolare inscritto

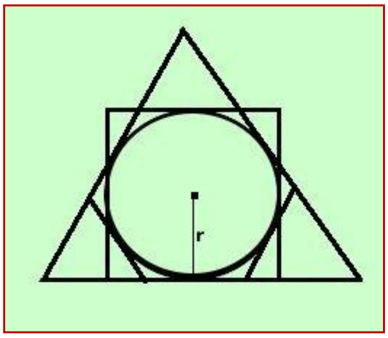
..............................

Avremo:

$p_3 \cdot a_3 < p_4 \cdot a_4 < p_5 \cdot a_5 < p_6 \cdot a_6 < p_7 \cdot a_7 < \ldots\ldots < A_S$

C'e' da dire subito che all'aumentare del numero dei lati le apoteme dei poligoni inscritti si avvicinano sempre piu' al valore del raggio **r.**

Considero poi anche tutti i poligoni regolari circoscritti.




In figura, per semplicita' di rappresentazione, ne considero solo alcuni, ma tu devi pensarli tutti.

L'area di tali poligoni (perimetro per raggio diviso due, perche' l'apotema coincide con il raggio) diminuira' all'aumentare del numero dei lati e si avvicinera' indefinitamente al valore dell'area del cerchio.

Chiamando **2p** il perimetro e quindi **p** il semiperimetro avremo per le aree di poligoni regolari circoscritti:

$p_3 r$ area del triangolo equilatero circoscritto

$p_4 r$ area del quadrato circoscritto

$\mathbf{p_5r}$ area del pentagono regolare circoscritto
$\mathbf{p_6r}$ area dell'esagono regolare circoscritto
$\mathbf{p_7r}$ area dell'ettagono regolare circoscritto
...........................
Avremo:
$p_3r > p_4r > p_5r > p_6r > p_7r > ......> A_s$
Quindi, raccogliendo, per l'area del cerchio potremo scrivere:
$p_3a_3 < p_3a_3 < p_3a_3 < p_3a_3 < p_3a_3 < ...... < A_s < ....... < p_7r < p_6r < p_5r < p_4r < p_3r$
Ora le due classi di aree dei poligoni inscritti e circoscritti formano due classi contigue di numeri perche':

- Sono classi separate: ogni area di poligono regolare inscritto e' minore di ogni area di poligono regolare circoscritto.
- Godono dell'avvicinamento indefinito: dato un numero piccolo a piacere posso trovare un'area di poligono regolare circoscritto ed un'area di poligono regolare inscritto tali che la loro differenza sia minore del numero fissato (basta aumentare sufficientemente il numero dei lati).

Le due classi contigue individuano un unico elemento separatore cioe' l'area del cerchio.
Come volevamo.

Visto che abbiamo trovato le aree dei poligoni facendo perimetro per apotema diviso 2, potremo applicare il metodo anche al cerchio considerando la circonferenza come un poligono di infiniti lati:
avremo che il perimetro coincide con la lunghezza della circonferenza e l'apotema coincide con il raggio, quindi

$$A_s \text{ cerchio} = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2$$

**L'area del cerchio si ottiene moltiplicando il valore di pi greco per il quadrato del raggio**

***Problema:***
Trovare l'area del cerchio di raggio **r = 5 cm.**
Soluzione:
$\mathbf{A_s cerchio = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = \pi \cdot 25 = 25\, \pi\ cm^2}$
Data l'importanza dell'argomento lo ripeto ancora:
questo e' il valore matematico dell'area del cerchio.
Il fatto che vale all'incirca 78 $cm^2$ (25 · 3,14..) ti deve essere noto, ma non deve essere scritto nello svolgimento del problema .

## 8. Misura dell'arco di circonferenza

Possiamo ora calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza conoscendone l'angolo al centro (e viceversa).

Ricordando che gli archi della stessa circonferenza e i rispettivi angoli al centro sono tra loro proporzionali potremo scrivere:
**circonferenza : arco = 360° : angolo**

Siccome alla circonferenza corrisponde un angolo di 360°, ad ogni arco corrispondera' un angolo tale da rispettare la proporzione.

---

Quindi se conosco l'angolo al centro, il corrispondente arco vale:

$$\text{arco} = \frac{\text{circonferena} \cdot \text{angolo}}{360°}$$

*Esempio:*
Considerando un cerchio di raggio **r = 6 cm** trovare la lunghezza dell'arco con angolo al centro di 120°.
Soluzione:

$$\text{arco} = \frac{2\,\pi 6 \cdot 120°}{360°} = \frac{12\,\pi \cdot 120°}{360°} = 4\pi$$

---

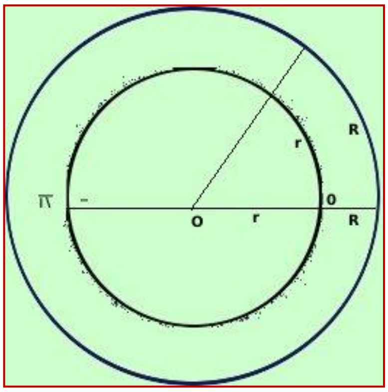
Se invece conosco l'arco, allora il corrispondente angolo al centro vale:

$$\text{angolo} = \frac{\text{arco} \cdot 360°}{\text{circonferenza}}$$

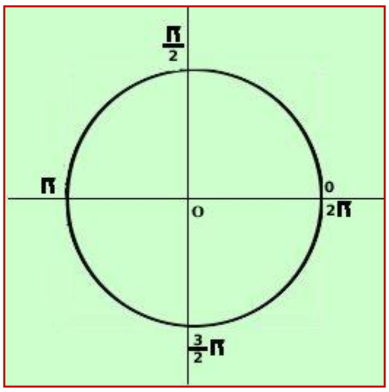
*Esempio:*
Considerando un cerchio di raggio **r = 6 cm** e considerato un arco di lunghezza 6 $\pi$, trovare il valore dell' angolo al centro.
Soluzione:

$$\text{angolo} = \frac{6\,\pi \cdot 360°}{2\,\pi 6} = \frac{6\,\pi \cdot 360°}{12\,\pi} = 180°$$

## 9. Radiante




Consideriamo ora il **radiante** cioe' l'arco che, rettificato, ha la stessa lunghezza del raggio del cerchio e usiamolo come unita' di misura per la circonferenza; infatti, se considero un arco uguale al raggio, avro' che la circonferenza vale:
**Misura circonferenza = 2 $\pi$ r**
Cioe', se assumo il radiante come unita' di misura allora la circonferenza e' sempre 2 $\pi$ radianti.
E questo vale per ogni circonferenza. perche' variando il raggio varia la lunghezza della circonferenza.




Utilizzando una misura pari al raggio la misura della circonferenza sara' sempre la stessa e questo sara' molto utile.
Ad esempio, in trigonometria dove considereremo la circonferenza standard di raggio uguale ad 1, avremo che:
- l'intera circonferenza vale $2\pi$
- mezza circonferenza vale $\pi$
- un quarto di circonferenza vale $\pi/2$

Per curiosita' calcoliamo a quanto corrisponde (pressapoco) un angolo radiante, cioe' l'angolo al centro corrispondente all'arco radiante utilizzando la formula della pagina precedente:

$$\text{angolo} = \frac{\text{arco} \cdot 360°}{\text{circonferenza}}$$

$$\text{angolo radiante} = \frac{r \cdot 360°}{2\,\pi\, r} = \frac{180°}{\pi} \sim 57°\ 17'\ 45''$$

Ho eseguito il calcolo mediante la calcolatrice ed e' approssimato al secondo di grado.

## 10. Misura del settore circolare

Possiamo ora calcolare l'area di un settore circolare conoscendone l'angolo al centro (e viceversa).

Ricordando che le aree dei settori circolari della stesso cerchio e i rispettivi angoli al centro sono tra loro proporzionali; anche qui potremo scrivere:

$$A_s\,\text{cerchio} : A_s\,\text{settore} = 360° : \text{angolo}$$

Siccome alla circonferenza corrisponde un angolo di 360° ad ogni settore corrispondera' un angolo tale da rispettare la proporzione:

Quindi, se conosco l'angolo al centro, il corrispondente settore vale:

$$A_s\text{settore} = \frac{A_s\text{cerchio} \cdot \text{angolo}}{360°}$$

*Esempio:*

Considerando un cerchio di raggio **r = 6 cm** trovare la l'area del settore con angolo al centro di 120°.

Soluzione:

$$A_s\text{settore} = \frac{\pi 6^2 \cdot 120°}{360°} = \frac{36\,\pi \cdot 120°}{360°} = 12\pi\ \text{cm}^2$$

Se invece conosco l'area del settore, allora il corrispondente angolo al centro vale:

$$\text{angolo} = \frac{A_s\text{settore} \cdot 360°}{A_s\text{cerchio}}$$

Esempio:

Considerando un cerchio di raggio **r = 6 cm** e considerato un settore circolare di area 18 $\pi$ cm$^2$, trovare il valore dell' angolo al centro:

Soluzione

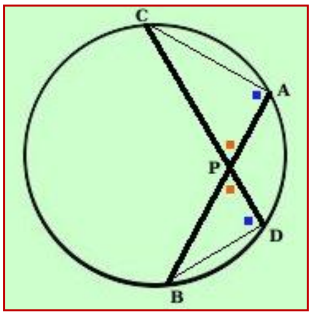
$$\text{angolo} = \frac{18\,\pi \cdot 360°}{\pi 6^2} = \frac{18\,\pi \cdot 360°}{36\,\pi} = 180°$$

## 11. Alcuni teoremi e relazioni metriche

Ora, come conclusione sulla circonferenza, studiamo alcuni problemi ed alcune relazioni metriche che saranno molto utili nella soluzione di vari problemi.

### a) Teorema delle corde

Se due corde di una circonferenza si tagliano, allora i due segmenti di una corda formano i medi e i due segmenti della seconda corda formano gli estremi di una proporzione:




| Ipotesi | Tesi |
|---|---|
| AB e CD corde | AP : DP = CP : BP |

*Dimostrazione:*
Considero i triangoli **APC** e **BPD.** Essi hanno:
$A\hat{P}C = B\hat{P}D$
perche' opposti al vertice;
$C\hat{A}B = C\hat{D}B$
perche' angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco **BC.**
Quindi i due triangoli **CAP** e **BPD** sono simili per il primo criterio di similitudine e posso scrivere:

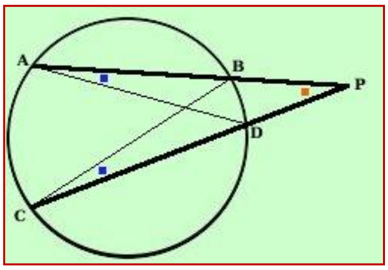
Te li ordino secondo gli angoli per scrivere meglio la proporzione

| | | |
|---|---|---|
| C | A | P |
| B | D | P |

AP : DP = CP : BP
Come volevamo.

### b) Teorema delle secanti

Se da un punto esterno traccio due secanti ad una stessa circonferenza allora un'intera secante e la sua parte esterna formano i medi, l'altre intera secante e la sua parte esterna formano gli estremi di una proporzione.




| Ipotesi | Tesi |
|---|---|
| PA e PC secanti | AP : CP = DP : BP |

*Dimostrazione:*
Considero i triangoli **APD** e **BPC.** Essi hanno:
$A\hat{P}D = B\hat{P}C$
perche' in comune;

$P\hat{A}D = P\hat{C}B$

perche' angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco **BD.**
Quindi i due triangoli **PAD** e **PCB** sono simili per il primo criterio di similitudine e posso scrivere:

---

Te li ordino secondo gli angoli per scrivere meglio la proporzione:

| | | |
|---|---|---|
| A | D | P |
| C | B | P |

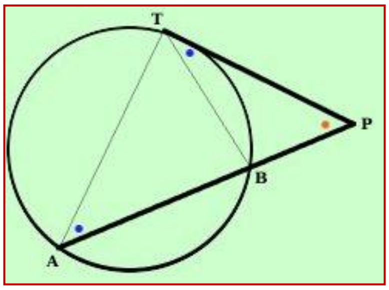
---

**AP : CP = DP : BP**

Come volevamo.

---

## c) Teorema della secante e della tangente




Se da un punto esterno traccio una secante ed una tangente ad una stessa circonferenza; allora l'intera secante e la sua parte esterna formano gli estremi, mentre la tangente forma i medi di una proporzione continua:

| Ipotesi | Tesi |
|---|---|
| PA secante | PA : PT = PT : PB |
| PT tangente | |

*Dimostrazione*:
Considero i triangoli **PTA** e **PTB** essi hanno:

$A\hat{P}T = B\hat{P}T$

perche' in comune:

$P\hat{A}T = P\hat{T}B$

perche' angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco **TB.**
Il secondo angolo e' la posizione limite formata dalla corda e dalla tangente
Quindi i due triangoli **PAD** e **PCB** sono simili per il primo criterio di similitudine e posso scrivere:

---

Te li ordino secondo gli angoli per scrivere meglio la proporzione:

| | | |
|---|---|---|
| P | A | T |
| P | T | B |

---

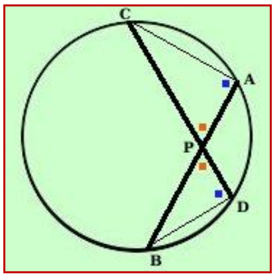
**PA : PT = PT : PB**

Come volevamo.

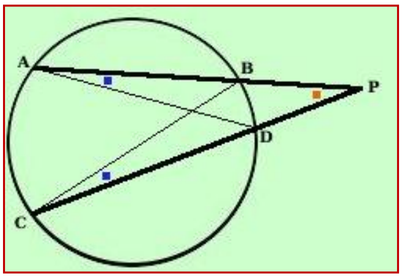
---

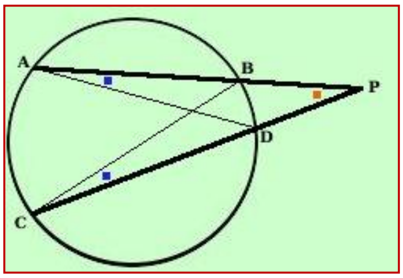
## d) Un'osservazione sui tre teoremi

I tre teoremi precedenti in pratica sono lo stesso teorema:

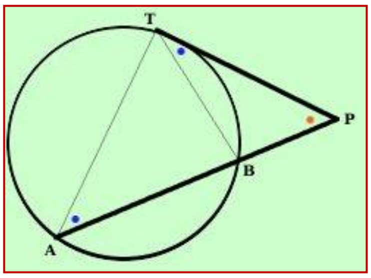



Infatti considera il teorema delle corde, e pensa alle corde come a degli elastici e immagina di tirare il punto P fuori della circonferenza finche' i segmenti non siano allineati: allora una figura si trasforma esattamente nell'altra.



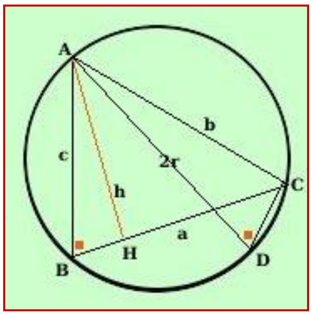

Ancora piu' semplice e' passare dal teorema delle secanti a quello della secante e della tangente: basta far scivolare una delle secanti finche' non diventa tangente.




## e) Raggio del cerchio e lati del triangolo inscritto

Teorema:
Il raggio del cerchio in cui e' inscritto un triangolo e' uguale al prodotto dei lati fratto 4 volte l'area del triangolo stesso.
Cioe' chiamate **a**, **b** e **c** le misure dei lati del triangolo e chiamata $\mathbf{A_s}$ la sua area vale la relazione:

$$r = \frac{a\,b\,c}{4A_s}$$




Poniamo:
$\overline{BC} = a$
$\overline{AC} = b$
$\overline{AB} = c$
*Dimostrazione:*
Considero l'altezza del triangolo **ABC** sul lato **BC** e la chiamo **h:**
$\overline{AH} = h$
Ora dal punto **A** traccio il diametro **AD** della circonferenza:
$\overline{AD} = 2r$
Congiungendo **D** con **C** ottengo il triangolo **ADC.**
Considero ora i triangoli **ABH** ed **ADC** essi hanno:
$A\hat{H}B = A\hat{C}D$ perche' retti;
$A\hat{B}C = A\hat{D}C$ perche' angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco **AC.**
Quindi i due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine e posso scrivere:
$AB : AD = AH : AC$

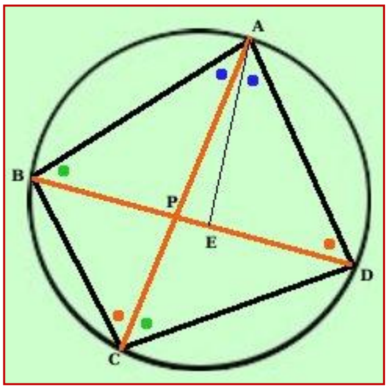
Utilizzando le misure:
**c : 2r = h : b**
**2rh = bc**
moltiplico entrambi i membri per **a:**
**2arh = abc**
Ma **ah/2** e' l'area $A_s$ del triangolo;
quindi **2ah** e' 4 volte l'area $4A_s$
$r \cdot 4A_s = abc$

Ricavo **r:**

$$r = \frac{abc}{4\,A_s}$$

Come volevamo.

## f) Teorema di Tolomeo




Teorema:
Per ogni quadrilatero inscritto in una circonferenza la somma dei prodotti delle misure dei lati opposti e' uguale al prodotto della misura delle due diagonali.

Piu' difficile da dire che da applicare: vale a dire che per le misure dei segmenti vale:
**AB · CD + BC · AD = AC · BD**
*Dimostrazione:*
Dal lato **AD** del quadrilatero riporto il segmento **AE** in modo che l'angolo **EAD** sia congruente all'angolo **BAC.**
Considero i due triangoli **BAC** e **AED**, essi hanno:
$B\hat{C}A = E\hat{D}A$
perche' angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco **BC** (se prolungo **ED** ....)
$B\hat{A}C = E\hat{A}D$
per costruzione.
Quindi i due triangoli **BAC** ed **AED** sono simili per il primo criterio di similitudine e posso scrivere:

---

Te li ordino secondo gli angoli per scrivere meglio la proporzione:

| | | |
|---|---|---|
| A | C | B |
| A | D | E |

---

**AC : AD = BC : DE**
ed applicando la proprieta' fondamentale:
**BC · AD = AC · DE**

Considero ora i triangoli **ACD** ed **AEB**, essi hanno: $D\hat{A}C = E\hat{A}B$
perche' somma di angoli congruenti (DAE=PAB) con lo stesso angolo **EAP**

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$
perche' angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco **AD**
Quindi i due triangoli **ACD** ed **ABE** sono simili per il primo criterio di similitudine e posso scrivere:

---

Te li ordino secondo gli angoli per scrivere meglio la proporzione:

| | | |
|---|---|---|
| A | C | D |
| A | B | E |

---

$AC : AB = CD : BE$
ed applicando la proprieta' fondamentale:
$AB \cdot CD = AC \cdot BE$

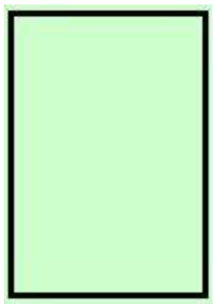
---

Ora riprendo entrambe i prodotti finali:
$AB \cdot CD = AC \cdot BE$
$BC \cdot AD = AC \cdot DE$
Sommo termine a termine:
$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BE + AC \cdot DE$
Raccolgo a fattor comune **AC:**
$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot (BE + DE)$
ed essendo $BE + DE = BD$ avro':
$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$
Come volevamo.

---

# R. *Sezione aurea di un segmento*

## 1. Introduzione



La sezione aurea, inizialmente studiata dai greci, (la costruzione che faremo e' attribuita ad Erone), fu reintrodotta in Europa durante le crociate; fu poi studiata da Piero Della Francesca (De corporibus regolaris) e divulgata soprattutto ad opera di Luca Pacioli (Divina proporzione, opera a tutti gli ingegni perspicaci curiosa e necessaria) e, nel Rinascimento, fu studiata e cercata in natura soprattutto come rettangolo aureo (rettangolo formato da un segmento e dalla sua sezione aurea).
Tale rettangolo, di cui vedi un esempio qui a fianco, fu trovato nello sviluppo delle conchiglie, nelle proporzioni del viso e del corpo umano, eccetera....
Veniva utilizzato quasi universalmente nelle opere di pittura ed architettura.

---

Va detto che la ricerca delle applicazioni della sezione aurea fu condotta anche in modo esagerato: pensate che si cerco' di trovare addirittura una corrispondenza fra i tre segmenti della proporzione e la Divina Trinita'.

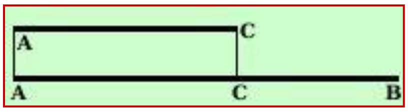
---

Attualmente l'interesse per questo argomento si e' molto ridimensionato, mentre ancora 50 anni fa era uno degli argomenti centrali della geometria.
Oggi resta ancora importante per gli Istituti d'Arte e per tutte le scuole che si occupino di

pittura, scultura ed architettura.

## 2. Definizione

Si definisce ***sezione aurea*** di un segmento **AB** la parte di segmento che e' media proporzionale fra tutto il segmento e la parte che resta:



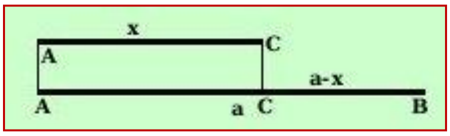

**AB : AC = AC : CB**

Cioe' devi dividere il segmento con un punto **C** tale che il segmento **AC** stia in mezzo nella proporzione tra tutto il segmento ed il pezzetto **CB** che resta.

## 3. Risoluzione algebrica

E' possibile risolvere il problema della sezione aurea in modo algebrico: lo faremo in questa pagina.

Chiamiamo **a** la lunghezza del segmento e chiamiamo **x** la misura della sezione aurea del segmento. Avremo:




$\overline{AB} = a$

$\overline{AC} = x$

$\overline{BC} = a - x$

Quindi la proporzione:

**AB : AC = AC : CB**

diventa:

$a : x = x : (a-x)$

Sviluppo la proporzione con la proprieta' fondamentale:

$x^2 = a \cdot (a-x)$

$x^2 = a^2 - ax$

$x^2 + ax - a^2 = 0$

E' un'equazione di secondo grado: la risolvo ed ottengo

$$x_1 = \frac{a\left(+\sqrt{5}-1\right)}{2} \qquad x_2 = \frac{a\left(-\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

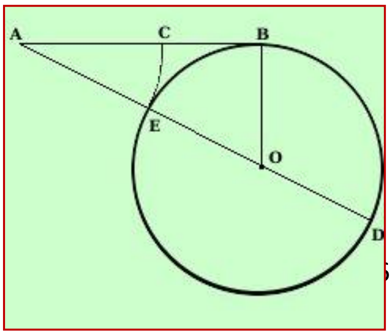
Trattandosi di un problema geometrico la soluzione $x_2$ e' da scartare perche' non abbiamo segmenti negativi (nella geometria euclidea), quindi:

$$\overline{AC} = x = \frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

e radice di 5 e' un numero decimale illimitato non periodico (reale non razionale).

## 4. Costruzione geometrica

Considero un segmento **AB** e dal punto **B** ne traccio la perpendicolare e considero il segmento **BO** congruente alla meta' di **AB**.




Dal punto **O** traccio la circonferenza di centro **O** e raggio **BO** (meta' di **AB**).

Poi traccio la congiungente il punto **A** col punto **O** che incontra la circonferenza in **E** e **D.**

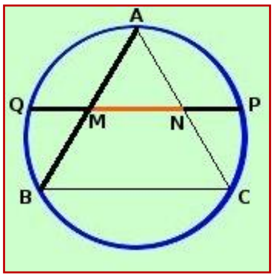
A partire da **A** riporto il segmento **AE** su **AB**: ottengo il segmento **AC**.
**AC** e' la sezione aurea del segmento **AB.**
Per dimostrarlo dobbiamo dimostrare che vale:
**AB : AC = AC : CB**
Per il teorema della secante e della tangente si ha:
**AD : AB = AB : AE**
Essendo **AE=AC,** posso scrivere:
**AD : AB = AB : AC**
Per la proprieta' dello scomporre delle proporzioni posso scrivere:
**(AD-AB) : AB = (AB-AC) : AC**
Ma **AB = 2r = DE** e vale anche **AD - DE = AE = AC**; inoltre **AB-AC = CB**; quindi:
**AC : AB = CB : AC**
Applico la proprieta' dell'invertire ed ottengo:
**AB : AC = AC : CB**
Come volevamo.

---

Molto piu' semplice e' risolvere il problema inverso: data la sezione aurea trovare il segmento che la genera: lo facciamo nella prossima pagina.

---

### a) Data la sezione aurea trovare il segmento




Per risolvere il problema basta considerare la figura costituita da un triangolo equilatero inscritto in un cerchio: consideriamo poi **MN** la congiungente i punti medi di due lati che sara' anche meta' del terzo lato.
Se la sezione aurea e' meta' del lato del triangolo equilatero allora prolungando la congiungente i punti medi sino ad incontrare la circonferenza avro' che il segmento di partenza sara' **MP** mentre la parte quarta proporzionale sara' **QM.**
Infatti per il teorema delle corde applicato alle corde **AB** e **PQ** posso scrivere:
**MP : AM = MB : QM**
Ma essendo **AM = MB = MN**
**MP : MN = MN : QM**
o meglio, essendo **QM = NP**
**MP : MN = MN : NP**
Come volevamo.

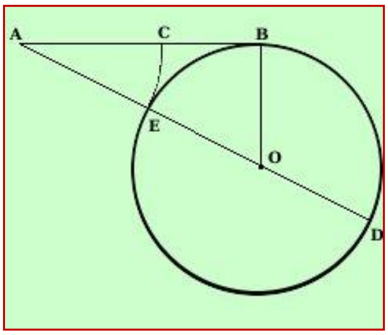
---

## 5. Calcolo geometrico della sezione aurea

---

Vediamo ora di calcolare in modo geometrico la sezione aurea del segmento **AB**
Ci si potrebbe chiedere perche' calcolare il valore della sezione aurea in modo geometrico quando l'abbiamo trovata tanto facilmente in modo algebrico: intanto il metodo algebrico e' storicamente molto successivo rispetto al metodo geometrico; inoltre in matematica noi non studiamo tanto il valore delle cose quanto il ragionamento (modello matematico) con cui tali valori vengono trovati, quindi e' importante sempre vedere i vari possibili tipi di ragionamento anche se poi ci porteranno evidentemente allo stesso risultato.
La stessa cosa succede nel compito in classe: piu' che trovare il risultato devi mostrare di essere padrone del tipo di ragionamento adatto a trovarlo.

---




Considero il triangolo rettangolo **ABO.**
Presa come riferimento il raggio **r,** ho:
$\overline{BO} = r$
$\overline{AB} = 2r$
Applico il teorema di Pitagora al triangolo **ABO** per determinare **AO:**
$\overline{AO} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BO}^2} = \sqrt{4r^2 + r^2} = r\sqrt{5}$
Ora so che **AC = AE = AO - EO**, e la misura di **EO** e' sempre **r**, quindi:
$\overline{AC} = r\sqrt{5} - r = r(\sqrt{5} - 1)$
Quindi, se $\overline{AB} = 2r = a$, sostituendo ad **r** il valore **a/2** avremo:
$$\overline{AC} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$$
In accordo con quanto gia' trovato.

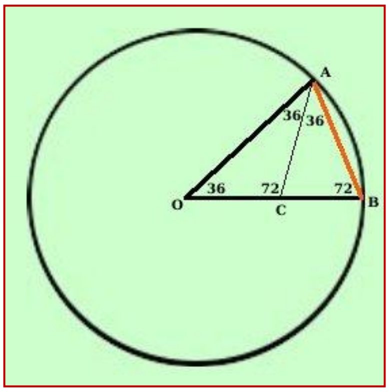
---

## 6. Applicazioni

Vediamo ora alcune applicazioni della sezione aurea.

### a) Lato del decagono regolare

Mostriamo ora che il lato del decagono regolare e' la sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto.




Il lato del decagono regolare **AB** e' la corda dell'arco di fronte all'angolo di 36°.
Considero il triangolo **OAB**. Esso e' isoscele avendo per lati 2 raggi, quindi gli angoli uguali valgono 72°.
Traccio la bisettrice **AC** dell'angolo **OAB** e considero il triangolo **ABC**; esso ha gli angoli:
$B\hat{A}C = 36°$ perche' meta' di **OBC**
$A\hat{B}O = 72°$
$A\hat{C}B = 72°$ perche' **180-72-36=72**
Quindi anche il triangolo **ABC** e' isoscele.
Considero ora i triangoli **OAB** ed **ABC** essi, avendo gli angoli congruenti, sono simili e posso scrivere.

---

Te li ordino secondo gli angoli per scrivere meglio la proporzione:

| | | |
|---|---|---|
| O | A | B |
| A | B | C |

---

$OA : AB = AB : BC$
ma so che **AB = AB = OC** ed anche **OA = OB**
quindi:
$OB : OC = OC : BC$

cioe' **AB = OC** e' la sezione aurea del raggio.
Come volevamo.

---

Quindi il valore del lato **AB** del decagono regolare prendendo come unita' di misura il raggio **r** e':

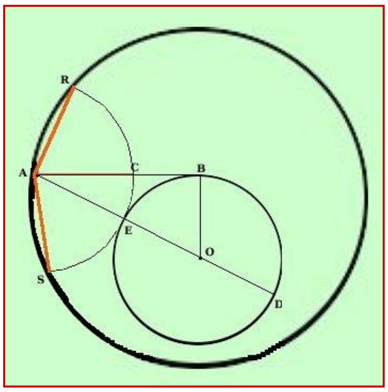
$$\overline{AB} = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

E' possibile calcolare anche l'apotema del decagono regolare.

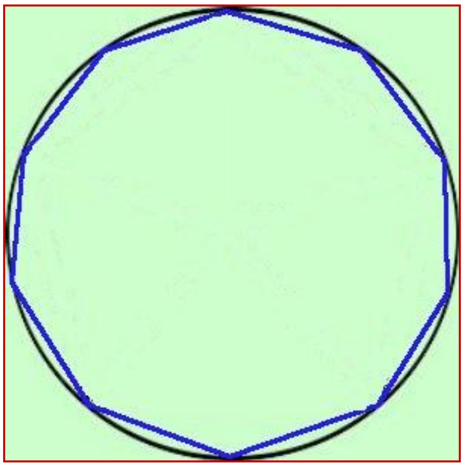
---

## b) Costruzione del decagono regolare

Quindi, per costruire il decagono regolare sara' sufficiente calcolare la sezione aurea del raggio, poi, partendo da un punto qualunque della circonferenza, riportare (ad esempio con un compasso) tale segmento per 10 volte.
**AB** e' il raggio del cerchio, su di esso costruisco la sezione aurea che e' **AC** .

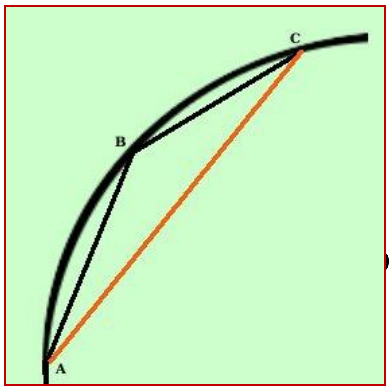



In figura ho costruito due lati **AR** ed **AS** del decagono riportando dal punto **A** la lunghezza della sezione aurea.



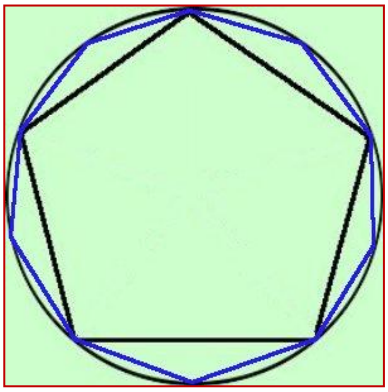
---

## c) Costruzione del pentagono regolare



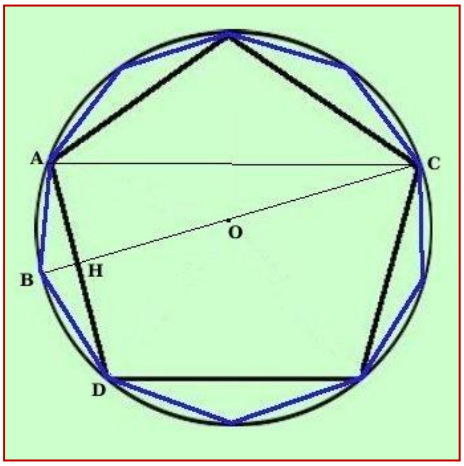

E' ora possibile costruire il pentagono regolare.
E' sufficiente congiungere due a due i vertici del decagono

regolare. Se **AB** e **BC** sono i lati di un decagono regolare allora la corda **AC** e' il lato del pentagono regolare.



---

## d) Lato del pentagono regolare




Calcoliamo ora la misura del lato del pentagono regolare.
Considero il triangolo rettangolo **ABC** (rettangolo perche' inscritto in una semicirconferenza).
**AH** e' l'altezza relativa all'ipotenusa di tale triangolo
So che vale:

$$\overline{AB} = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

$$BC = 2r$$

Applico il primo teorema di Euclide al triangolo **ABC:**

$$BH : AB = AB : BC$$

$$BH = \frac{AB^2}{BC}$$

$$\overline{BH} = \frac{r^2(\sqrt{5} - 1)^2}{4} \cdot \frac{1}{2r}$$

Moltiplico i denominatori e sviluppo il quadrato:

$$\overline{BH} = \frac{r^2(5 + 1 - 2\sqrt{5})}{8r}$$

$$\overline{BH} = \frac{r(6 - 2\sqrt{5})}{8}$$

Evidenzio il 2 al numeratore per semplificarlo con il denominatore:

$$\overline{BH} = \frac{2r(3 - \sqrt{5})}{8}$$

$$\overline{BH} = \frac{r(3 - \sqrt{5})}{4}$$

Ora per trovare il valore di **AH** applico il teorema di Pitagora al triangolo **ABH:**

$$AH^2 + BH^2 = AB''$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$\overline{BH} = \sqrt{\frac{r^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} - \frac{r^2(3-\sqrt{5})^2}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4r^2(\sqrt{5}-1)^2 - r^2(3-\sqrt{5})^2}{16}} =$$

Sviluppo i quadrati:

$$= \sqrt{\frac{4r^2(5 + 1 - 2\sqrt{5}) - r^2(9 + 5 - 6\sqrt{5})}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4r^2(6 - 2\sqrt{5}) - r^2(14 - 6\sqrt{5})}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{24r^2 - 8r^2\sqrt{5} - 14r^2 + 6r^2\sqrt{5}}{16}} =$$

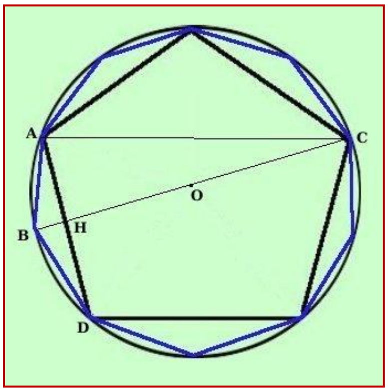
$$= \sqrt{\frac{10r^2 - 2r^2\sqrt{5}}{16}} =$$

Estraggo di radice $r^2/16$:

$$\overline{AH} = \frac{r}{4}\sqrt{(r^2 - 2\sqrt{5})}$$

Ora moltiplico per 2 e trovo il valore del lato **AD** del pentagono regolare inscritto:

$$\overline{AD} = \frac{r}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} =$$



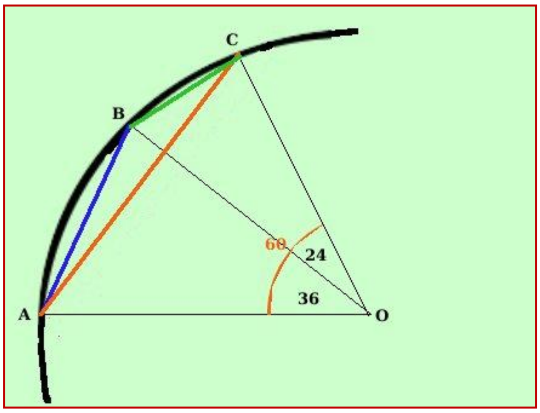

E' possibile calcolare anche l'apotema del pentagono regolare. Ecco come si fa:

Per trovare il valore dell'apotema **HO** bastera' fare **BO – BH:**

$$\overline{HO} = r - \frac{r(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{4r - r(3-\sqrt{5})}{4} =$$

$$= \frac{4r - 3r + r\sqrt{5}}{4} = \frac{r + r\sqrt{5}}{4} = a_{15} = \frac{r(1+\sqrt{5})}{4}$$

## e) Lato del pentadecagono regolare




Calcoliamo ora la misura del lato del poligono regolare di 15 lati (pentadecagono regolare).

Sia **AB** il lato del decagono regolare e sia **AC** il lato dell'esagono regolare:

L'angolo al centro sotteso dall'arco **AB** vale 36°
360° : 10 = 36°.

L'angolo al centro sotteso dall'arco **AC** vale 60°
360° : 6 = 60°.

Allora l'angolo al centro sotteso dall'arco **BC** vale 24°:
60° - 36° = 24°
e siccome **24 · 15 = 360** , ne segue che la corda **BC** e' la misura del lato del poligono regolare inscritto di 15 lati.

---

Nota per chi studia anche fisica: qui abbiamo una buona applicazione della regola di sottrazione vettoriale: infatti **CB** e' la differenza fra i vettori **AC** ed **AB.**

---

## f) Cenni sul problema della ciclotomia

---

Certo che e' una parolona difficile! Ma vuol semplicemente dire divisione della circonferenza (dal greco ciclos cerchio e tome' tagliare).

---

Il problema di come fare a suddividere la circonferenza in archi uguali equivale alla costruzione dei poligoni regolari inscritti.

Intanto intuitivamente possiamo dire che se abbiamo un poligono inscritto possiamo sempre costruire il poligono con un numero doppio di lati semplicemente dividendo a meta' l'arco di cui il lato e' una corda.
Quindi sapendo costruire il quadrato inscritto possiamo costruire l'ottagono regolare inscritto, il poligono con 16 lati, il poligono con 32 lati,...
Sapendo costruire l'esagono regolare (fare link al capitolo costruzioni con riga e compasso) possiamo costruire il dodecagono regolare, il poligono con 24 lati.....

Invece ad esempio il poligono con 7 lati (ettagono regolare) non e' costruibile esattamente solo con riga e compasso.

Comunque, agli inizi del 1800 il matematico Gauss ha dato una formula che permette di sapere quali sono i poligoni regolari inscritti che possono essere costruiti in modo esatto con riga e compasso:

**Un poligono regolare di n lati (con n diverso da 2) e' costruibile con riga e compasso se e solo se il numero n e' dato dalla formula:**
**$n = 2^m(2^a+1)\cdot(2^b+1)\cdot(2^c+1)\cdot \ldots\ldots\cdot(2^p+1)$**
**dove $m \geq 0$**
**e dove i numeri $2^h+1$ sono numeri primi diversi fra loro**

Un numero del tipo $\mathbf{2^a+1}$ e' primo solamente se **a** e' una potenza del 2 cioe' se e' del tipo $\mathbf{2^{2k}+1}$, quindi, teoricamente, costruibili con riga e compasso sono i poligoni regolari di lati 3, 5, 17, 257,... ed i loro multipli.
(ma non ho visto mai nessuno, su un foglio, superare i 20 lati)

---

Ho scritto "n numero diverso da 2" perche' possiamo pensare come poligono regolare di 2 lati una coppia di diametri coincidenti che, suddividendo gli archi a meta', daranno luogo ai poligoni di 4,8,16,32,64,... lati.

---