Successioni e serie

A. *Generalita' sulle successioni*

1. Introduzione

In questa sezione ci occupiamo di successioni, che in matematica trovano molte applicazioni : addirittura e' possibile riscrivere tutta l'analisi matematica prendendo come base la nozione di limite di una successione, d'altra parte anche l'insieme **N** dei numeri naturali puo' essere pensato come una successione.

Da qui l'importanza dell'argomento che, secondo me, merita un capitolo a parte.

2. Definizione

Definiamo Successione un insieme di numeri ordinato e numerabile

- Un insieme e' ordinato quando presi due elementi **a** e **b** e' sempre possibile dire se **a** precede o segue **b**
- Un insieme e' numerabile se e' possibile stabilire una corrispondenza biunivoca degli elementi dell'insieme con l'insieme ***N*** dei numeri naturali

Possiamo anche considerare, oltre i numeri, anche grandezze matematiche o fisiche della stessa specie, ma qui limitiamoci solamente a numeri.
I valori dei termini della successione possono essere interi, razionali, reali, complessi; l'importante e' che per ogni numero dato sappiamo scrivere quello che viene dopo; per scrivere quello che viene dopo devo capire qual'e' la legge che mi da'i termini della successione.

Esempio 1
Questa e' una successione perche' per ogni numero posso scriverne il successivo:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

e viene detta successione dei numeri naturali **N.**

Esempio 2
Anche qui per ogni numero posso scriverne il successivo:

1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

e' una cosiddetta successione geometrica (ci torneremo poi); si puo' anche scrivere:

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots\ldots$

Esempio 3
Anche qui per ogni numero posso scriverne il successivo:

2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

e' la successione dei numeri pari.

Esempio 4
Non sempre e' possibile trovare una regola matematica che ci permetta di scrivere immediatamente i termini di una successione .
Anche questa e' una successione, ma non e' immediato capire come scrivere i termini:

1, 8, 7, 5, 4, 15, ...

Lo puoi capire se scrivi i numeri in lettere:

uno, otto, sette, cinque, quattro, quindici, ...

Se conti le lettere che formano i numeri, vedi che sono:

3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

Quindi la successione e' formata dai numeri naturali (piu' piccoli) che hanno il numero di lettere del loro nome uguali a 3,4,5,6,7,8,..

Quando ho individuato la legge della successione ho individuato i termini della successione stessa: il prossimo termine sara' **29** perche' **ventinove** e' il numero naturale piu' basso il cui nome e' formato da 9 lettere.
Non possiamo esprimere la legge che genera questa successione in termini matematici; lasciando ai giornali di enigmistica successioni di questo tipo, noi ci occuperemo solamente di successioni la cui legge sia esprimibile mediante una formula matematica.

Come definizione quella sopra non e' molto "matematica"; puo' andare bene per un biennio, ma per le classi superiori ci vuole qualcosa di piu' efficace.
Possiamo utilizzare il concetto di funzione dicendo:

> Definiamo successione in un insieme **K** qualunque applicazione (o funzione) da **N** a **K** tale che ad ogni valore **1,2,...n, ∈ N** faccia corrispondere un valore in **K** in modo che, individuato il valore corrispondente al termine **n**, si sappia sempre individuare quale valore corrisponde al termine **n+1**

Insomma definiamo la successione mediante la regola di induzione.

Per le successioni che studieremo **K** puo' essere **N**, **R**, o qualunque altro insieme numerico; naturalmente dovremo sempre dire di quale insieme si tratta: quindi diremo successione in **N**, successione in **R**, ...

3. Nomenclatura

Per ogni successione:
il valore corrispondente ad 1 lo chiameremo ***primo termine*** e lo indicheremo con a_1
il valore corrispondente a 2 lo chiameremo ***secondo termine*** e lo indicheremo con a_2
il valore corrispondente a 3 lo chiameremo ***terzo termine*** e lo indicheremo con a_3
....
il valore corrispondente ad n lo chiameremo ***ennesimo termine (n-mo termine)*** e lo indicheremo con a_n
il valore corrispondente ad n+1 lo chiameremo ***n piu' unesimo termine (n+1-mo termine)*** e lo indicheremo con a_{n+1}
....

Indicheremo una successione generica con i simboli:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\, a_n, \ldots\ldots$$

Una successione potra' essere definita enumerando i primi termini, oppure mediante la legge che la genera, oppure od anche con la scrittura del termine generico

---

Vediamo un esempio.
Consideriamo la successione di potenze del 2:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

Sarebbe anche a dire:

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \ldots$$

Posso anche definirla come:

La successione di potenze a base 2 con esponente un numero naturale.
Posso comunque definirla semplicemente indicando il termine generico:

$$a_n = 2^n$$

Noi, di solito, indicheremo una successione, tipo quella dell'esempio, come segue, cercando sempre di evidenziare i numeri naturali collegati alla successione stessa:

$$2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n, 2^{n+1}, \ldots$$

Di solito nei testi viene indicato solamente il termine generico ennesimo cioe' 2^n, senza indicare il termine 2^{n+1}.
Io preferisco indicare anche questo ultimo termine per due ragioni:

- Ritengo che cosi' la legge che genera la successione sia piu' chiara.
- Inoltre, in questo modo, ricalco la legge di induzione matematica (anche se qui, magari, non c'entra molto): se una proprieta' e' vera per il primo termine ed essendo valida per l'ennesimo termine e' valida anche per il termine n+1, allora essa e' valida per tutti i termini.

Anticipo ora, in modo intuitivo, il concetto di convergenza di una successione; concetto che approfondiremo successivamente:

- Diro' che una successione e' convergente se i suoi termini si avvicinano indefinitamente ad un numero preciso (intuitivamente: se la differenza fra due termini successivi all'aumentare dei termini si riduce avvicinandosi a zero)
  Esempio
  La successione:
  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots \ldots \ldots$
  al crescere del valore di **n** siavvicina a **0.**
  La successione:
  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}, \ldots \ldots \ldots$
  si avvicina ad 1 (e due termini successivi molto "avanti" nella successione hanno differenza vicina a **0**; ad esempio: **1000/1001 - 999/1000 = 0,000000999** hanno differenza meno di un milionesimo).
- Diro' che una successione e' *divergente* se i suoi termini crescono oltre ogni limite.
  Esempio:
  La successione:
  1, 2, 3, 4, ... n, n+1, ...
  tende a **∞**
- Diro' che una successione e' *indeterminata* se i suoi termini oscillano senza avvicinarsi a niente.
  Esempio:
  La successione:
  $+1, -1, +1, -1, \ldots (-1)^n, (-1)^{n+1}, \ldots\ldots$
  non tende a nessun numero e continua ad oscillare all'infinito.

4. Particolari tipi di successioni

In queste pagine consideriamo alcuni esempi di successioni piu' comuni e semplici, piu' a livello di semplice curiosita' che di studio.

Per avere una successione dobbiamo eseguire una o piu' operazioni in modo da sapere sempre quale termine scrivere dopo il termine considerato; cerchiamo di presentarle secondo l'operazione che le genera.

Premetto che la classificazione non e' una cosa che sia "ufficiale" ma e' solo una speculazione mia, nel senso che spesso (essendo un prodotto un insieme di somme ed una potenza un insieme di prodotti) una successione potra' essere generata da operazioni diverse e quindi la classificazione successiva e' del tutto personale ed arbitraria: consideratela una specie di gioco senza darvi troppa importanza.

- somme e differenze
- prodotto per -1
- prodotti con fattori a segno alterno
- prodotti
- quozienti
- elevamenti a potenza
- alcune successioni particolari

Partiremo dalla successione dei numeri Naturali.
E' la successione per eccellenza: dominio di tutte le possibili successioni; si puo' anche considerare come successione identica **i** che applica **N** su se' stesso **i:N→N**

1, 2, 3, ... , n, n+1, ...

Di solito si considera 1 come valore iniziale; in qualche testo si preferisce farla iniziare da 0:

0, 1, 2, ..., n, n+1, ...

La successione e' divergente, nel senso che il valore di suoi termini cresce tendendo ad ∞.

a) Successioni generate da somme

(1) Somma della successione naturale con una costante

Partendo dalla successione dei numeri naturali:

1, 2, 3, ... , n, n+1, ...

possiamo considerare tutte le successioni che si ottengono sommando un numero intero positivo ad ogni termine, ad esempio, sommando 5:

1+5, 2+5, 3+5, ... , n+5, n+5+1, ...

o meglio:

6, 7, 8, ..., 5+n, 5+n+1, ...

oppure posso sommare un numero negativo, ad esempio -8:

-8+1, -8+2, -8+3, ... ,-8+n, -8+n+1, ...

o meglio:

-7, -6, -5, ..., -8+n, -8+n+1, ...

Naturalmente quelle che iniziano da un numero negativo sono successioni in **Z** (cioe', considerate come funzioni hanno codominio l'insieme dei numeri interi **Z**).
Anche queste, come la successione di partenza, sono tutte successioni divergenti (tendono ad ∞).

(2) Successione dei numeri pari

Partendo dalla successione dei numeri naturali:

1, 2, 3, ... , n, n+1, ...

posso considerare di sommare ogni termine con se' stesso:

1+1, 2+2, 3+3, ... , n+n, (n+1)+(n+1), ...

Otteniamo la successione dei numeri pari.

La successione dei numeri pari applica **N** su una parte di se' stesso **s:N→N+N** o meglio **s:N→2N**(essendo **2N** il sottoinsieme di **N** formato dai numeri pari), facendo corrispondere ad ogni numero il suo doppio; siccome la corrispondenza e' biunivoca tale successione mostra che l'insieme **N** e' un insieme infinito (un insieme infinito e' un insieme che e' in corrispondenza biunivoca con una sua parte: in **N** ad ogni numero corrisponde il suo doppio e ad ogni numero doppio [se e' doppio e' anche pari] corrisponde la sua meta').

Potremmo indicare la successione con:

2, 4, 6, ... , n+n, (n+1)+(n+1), ...

ma e' preferibile indicarla con:

2, 4, 6, ... , 2n, 2n+2, ...

Possiamo anche farla iniziare da zero senza variare i termini dopo i puntini; tanto i puntini sono elastici e possono indicare indifferentemente quanti termini servono:

0, 2, 4, ..., 2n, 2n+2, ...

od anche da un qualunque numero pari positivo:

6, 8, 10, ..., 6+2n, 6+2n+2, ...

Anche negativo, ma in tal caso l'applicazione e' **s:N→Z**

-8, -6, -4, ..., -8+2n, -8+2n+2, ...

Queste successioni sono tutte divergenti.

(3) Succesione dei numeri dispari

Importante!

Per scrivere correttamente un numero dispari generico conviene prima scrivere un numero pari **2n** e poi aumentarlo di 1 scrivendo **2n+1** (cioe' usiamo il fatto che il successivo di qualunque numero pari e' dispari).

Partiamo dalla successione dei numeri pari (quella che inizia da **0**) e, ad ogni termine, sommiamo +1:

0+1, 2+1, 4+1, ..., 2n+1, 2n+2+1, ...

Otteniamo la successione dei numeri dispari.

La successione dei numeri dispari applica **N** su una parte di se' stesso **s:N→N+N+1**, o meglio **s:N→2N+1** facendo corrispondere ad ogni numero il suo doppio aumentato di uno.

Indichiamo la successione con:

1, 3, 5, ... , 2n+1, 2(n+1)+1, ...

Da notare che la successione dei numeri dispari e' complementare, rispetto ad **N** della successione dei numeri pari, nel senso che unendo la successione dei numeri pari con la successione dei numeri dispari otteniamo tutto **N**.

Possiamo anche farla iniziare da un qualunque numero dispari positivo.

5, 7, 9, ..., 5+2n , 5+2n+2, ...

Anche qui i puntini sono elastici e possono indicare indifferentemente quanti termini servono; inoltre, essendo 5 dispari posso togliere il +1 dopo il 2n (la somma di un numero dispari e di uno pari e' dispari).

Puo' anche iniziare da un numero dispari intero negativo, ma in tal caso l'applicazione e' **s:N→Z** :

-7, -5, -3, ..., -7+2n , -7+2n+2, ...

Queste successioni sono tutte divergenti.

(4) Successione di Fibonacci

Qualcuno la chiama serie di Fibonacci, perche' c'e' da fare la somma fra due termini; pero' io preferisco pensarla come successione considerando le serie come somme di tutti i termini precedenti.

E' una successione da **N** in **N** che fa corrispondere ad ogni termine la somma dei due termini precedenti.

Indichiamo la successione con:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...

Ecco come fare i calcoli per trovare i termini:

Vediamo come scrivere i termini della successione:

- Primo termine $\mathbf{a_1 = 1}$ questo lo definiamo noi
- Secondo termine $\mathbf{a_2 = 1+0 = 1}$ siccome esiste solo il primo termine per trovare il secondo lo sommiamo a **0**
- Terzo termine $\mathbf{a_3 = a_1 + a_2 = 1+1 = 2}$ sommo il primo termine con il secondo
- Quarto termine $\mathbf{a_4 = a_2 + a_4 = 1+2 = 3}$ sommo il secondo termine con il terzo
- Quinto termine $\mathbf{a_4 = a_3 + a_3 = 2+3 = 5}$ sommo il terzo termine con il quarto
- Sesto termine $\mathbf{a_6 = a_4 + a_5 = 3+5 = 8}$ sommo il quarto termine con il quinto
- Settimo termine $\mathbf{a_7 = a_5 + a_6 = 5+8 = 13}$ sommo il quinto termine con il sesto
- Ottavo termine $\mathbf{a_8 = a_6 + a_7 = 8+13 = 21}$ sommo il sesto termine con il settimo
- Nono termine $\mathbf{a_9 = a_7 + a_8 = 13+21 = 34}$ sommo il settimo termine con l'ottavo
- Decimo termine $\mathbf{a_{10} = a_8 + a_9 = 21+34 = 55}$ sommo l'ottavo termine con il nono
- ....
- ....
- ....

Un po' difficile indicare il termine generico; possiamo comunque rimediare dicendo:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

(ogni termine e' la somma dei due termini precedenti).

E' una successione con molte applicazioni interessanti; ad esempio puo' indicare come si evolve la popolazione formata da una coppia di conigli lasciati liberi di riprodursi quando le risorse sono infinite.

2 conigli fanno in media 3 figli e diventano 5 conigli
5 conigli fanno in media 8 figli e diventano 13 conigli
13 conigli fanno in media 21 figli e diventano 34 conigli
eccetera eccetera ....

Anche la successione di Fibonacci e' divergente e tende all'infinito in modo "piuttosto rapido".
Vedremo poi di specificare meglio il concetto.

b) Successioni generate da prodotto per -1

In genere saranno le stesse successioni (a parte Fibonacci); bastera' considerare i prodotti per -1, cioe' i numeri interi negativi. E' raro considerarle, ma qualche volta servono:

- successione dei numeri interi negativi
- successione dei numeri pari negativi
- successione dei numeri dispari negativi

(1) Successione dei numeri interi negativi

Moltiplicando per **-1** ogni termine della successione naturale:

0, 1, 2, 3, ... n, n+1,....

Otteniamo la successione naturale cambiata di segno che applica **N** in un sottoinsieme di **Z**
a:N→Z :

0, -1, -2, -3, ... , -n, -n-1, ...

Qui di solito, essendo in **Z** si inizia da **0.**
Possiamo similmente considerare tutte le successioni che iniziano da un qualunque numero intero, sommandolo alla successione stessa ad esempio, iniziando da -6 :

-6+0, -6-1, -6-2, -6-3, ... , -6-n, -6-n-1, ...

meglio scrivere:

-6, -7, -8, ..., -6-n, -6-n-1, ...

oppure +4 :

+4+0, +4-1, +4-2, +4-3, +4-4, +4-5, +4-6, ... , +4-n, +4-n-1, ...

meglio scrivere:

+4, +3, +2, +1, 0, -1, -2,.., +4-n, +4-n-1, ...

Queste successioni sono tutte divergenti.

(2) Successione dei numeri pari negativi

Possiamo moltiplicare per **-1**ogni termine della successione dei numeri pari:

2, 4, 6, 8, ..., n, n+1, ...

Siccome siamo in **Z** (per poter moltiplicare per -1) cominciamo da **0**, considerando:

0, 2, 4, 6, 8, ..., n, n+1, ...

ed otteniamo la successione:

0·(-1), 2·(-1), 4·(-1), 6·(-1), ... , 2n·(-1), (2n+2)·(-1), ...

o meglio, piu' semplicemente:

0, -2, -4, -6, ... , -2n, -2n-2, ...

Possiamo anche farla iniziare da un qualunque numero pari negativo semplicemente sommandolo alla successione data, ad esempio se sommo -6 :

0-6, -2-6, -4-6, -6-6, ... , -2n-6, -2n-2-6, ...

meglio scrivere:

-6, -8, -10, ..., -6-2n, -6-2n-2, ...

Possiamo iniziare anche da un numero positivo,ad esempio +8 :

+8+0, +8-2, +8-4, ... , +8-2n, +8-2n-2, ...

Scriviamola:

+8, +6, +4, ..., +8-2n, +8-2n-2, ...

Anche tutte queste successioni sono divergenti.

(3) Successione dei numeri dispari

Considero la successione dei numeri dispari:

1, 3, 5, 7, ..., 2n+1, 2n+2+1, ...

Moltiplico per **-1**ogni termine della successione:

1·(-1), 3·(-1), 5·(-1), 7·(-1), ..., (2n+1)·(-1), (2n+2+1)·(-1), ...

Otteniamo la successione dei numeri dispari che applica **N** su una parte di **Z**
s:N→Z facendo corrispondere ad ogni numero il suo doppio diminuito di uno.
Scriviamo meglio la successione come:

-1, -3, -5, ... , -2n-1, -2n-2-1, ...

Utilizzando la somma possiamo anche farla iniziare da un qualunque numero dispari positivo, ad esempio per farla iniziare da +5 sommo +6 ad ogni termine:

+6-1, +6-3, +6-5, +6-7, ... , +6-2n-1, +6-2n-2-1, ...

meglio scrivere:

5, 3, 1, -1,...., 5-2n , 5-2n-2, ...

I puntini sono elastici e possono indicare indifferentemente quanti termini servono.
Puo' anche iniziare da un numero intero negativo, ad esempio-5; bastera' sommare -4 ad

ogni termine:

-4-1, -4-3, -4-5, ... , -4-2n-1, -4-2n-2-1, ...
-5, -7, -9, ..-., -5-2n , -5-2n-2, ...

Anche qui abbiamo che tutte le successioni sono divergenti.

c) Successioni generate da prodotti con fattori a segno alterno

Qui, considerando alternativamente il prodotto per **+1** e per **-1** possiamo avere delle successioni "oscillanti": vediamo un esempio per ogni tipo: convergente, divergente ed indeterminata.
Il problema che si pone e' come far cambiare di segno un temine in modo alterno (cioe' prima positivo, poi negativo, poi ancora positivo, eccetera).
Per fare questo useremo la proprieta' che la potenza di un numero negativo risulta positiva quando la potenza e' pari mentre risulta negativa se la potenza e' dispari; quindi bastera' considerare come fattore moltiplicativo, per ogni termine :

$$(-1)^n$$

Infatti se **n** e' pari:

$$(-1)^n = +1$$

mentre se **n** e' dispari:

$$(-1)^n = -1$$

- successione oscillante convergente
- successione oscillante divergente
- successione oscillante indeterminata

(1) Successione oscillante convergente

Per fare questo caso consideriamo la successione armonica che definiremo pero' successivamente, quando faremo l'operazione di divisione:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\dots\dots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\dots\dots$$

> ***Termine variabile come divisore***
> Qui abbiamo una successione molto importante, che applica **N** in un sottoinsieme di **Z**
> **a:N→Z**
> $$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\dots\dots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\dots\dots$$
> e' detta successione armonica e converge verso il valore **0**

Per avere una successione oscillante convergente dovremo considerare una successione con i termini nell'insieme **Q** :

a:N→Q

$$+1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, \dots\dots\dots$$

Per indicare che il segno e' alternato nel termine generico introduciamo il fattore **(-1)^n**, quindi potremo indicare la successione:

$$+1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, \dots\dots\dots (-1)^n\frac{1}{n}, (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}, \dots\dots\dots$$

Questa successione converge verso **0.**

(2) Successione oscillante divergente

Per avere una successione oscillante divergente dovremo considerare una successione con i termini nell'insieme **Z**

$$a : N \rightarrow Z$$

$$+1, -2, +3, -4, +5, -6, \ldots\ldots\ldots$$

Per indicare che il segno e' alternato nel termine generico introduciamo il fattore $(-1)^n$, quindi potremo indicare la successione:

$$+1, -2, +3, -4, +5, -6, \ldots\ldots, (-1)^n\, n, (-1)^{n+1}\,(n+1), \ldots$$

Questa successione diverge verso **∞** (senza segno perche' salta continuamente dal positivo al negativo).

(3) Successione oscillante indeterminata

Molto interessante e' la successione in **Z** :

$$a : N \rightarrow Z$$

$$+1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots\ldots\ldots$$

Al solito, per indicare che il segno e' alternato nel termine generico introduciamo il fattore $(-1)^n$, quindi potremo indicare la successione:

$$+1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots\ldots, (-1)^n, (-1)^{n+1}, \ldots$$

Questa successione salta continuamente dal positivo al negativo (come se in una stanza una lampadina si accendesse su una parete ed un altra, alternativamente, sulla parete di fronte); quindi mantiene sempre la stessa distanza fra due termini successivi e non puo' ne' convergere ne' divergere: diremo che e' ***oscillante indeterminata.***

d) Successioni generate da prodotti

Vediamo altri tipi di prodotti che possono generare successioni.

- Prodotto per 0
- Prodotto per una costante diversa da 0

(1) Prodotto per 0 (successione nulla)

Moltiplicando qualunque successione per **0** avremo una successione nulla.
Per avere la successione nulla dovremo considerare una successione:

$$a : N \rightarrow \{0\}$$

$$0, 0, 0, 0, 0, \ldots\ldots, n\cdot 0, (n+1)\cdot 0, \ldots\ldots$$

Questa successione converge verso **0** .
Se consideriamo un numero qualunque (ad esempio 3), potremo avere infinite successioni costanti semplicemente sommando tale numero ad ogni termine della successione:

$$3, 3, 3, 3, 3, \ldots\ldots, (n\cdot 0)+3, [(n+1)\cdot 0]+3, \ldots\ldots$$

Possiamo considerare anche un numero negativo:

$$-7, -7, -7, -7, -7, \ldots\ldots, (n\cdot 0)+(-7), [(n+1)\cdot 0]+(-7), \ldots\ldots$$

(2) Prodotto per una costante diversa da zero

Moltiplicando qualunque successione per una costante, avremo sempre una successione dello stesso tipo di quella di partenza; nel senso che se la successione di partenza convege, diverge oppure e' oscillante allora anche la successione prodotto per una costante converge, diverge od e' oscillante.

Esempio 1
Considero la successione divergente dei numeri naturali:
1, 2, 3, 4, ... ,n, n+1, ...
moltiplicando per 5 :
5, 10, 15, 20, ... ,5·n, 5·(n+1), ...
e' una successione che diverge come la successione di partenza.

Esempio 2
Considero la successione convergente:
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\dots\dots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\dots\dots$$
moltiplicando per 5 :
$$5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \dots\dots\dots \frac{5}{n}, \frac{5}{n+1}, \dots\dots\dots$$
e' una successione che converge a 0 come la successione di partenza.

Esempio 3
Considero la successione oscillante indeterminata:
+1, -1, +1, -1, +1, -1, ..., $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$, ...
moltiplicando per 5 :
+5, -5, +5, -5, +5, -5, ..., $5\cdot(-1)^n$, $5\cdot(-1)^{n+1}$, ...

e) Successioni generate da quozienti

(1) Divisione per una costante

Dividendo qualunque successione per una costante, avremo sempre una successione dello stesso tipo di quella di partenza.
Nel senso che se la successione di partenza convege, diverge oppure e' oscillante allora anche la successione quoziente per una costante converge, diverge od e' oscillante.

Esempio 1
Considero la successione divergente dei numeri naturali:
1, 2, 3, 4, ... ,n, n+1, ...
dividendo per 6:
$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6} \dots\dots\dots \frac{n}{6}, \frac{n+1}{6}, \dots\dots\dots$$
o meglio, semplificando le frazioni,:
$$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \dots\dots\dots \frac{n}{6}, \frac{n+1}{6}, \dots\dots\dots$$
e' una successione che diverge come la successione di partenza.

Esempio 2
Considero la successione convergente:
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\dots\dots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\dots\dots$$
dividendo per 6:
$$\frac{1}{6}, \frac{1}{2\cdot 6}, \frac{1}{3\cdot 6}, \frac{1}{4\cdot 6}, \frac{1}{5\cdot 6} \dots\dots\dots \frac{1}{n\cdot 6}, \frac{1}{(n+1)\cdot 6}, \dots\dots\dots$$
o meglio:

$$\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{18},\frac{1}{24},\frac{1}{30}\dots\dots\dots\frac{1}{6n},\frac{1}{6(n+1)},\dots\dots\dots$$

e' una successione che converge a 0 come la successione di partenza.

Esempio 3

Considero la successione oscillante indeterminata:

$+1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots, (-1)^n, (-1)^{n+1}, \dots$

dividendo per 6:

$$\frac{+1}{6},\frac{-1}{6},\frac{+1}{6},\frac{-1}{6},\frac{+1}{6}\dots\dots\dots\frac{(-1)^n}{n\cdot 6},\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 6},\dots\dots\dots$$

Anche questa resta una successione oscillante indeterminata che salta continuamente dal valore -1/6 al valore +1/6.

(2) Termine variabile come divisore

Qui abbiamo una successione molto importante, che applica **N** in un sottoinsieme di **Z** :

$$a:N\rightarrow Z$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots\dots\dots\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\dots\dots\dots$$

e' detta ***successione armonica*** e converge verso il valore **0.**

(3) Rapporto fra due termini variabili

La situazione si fa piu' interessante quando abbiamo una frazione con termini variabili sia al numeratore che al denominatore; supponiamo prima che i due termini differiscano di 1. Queste successioni applicano **N** in un sottoinsieme di **Q.**

$a:N\rightarrow Q$

Supponiamo prima che il numeratore superi di 1 il denominatore:

$$\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\dots\dots\dots\frac{n+1}{n},\frac{(n+1)+1}{n+1},\dots\dots\dots$$

Questa e' una successione convergente i cui termini sono tutti superiori ad 1 e che tende al valore **1.**

Supponiamo ora che il denominatore superi di 1 il numeratore:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}\dots\dots\dots\frac{n}{n+1},\frac{n+1}{(n+1)+1},\dots\dots\dots$$

Questa e' una successione convergente i cui termini sono tutti inferiori ad 1 e che tende al valore **1.**

Se invece della costante 1 prendo qualunque costante diversa da zero, la successione che ottengo e' sempre dello stesso tipo: cioe' converge sempre al valore 1.

Se, ad esempio, considero come costante il valore 5 ottengo per la prima successione (il numeratore supera di 5 il denominatore):

$$\frac{5+1}{1},\frac{5+2}{2},\frac{5+3}{3},\frac{5+4}{4},\frac{5+5}{5},\dots\dots\dots\frac{n+5}{n},\frac{(n+5)+1}{n+1},\dots\dots\dots$$

o meglio:

$$6,\frac{7}{2},\frac{8}{3},\frac{9}{4},2,\dots\dots\dots\frac{n+5}{n},\frac{(n+5)+1}{n+1},\dots\dots\dots$$

Anche questa successione e' formata di tutti termini superiori ad 1 e tende al valore 1.

Per la seconda successione, considerando sempre 5 il valore della costante, avremo:

$$\frac{1}{5+1},\frac{2}{5+2},\frac{3}{5+3},\frac{4}{5+4},\frac{5}{5+5}\dots\dots\dots\frac{n}{n+5},\frac{n+1}{(n+1)+5},\dots\dots\dots$$

o meglio:

$$\frac{1}{6},\frac{2}{7},\frac{3}{8},\frac{4}{9},\frac{1}{2}\dots\dots\dots\dots\frac{n}{n+5},\frac{n+1}{(n+1)+5},\dots\dots\dots$$

E' formata di tutti termini inferiori ad 1 e tende anch'essa al valore 1.
Se invece la costante vale 0 allora otteniamo una successione con tutti termini uguali ad 1 (di un tipo gia' considerato: Prodotto per zero – successione nulla).

f) Successioni generate da potenze

(1) <u>Potenza con base variabile</u>

Considero la successione:

$$s: N \rightarrow N$$

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2, (n+1)^2, \dots$$

o meglio:

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, (n+1)^2, \dots$$

E' una successione divergente:
Come ho considerato la potenza 2 posso considerare qualunque numero naturale (diverso da zero, altrimenti otteniamo la successione costante **1, 1, 1, 1,...n^0, $(n+1)^0$, ...**).
Ad esempio, se considero 5 ottengo:

$$1^2, 2^5, 3^5, 4^5, \dots, n^5, (n+1)^5, \dots$$

o meglio

$$1, 32, 243, 1024, \dots, n^2, (n+1)^2, \dots$$

Prima di procedere conviene ripassare le potenze ad esponente frazionario, ricordando che l'esponente negativo porta la potenza al denominatore e l'esponente frazionario si puo' esprimere con un radicale avente indice il denominatore ed esponente il numeratore:

$$a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$$

Come ho considerato un numero naturale, posso considerare un numero intero negativo.
Ad esempio -2:

$$1^{-2}, 2^{-2}, 3^{-2}, 4^{-2}, \dots, n^{-2}, (n+1)^{-2}, \dots$$

o meglio:

$$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\dots\dots\dots\dots\frac{1}{n^2},\frac{1}{(n+1)^2},\dots\dots\dots$$

ma anche un numero frazionario positivo oppure negativo.
Positivo, esempio + ¾ :

$$1^{3/4}, 2^{3/4}, 3^{3/4}, 4^{3/4}, \dots, n^{3/4}, (n+1)^{3/4}, \dots$$

o meglio:

$$1,\sqrt[4]{2^3},\ \sqrt[4]{3^3},\ \sqrt[4]{4^3},\dots\dots\dots\sqrt[4]{n^3},\ \sqrt[4]{(n+1)^3},\dots\dots\dots$$

Negativo, esempio - ¾:

$$1^{-3/4}, 2^{-3/4}, 3^{-3/4}, 4^{-3/4}, \dots, n^{-3/4}, (n+1)^{-3/4}, \dots$$

o meglio:

$$1,\frac{1}{\sqrt[4]{8}},\frac{1}{\sqrt[4]{27}},\frac{1}{\sqrt[4]{64}},\dots\dots\dots\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}},\frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3}},\dots\dots\dots$$

od anche (in forma un poco piu' comprensibile):

$$1, \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{4^3}}, \dots\dots\dots \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3}}, \dots\dots\dots$$

C'e' da dire che, se l'esponente e' positivo allora la successione e' divergente, mentre se l'esponente e' negativo la successione e' convergente a zero.

(2) Esponente variabile con base positiva

Distinguiamo 3 casi:

1. base compresa fra 0 ed 1
2. base uguale ad 1
3. base maggiore di 1

1.

Base compresa fra 0 ed 1.
Consideriamo come esempio la base ½
Avremo:
$(½)^1, (½)^2, (½)^3, (½)^4, \dots\dots (½)^n, (½)^{(n+1)},$
o meglio:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots\dots\dots \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{(n+1)}}, \dots\dots\dots$$

Altro esempio: base ¾ . Avremo:
$(¾)^1, (¾)^2, (¾)^3, (¾)^4, \dots\dots (¾)^n, (¾)^{(n+1)},$
o meglio:

$$\frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256} \dots\dots\dots \frac{3^n}{4^n}, \frac{3^{(n+1)}}{4^{(n+1)}}, \dots\dots\dots$$

In questi casi tutte le successioni sono convergenti a zero.

2.

Base uguale ad 1.
Se la base e' uguale ad **1** allora otterremo la successione costante:
$1^1, 1^2, 1^3, 1^4, \dots\dots 1^n, 1^{(n+1)}, \dots\dots$
cioe':
$1, 1, 1, 1, \dots\dots 1^n, 1^{(n+1)}, \dots\dots$
Che e' di un tipo che abbiamo gia' visto.

3.

Base maggiore di 1.
La base puo' essere intera:
$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots\dots 3^n, 3^{(n+1)}, \dots\dots$
cioe':
$3, 9, 27, 81, \dots\dots 3^n, 3^{(n+1)}, \dots\dots$
oppure puo' essere frazionaria:
$(3/2)^1, (3/2)^2, (3/2)^3, (3/2)^4, \dots\dots (3/2)^n, (3/2)^{(n+1)},$
o meglio:

$$\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16} \dots\dots\dots \frac{3^n}{2^n}, \frac{3^{(n+1)}}{2^{(n+1)}}, \dots\dots\dots$$

Tutte queste successioni sono divergenti.

(3) Esponente variabile con base negativa o nulla

BASE NULLA

Se la base e' nulla ritroviamo la nostra successione nulla:

$$0^1, 0^2, 0^3, 0^4, \ldots\ldots , 0^n, 0^{(n+1)},\ldots$$

cioe':

$$0, 0, 0, 0, \ldots, 0^n, 0^{(n+1)},\ldots$$

BASE NEGATIVA

Essendo la base negativa, avremo sempre una successione oscillante perche' se l'esponente e' pari avremo un termine positivo; mentre, se l'esponente e' dispari, il termine restera' negativo. Distinguiamo 3 casi:

1. base compresa fra 0 e -1
2. base uguale ad -1
3. base minore di -1

1.

Base compresa fra 0 e -1.
Avremo una successione oscillante convergente a zero
Consideriamo come esempio la base **-½** .
Avremo:

$$(-½)^1, (-½)^2, (-½)^3, (-½)^4, \ldots\ldots (-½)^n, (-½)^{(n+1)},$$

o meglio:

$$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, +\frac{1}{16} \ldots\ldots\ldots\ldots \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \ldots\ldots\ldots$$

2.

Base uguale a -1.
Se la base e' uguale a **-1** allora otterremo la successione oscillante indeterminata:

$$(-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, \ldots\ldots, (-1)^n, (-1)^{(n+1)}, \ldots$$

cioe'

$$-1 , +1 , -1 , +1 , \ldots\ldots(-1)^n, (-1)^{(n+1)}, \ldots$$

che e' di un tipo che abbiamo gia' visto.

3.

Base minore di -1.
Se la base e' minore di **-1** avremo sempre una successione oscillante divergente verso **∞** (senza segno).
Consideriamo come esempio **-3**

$$(-3)^1, (-3)^2, (-3)^3, (-3)^4, \ldots\ldots(-3)^n, (-3)^{(n+1)}, \ldots$$

cioe'

$$-3, +9, -27, +81, \ldots\ldots (-3)^n, (-3)^{(n+1)}, \ldots$$

(4) Termine variabile sia alla base che all'esponente

Anche questa e' una successione molto interessante:

$$1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \ldots\ldots , n^n, (n+1)^{(n+1)},\ldots$$

cioe':

$$1 , 4, 27, 256, \ldots\ldots , n^n, (n+1)^{(n+1)},\ldots$$

E' una successione che diverge molto rapidamente.

Se l'esponente e' negativo (cioe' la potenza si riferisce al denominatore) allora diventa convergente:

$$1^{(-1)}, 2^{(-2)}, 3^{(-3)}, 4^{(-4)}, \dots\dots , n^{(-n)}, (n+1)^{(-n-1)},\dots$$

cioe':

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \dots\dots\dots \frac{1}{n^n}, \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}, \dots\dots$$

Se e' negativa la base, allora la successione diventa oscillante perche' la potenza pari rende positivo il segno del termine, mentre la potenza dispari lascia il segno negativo:

$$(-1)^1, (-2)^2, (-3)^3, (-4)^4, \dots\dots , (-n)^n, (-n-1)^{(n+1)},\dots$$

cioe'

$$-1 , +4, -27, +256, \dots\dots , (-n)^n, (-n-1)^{(n+1)},\dots$$

La successione diverge verso infinito (senza segno).

Se sono negativi sia la base che l'esponente, diventa oscillante e la successione converge a zero.

Infatti il segno negativo dell'esponente pone la base al denominatore ed il segno negativo della base fa in modo che, per ogni termine, la potenza dispari resti negativa e la potenza pari diventi positiva:

$$(-1)^{(-1)}, (-2)^{(-2)}, (-3)^{(-3)}, (-4)^{(-4)}, \dots\dots , (-n)^{(-n)}, (-n-1)^{(-n-1)},\dots$$

cioe':

$$-1, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{27}, +\frac{1}{64}, \dots\dots\dots \frac{1}{(-n)^{(-n)}}, \frac{1}{(-n-1)^{(-n-1)}}, \dots\dots$$

g) Alcune successioni particolari

Qui mettiamo alcune successioni che sono un po' particolari e che e' difficile definire con semplici operazioni (a parte forse la prima)

- successione fattoriale
- successione di Nepero
- altre successioni
- successione dei numeri triangolari

(1) Successione fattoriale

Veramente sarebbe piu' giusto chiamarla serie fattoriale, perche' ogni termine si ottiene coinvolgendo il termine precedente, ma non formalizziamoci troppo

---

Ricordo che il fattoriale di un numero naturale e' il prodotto di quel numero per tutti i suoi antecedenti.

Esempio:

$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$

$7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$

Considero la successione **s:N→N** formata dai fattoriali dei numeri naturali:

$1!, 2!, 3!, 4!, 5!, \dots ,n!, (n+1)!, \dots$

cioe':

$1, 2\cdot1, 3\cdot2\cdot1, 4\cdot3\cdot2\cdot1, 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1, \dots ,n!, (n+1)!, \dots$

od anche:

$1 , 4, 6, 24, 120, \dots ,n!, (n+1)!, \dots$

E' una successione divergente (e anche molto "rapidamente").

(2) Succession di Nepero

E' la successione:

$$\mathbf{s : N \rightarrow R}$$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}, \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}, \left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}, \left(1+\frac{1}{4}\right)^{4}, \dots\dots\dots\dots \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \dots\dots\dots$$

cioe':

$$2, \left(\frac{3}{2}\right)^{2}, \left(\frac{4}{3}\right)^{3}, \left(\frac{5}{4}\right)^{4}, \dots\dots\dots\dots \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \dots\dots\dots$$

od anche:

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots\dots\dots\dots \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \dots\dots\dots$$

E' una successione convergente al numero di Nepero **e**

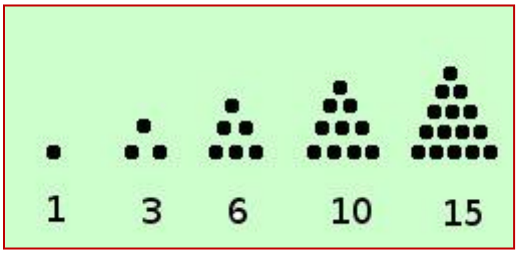
(3) Altre successioni verso numeri trascendenti

Possiamo considerare altre successioni che tendono a $\boldsymbol{\pi}$, $\sqrt{\mathbf{2}}$, $\sqrt{\mathbf{3}}$, ma non conviene anche perche' risulteranno formule molto complicate.
Se vuoi calcolare i valori di tali numeri, con la precisione che vuoi, conviene fare riferimento allo sviluppo in serie di potenze, che troverai in analisi.

(4) Successione dei numeri geometrici

Sono quei numeri che possiamo chiamare ***triangolari, quadratici***, ... nel piano; ***cubici*** nello spazio... eccetera.

Definiamo triangolare un numero come un quelli che vedete a destra, cioe' tale che, considerato come insieme di unita', posso disporre tali unita' in modo che la figura sia corrispondente ad un triangolo equilatero.



Se consideriamo tali numeri possiamo indicare la successione:

1, 3, 6, 10, 15,... a_{n-1}+n, a_n+(n+1), ...

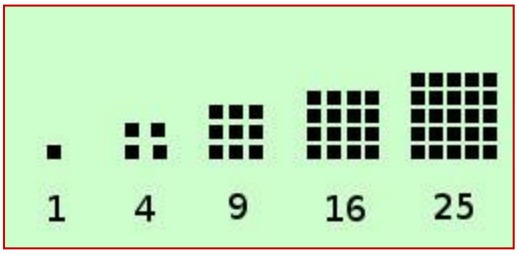
Cioe' ogni termine successivo si ottiene aggiungendo al termine precedente tante unita' quant'e'il posto del termine che cerco.

Esempio:

1 e' il primo termine, per avere il secondo termine devo fare 1+2
3 e' il secondo termine, per avere il terzo termine devo fare 3+3
6 e' il terzo termine, per avere il quarto termine devo fare 6+4
10 e' il quarto termine, per avere il quinto termine devo fare 10+5
15 e' il quinto termine, per avere il sesto termine devo fare 15+6
....

E' una successione **a:N→N** divergente.

Similmente possiamo considerare i numeri "quadratici".



Definiamo numero quadratico un numero come un quelli che vedete a destra , cioe' che, considerato come insieme di unita', posso disporre tali unita' in modo che la figura sia corrispondente ad un quadrato.
Se consideriamo tali numeri possiamo indicare la successione:

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots n^2, (n+1)^2, \dots\dots$$

Abbiamo gia' visto questa successione quando abbiamo considerato le potenze a base variabile.

Possiamo anche passare allo spazio e considerare la successione dei cubi dei numeri naturali, anche questa gia' considerata assieme alla precedente:

$$1, 8, 27, 64, 125, \dots n^3, (n+1)^3, \dots\dots$$

o per estensione le potenze quarte, quinte..... eccetera, ma di solito vengono considerate come semplici successioni di potenze senza dar loro particolare importanza

B. *Progressioni*

In questo capitolo studiamo un particolare tipo di successioni, le progressioni, cioe' le successioni che si ottengono sommando o moltiplicando in modo regolare. L'argomento di solito e' affrontato nel biennio delle scuole medie superiori.
Ripprenderemo nel prossimo capitolo lo studio delle successioni in modo piu' generale ed approfondito:

- progressioni aritmetiche
- progressioni geometriche

1. Progressioni aritmetiche

a) Definizione di progressione aritmetica

Definiamo **progressione aritmetica** una successione in cui e' costante la differenza fra ogni termine ed il suo antecedente.
Il primo termine, non avendo antecedente, non fa parte della definizione.

Esempio:
3, 7, 11, 15, 19,..... , a_n, ...
Di solito, nella progressione, il termine generico si indica con a_n invece che con la legge che genera il termine.
La differenza, nelle progressioni aritmetiche, viene indicata con il simbolo **d** (iniziale di differenza) e si chiama **ragione.**
Nella nostra progressione abbiamo che la ragione e':
$d = 4$
Infatti abbiamo:
3
Per ottenere gli altri termini sommo 4 (la ragione) al primo termine e poi ad ogni termine: successivo:
$3 + 4 = 7$
$7 + 4 = 11$
$11 + 4 = 15$
$15 + 4 = 19$
.....

Se la *ragione* e' positiva, allora la progressione e' crescente (tende a **+∞**).
Esempio primo termine **-2** e ragione **½**:

$$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \ldots$$

Ecco come fare i calcoli:
Primo termine: **-2**
Sommiamo la ragione **+½** al primo termine e ad ogni termine successivo:

Secondo termine: $-2+\frac{1}{2}=\frac{-4+1}{2}=-\frac{3}{2}$

Terzo termine: $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{-3+1}{2}=-\frac{2}{2}=-1$

Quarto termine: $-1+\frac{1}{2}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$

Quinto termine: $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{-1+1}{2}=0$

Sesto termine: $0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Settimo termine: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$

Ottavo termine: $1+\frac{1}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

....
....

Se la ragione e' **0** , allora abbiamo una successione costante.
Esempio primo termine **1** e ragione **0**:
1, 1, 1, 1, 1, 1, ...

Se la ragione e' negativa allora la progressione e' decrescente e tende a **-∞**
Esempio primo termine **3** e ragione **-2**:
3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, ...

Ecco come fare i calcoli:
Primo termine: **3**
Sommiamo la ragione **-2** al primo termine e ad ogni termine successivo.
Secondo termine: **3 - 2 = -1**
Terzo termine: **-1 - 2 = -3**
Quarto termine: **-3 - 2 = -5**
Quinto termine: **-5 - 2 = -7**
Sesto termine: **-7 - 2 = -9**
....
....

b) <u>Ricerca di un termine qualunque della progressione geometrica</u>

Siccome la differenza fra ogni termine e l'antecedente resta costante, conoscendo il primo termine e la ragione possiamo trovare un termine qualunque della progressione.
Infatti, ad esempio, data la progressione di primo termine **3** e ragione **5** abbiamo:
Primo termine: **3**

Secondo termine: $3 + 5 = 8 = 3 + 5 \cdot 1$
Terzo termine: $8 + 5 = 13 = 3 + 5 \cdot 2$
Quarto termine: $13 + 5 = 18 = 3 + 5 \cdot 3$
Quinto termine: $18 + 5 = 23 = 3 + 5 \cdot 4$
Sesto termine: $23 + 5 = 28 = 3 + 5 \cdot 5$
....

Quindi se voglio il centesimo termine, bastera' fare:
centesimo termine: $3 + 5 \cdot (100-1) = 3 + 5 \cdot 99 = 498$
Quindi la formula per trovare il termine k-esimo di una progressione aritmetica, dato il primo termine a_1 e di ragione d sara':

$$a_k = a_1 + d \cdot (k - 1)$$

Esempio:
Dato il primo termine -2 e ragione $½$, trovare il quarantesimo termine:

$$a_{40} = a_1 + \frac{1}{2} \cdot (40 - 1) = -2 + \frac{1}{2} \cdot 39 = \frac{-4 + 39}{2} = \frac{35}{2}$$

Quindi:

$$a_{40} = \frac{35}{2}$$

c) Costruzione di una progressione aritmetica dati due termini

Vediamo, su un esempio, come procedere per costruire una progressione aritmetica conoscendone due termini.
Supponiamo di conoscere il terzo termine $a_3 = 8$ ed anche il settimo termine $a_7 = 24$
Per ottenere il settimo termine partendo dal terzo devo aggiungere al terzo la ragione per 4 volte (7-3); quindi, per ottenere la ragione bastera' ragionare alla rovescia, cioe' per ottenere la ragione sottraggo dal settimo termine il terzo e poi divido tale differenza per 4:

$$d = \frac{24 - 8}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Quindi la ragione e' 4 e la mia progressione e':
0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...

Ecco il calcolo dei termini:
i calcoli sono abbastanza semplici:
Terzo termine $a_3 = 8$
Per ottenere il secondo termine tolgo la ragione dal terzo termine:
Secondo termine $a_2 = 8 - 4 = 4$
Per ottenere il primo termine tolgo la ragione dal secondo termine:
Primo termine $a_1 = 4 - 4 = 0$
Per ottenere il quarto termine aggiungo la ragione al terzo termine:
Quarto termine $a_4 = 8 + 4 = 12$
Per ottenere il quinto termine aggiungo la ragione al quarto termine:
Quinto termine $a_5 = 12 + 4 = 16$
Per ottenere il sesto termine aggiungo la ragione al quinto termine:
Sesto termine $a_6 = 16 + 4 = 20$
Per ottenere il settimo termine aggiungo la ragione al sesto termine:
Quinto termine $a_7 = 20 + 4 = 24$
Per ottenere l' ottavo termine aggiungo la ragione al settimo termine:
Ottavo termine $a_8 = 24 + 4 = 28$
Quindi ottengo:
0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...

Adesso facciamo lo stesso ragionamento con due termini generici, in modo da avere la formula generale.

Supponiamo di conoscere i termini:
a_k ed a_n essendo $n > k$ (siccome se n<k la differenza diventa negativa la formula e' comunque valida: infatti se n<k invece di aggiungere devo sottrarre);
allora per ottenere a_n partendo da a_k, dovro' aggiungere a tale termine la ragione **d** moltiplicata per **(n-k)**:

$$a_n = a_k + d \cdot (n-k)$$

Adesso tratto tale uguaglianza come un'equazione: devo trovare **d**, quindi prima scrivo l'equazione alla rovescia (oppure, se preferisci, cambio di posto i termini rispetto all'uguale, cambiandoli di segno e poi li cambio di nuovo di segno):

$$d \cdot (n-k) + a_k = a_n$$

porto il termine senza la **d** dopo l'uguale

$$d \cdot (n-k) = a_n - a_k$$

adesso divido entrambe i termini per **(n-k)** (posso farlo perche' n e' diverso da k) semplificando al primo termine resta **d:**

$$d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$$

Esempio:
Dato il quinto termine $a_5 = -2$ ed il venticinquesimo termine $a_{25} = 28$, trovare i primi 7 termini della progressione aritmetica:
Applico la formula:

$$d = \frac{a_n - a_k}{n - k} = \frac{28 - (-2)}{25 - 5} = \frac{28 + 2}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

Quindi la ragione è $d = 3/2$.
Costruisco i termini della progressione:

Quinto termine:	$a_5 = -2$
Per ottenere il quarto termine tolgo la ragione dal quinto termine:	$a_4 = -2 - 3/2 = -7/2$
Per ottenere il terzo termine tolgo la ragione dal quarto termine:	$a_3 = -7/2 - 3/2 = -10/2 = -5$
Per ottenere il secondo termine tolgo la ragione dal terzo termine:	$a_2 = -5 - 3/2 = -13/2$
Per ottenere il primo termine tolgo la ragione dal secondo termine:	$a_3 = -13/2 - 3/2 = -16/2 = -8$
Invece per ottenere il sesto temine aggiungo la ragione al quinto termine:	$a_6 = -2 + 3/2 = -1/2$
Per ottenere il settimo temine aggiungo la ragione al sesto termine:	$a_7 = -1/2 + 3/2 = 1$

Quindi la mia progressione e'
-8, -13/2, -5, -7/2, -2, -1/2, 1, ...

d) Conoscendo il termine di posto **h** e la ragione trovare termine di posto **k**

In pratica e' l'inverso di quello che abbiamo fatto nel paragrafo precedente.
Vediamo, anche qui, sullo stesso esempio della pagina precedente, come procedere
Supponiamo di conoscere il terzo termine $a_3 = 8$ e la ragione **4** ; troviamo il settimo termine: $a_7 = 24$

Per ottenere il settimo termine partendo dal terzo devo aggiungere al terzo la ragione per 4 volte (7-3). Quindi:
$a_7 = a_3 + 4 \cdot 4 = 8+16 = 24$
Adesso facciamo lo stesso ragionamento con due termini generici, in modo da avere la formula generale.

Supponiamo di conoscere il termine a_h e la ragione **d**; supponiamo anche $h < k$ (siccome se n < k la differenza diventa negativa, la formula e' comunque valida; infatti se n < k invece di aggiungere devo sottrarre), allora per ottenere a_k partendo da a_h, dovro' aggiungere a tale termine la ragione **d** moltiplicata per **(n-k)**

$$a_h = a_k + d \cdot (n-k)$$

Esempio:
Anche qui riferiamoci allo stesso esempio del paragrafo precedente.
Dato il quinto termine $a_5 = -2$ e la ragione $d = 3/2$, trovare il venticinquesimo termine a_{25}
Applico la formula:
$a_{25} = a_5 + 3/2 \cdot(25-5) = -2 + 3/2\cdot 20 = -2+30 = 28$ quindi: $a_{25}= 28$

e) Somma di **n** termini di una progressione aritmetica

Prima di procedere al calcolo vi racconto un aneddoto che spero vi fara' meglio capire l'aspetto del problema.
Gauss, uno dei piu' grandi matematici mai vissuti, aveva un maestro che, per poter avere un po' di pace, dava talvolta agli allievi come esercizio il sommare un centinaio di numeri di 4 o 5 cifre ciascuno, tutti tali che la differenza fra due numeri consecutivi fosse costante (quindi una progressione aritmetica): semplificando molto l'esercizio e' come sommare i numeri da 1 a 100.
Ebbene Gauss (a 10 anni!) si limito' a scrivere sulla lavagnetta il risultato senza eseguire tanti calcoli, restando poi seduto al suo banco a braccia conserte mentre i suoi compagni sudavano per una buona ora
Quale fu il metodo seguito da Gauss?
se sommo 1 con 100 ottengo 101
se sommo 2 con 99 ottengo 101
se sommo 3 con 98 ottengo 101
...
...
se sommo 49 con 52 ottengo 101
se sommo 50 con 51 ottengo 101
in pratica ottengo 101 per 50 volte cioe' 5050
Qui si vede la grandezza matematica di Gauss: quando si affronta un problema non si deve correre a fare i calcoli ma bisogna cercare di vedere tutte le possibili relazioni che possono esistere fra gli elementi del problema stesso; forse c'e' una scorciatoia che ci permette di risolvere senza troppe operazioni.

Vogliamo sommare n termini di una progressione aritmetica data, la somma sara' data da:
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Per la proprieta' commutativa della somma posso anche scrivere:
$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$

Sommo termine a termine le due uguaglianze:
$S_n+S_n = 2S_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + (a_3+a_{n-2}) .... + (a_{n-2}+a_3) + (a_{n-1}+a_2) + (a_n+a_1)$

Essendo la differenza fra i termini costante (progressione aritmetica) avremo che le somme dei termini dentro parentesi sono uguali:
$(a_1+a_n) = (a_2+a_{n-1}) = (a_3+a_{n-2})= .... = (a_{n-2}+a_3) = (a_{n-1}+a_2) = (a_n+a_1)$

Quindi, essendo **n** le parentesi, posso scrivere:
$2S = (a_1+a_n)\cdot n$
da cui dividendo per 2, otteniamo la formula finale:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Esempio 1:
Facciamo un esempio tipo quello di Gauss, limitandoci a 20 termini.

Eseguire la seguente somma:
7291 + 7489 + 7687 + 7885 + 8083 + 8281 + 8479 + 8677 + 8875 + 9073 + 9271 + 9469 + 9667 + 9865 + 10063 + 10261 + 10463 + 10661 + 10859 + 11057 =

La differenza fra due termini consecutivi e' costante; si tratta di una progressione aritmetica e la ragione e' $d = 198$ (ho scelto 198 perche', scritto il primo numero a caso, e' molto facile scrivere gli altri; basta aumentare ogni numero di 200 e poi togliere 2: cioe' 7291+200 =7491 e poi 7491-2=7489 eccetera...)
I termini sono: $n = 20$
Applico la formula:

$$S_{20} = \frac{7291 + 11057}{2} \cdot 20 = 18348 \cdot 10 = 183480$$

Quindi $S_{20} = 183480$

Esempio 2:
Sommare i primi quaranta termini della progressione aritmetica:
7, 17/2, 10,......
Devo trovare il quarantesimo temine, ma prima devo trovare la ragione; basta fare la differenza fra due termini consecutivi:

$$d = \frac{17}{2} - 7 = \frac{17 - 14}{2} = \frac{3}{2}$$

Ora posso trovare il quarantesimo termine:

$$a_{40} = a_1 + \frac{3}{2} \cdot (40 - 1) = 7 + \frac{3}{2} \cdot 39 = 7 + \frac{117}{2} = \frac{14 + 117}{2} = \frac{131}{2}$$

Adesso applico la formula:

$$S_{40} = \frac{1}{2} \cdot \left(7 + \frac{131}{2}\right) \cdot 40 = \frac{1}{2} + \left(\frac{14 + 131}{2}\right) \cdot 40 = 145 \cdot 10 = 1450$$

Quindi: $S_{40} = 1450$

2. Progressioni geometriche

a) Definizione

Definiamo **progressione geometrica** una successione in cui e' costante il quoziente fra ogni termine ed il suo antecedente.
Il primo termine, non avendo antecedente, non fa parte della definizione.

Esempio:
3, 6, 12, 24, 48,..... , a_n, ...
Il termine generico si indica con a_n.

Il quoziente, nelle progressioni geometriche, viene indicata con il simbolo **q** (iniziale di quoziente) e si chiama **ragione**.
Nella nostra progressione abbiamo che la ragione e':
$q = 2$

Infatti abbiamo:
3
Per ottenere gli altri termini moltiplico 2 (la ragione) col primo termine e poi con ogni termine successivo:

$3 \cdot 2 = 6$
$6 \cdot 2 = 12$
$12 \cdot 2 = 24$
$24 \cdot 2 = 48$
.....

Ora distinguiamo i casi:
- Primo termine positivo
- Primo termine negativo

Primo termine positivo

Se il primo termine e' positivo, ricordando che la ragione, essendo un rapporto, non puo' essere nulla, consideriamo i seguenti casi:

1. Ragione positiva:
   - La ragione e' maggiore di 1.
     Se la ragione e' maggiore di 1 la progressione geometrica e' crescente e tende ad **∞.**
     Esempio: primo termine **4** e ragione **q=2** :
     4, 8, 16, 32, 64, ...
   - La ragione e' uguale ad 1.
     Se la ragione e' uguale ad 1 la progressione geometrica e' costante.
     Esempio: primo termine **4** e ragione **q=1** :
     4, 4, 4, 4, 4, ...
   - La ragione e' compresa fra 0 ed 1.
     Se la ragione e' compresa fra 0 ed 1 la progressione geometrica e' calante e tende ad **0.**
     Esempio: primo termine **4** e ragione **q=½** :
     $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \dots$
2. Ragione negativa
   - Ragione minore di -1.
     Se la ragione e' minore di -1 la progressione geometrica e' oscillante e tende ad **∞** (senza segno).
     Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=-2** :
     -4, +8, -16, +32, -64, ...
   - Ragione uguale a -1
     Se la ragione e' uguale a -1 la progressione geometrica e' oscillante.
     Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=-1**
     -4, +4, -4, +4, -4, ...
   - Ragione compresa fra -1 e 0.
     Se la ragione e' compresa fra -1 e 0 la progressione geometrica e' oscillante e tende a **0.**
     Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=-½** :
     $-4, +2, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{8}, \dots \dots$

Primo termine negativo

Se il primo termine e' negativo, ricordando che la ragione, essendo un rapporto, non puo' essere nulla, consideriamo i seguenti casi:

1. Ragione positiva:
   - La ragione e' maggiore di 1.
     Se la ragione e' maggiore di 1, la progressione geometrica e' decrescente e tende a **-∞.**
     Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=2** :
     -4, -8, -16, -32, -64, ...

- La ragione e' uguale ad 1.
  Se la ragione e' uguale ad 1 la progressione geometrica e' costante.
  Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=1**
  -4, -4, -4, -4, -4, ...
- La ragione e' compresa fra 0 ed 1.
  Se la ragione e' compresa fra 0 ed 1 la progressione geometrica e' crescente e tende a **0.**
  Esempio: primo termine **-4** e ragione **q=½:**
  $$-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \dots$$

2. Ragione negativa:
   - Ragione minore di -1
     Se la ragione e' minore di **-1** la progressione geometrica e' oscillante e tende ad **∞** (senza segno).
     Esempio: primo termine **+4** e ragione **q=-2 :**
     +4, -8, +16, -32, +64, ...
   - Ragione uguale a -1.
     Se la ragione e' uguale a -1 la progressione geometrica e' oscillante.
     Esempio: primo termine **+4** e ragione **q=-1**
     +4, -4, +4, -4, +4, ...
   - Ragione compresa fra -1 e 0
     Se la ragione e' compresa fra -1 e 0 la progressione geometrica e' oscillante e tende a **0.**
     Esempio: primo termine **+4** e ragione **q=-½ :**
     $$+4, -2, +1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \dots$$

b) Ricerca di un termine qualunque della progressione geometrica

Siccome il quoziente fra ogni termine e l'antecedente e' costante, conoscendo il primo termine e la ragione possiamo trovare un termine qualunque della progressione.
Infatti, ad esempio, data la progressione geometrica di primo termine **3** e ragione **2,** abbiamo:

Primo termine: 3
Secondo termine: $3 \cdot 2 = 6$
Terzo termine: $6 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$
Quarto termine: $12 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$
Quinto termine: $24 \cdot 2 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$
Sesto termine: $48 \cdot 2 = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$
....
Quindi, se voglio l'undicesimo termine, bastera' fare:
undicesimo termine : $3 \cdot 2^{(11-1)} = 3 \cdot 2^{10}\ 3 \cdot 1024 = 3072$
Quindi la formula per trovare il temine k-esimo di una progressione geometrica, dato il primo termine a_1 e di ragione q sara':
$$a_k = a_1 \cdot q^{(k-1)}$$

Esempio:
Dato il primo termine **-2** e ragione **3** trovare il decimo termine:
$a_{10} = a_1 \cdot 3^{(10-1)} = -2 \cdot 3^9 = -2 \cdot 19683 = -39366$

c) Costruzione di una progressione geometrica dati due termini

Vediamo, su un esempio, come procedere per costruire una progressione aritmetica conoscendone due termini.
Supponiamo di conoscere il terzo termine $a_3 = 12$ ed anche il settimo termine $a_7 = 192$

Per ottenere il settimo termine partendo dal terzo devo moltiplicare il terzo la ragione per 4 volte (7-3); quindi, per ottenere la ragione bastera' ragionare alla rovescia, cioe' per ottenere la ragione divido il settimo termine per il terzo e poi eseguo la radice quarta di tale differenza.
Quindi:
$q^4 = 192:12 = 16$
quindi (siccome 2^4 fa 16) posso scrivere:
$q = \sqrt[4]{16} = 2$
Quindi la ragione e' **2** e la mia progressione e':
3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...

Ecco come calcolare i termini:
Ho la ragione: $q = 2$
Terzo termine: $a_3 = 12$
Per ottenere il secondo termine divido il terzo termine per la ragione,
Secondo termine: $a_2 = 12:2 = 6$
Per ottenere il primo termine divido il secondo termine per la ragione,
Primo termine: $a_1 = 6:2 = 3$
Per ottenere il quarto termine moltiplico il terzo termine per la ragione,
Quarto termine: $a_4 = 12 \cdot 2 = 24$
Per ottenere il quinto termine moltiplico il quarto termine per la ragione,
Quinto termine: $a_5 = 24 \cdot 2 = 48$
Per ottenere il sesto termine moltiplico il quinto termine per la ragione,
Sesto termine: $a_6 = 48 \cdot 2 = 960$
per ottenere il settimo termine moltiplico il sesto termine per la ragione,
Settimo termine: $a_7 = 96 \cdot 2 = 192$
Per ottenere l' ottavo termine moltiplico il settimo termine per la ragione,
Ottavo termine: $a_8 = 192 \cdot 2 = 384$
....
....
Quindi ottengo:
3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384,....

Adesso facciamo lo stesso ragionamento con due termini generici, in modo da avere la formula generale.
Supponiamo di conoscere i termini:
a_k ed a_n essendo $n > k$
Allora per ottenere a_n partendo da a_k, dovro' moltiplicare tale termine per la ragione q elevata ad **(n-k):**
$a_n = a_k \cdot q^{(n-k)}$
Adesso tratto tale uguaglianza come un'equazione; devo trovare q :

$$q^{(n-k)} = \frac{a_n}{a_k}$$

Estraggo la radice:

$$q = \sqrt[(n-k)]{\frac{a_n}{a_k}}$$

Vale quindi la formula:

$$q = \sqrt[(n-k)]{\frac{a_n}{a_k}}$$

Esempio:
Dato il sesto termine $a_6 = 1$ ed il dodicesimo termine $a_{12} = 1/729$ di una progressione geometrica, trovare i primi 10 termini.

Applico la formula:

$$q = \sqrt[(n-k)]{\frac{a_n}{a_k}} = \sqrt[6]{\frac{\frac{1}{729}}{1}} = \sqrt[6]{\frac{1}{729}} = \sqrt[6]{\frac{1}{3^6}} = \frac{1}{3}$$

Nel quarto passaggio ho scomposto in fattori il termine 729 e semplificato la radice con l'esponente;
quindi la ragione è: $q = ⅓$
Costruisco i termini della progressione:
Quinto termine: $a_6 = 3$
Per ottenere il quinto termine divido il sesto termine per la ragione
Quinto termine: $a_5 = 1:⅓ = 1\cdot 3 = 3$
Per ottenere il quarto termine divido il quinto termine per la ragione
Quarto termine: $a_4 = 3:⅓ = 3\cdot 3 = 9$
Per ottenere il terzo termine divido il quarto termine per la ragione
Terzo termine: $a_3 = 9:⅓ = 9\cdot 3 = 27$
Per ottenere il secondo termine divido il terzo termine per la ragione
Secondo termine: $a_2 = 27:⅓ = 27\cdot 3 = 81$
Per ottenere il primo termine divido il secondo termine per la ragione
Primo termine: $a_1 = 81:⅓ = 81\cdot 3 = 243$
Invece per ottenere il settimo temine moltiplico il sesto termine per la ragione
Settimo termine: $a_7 = 1 \cdot ⅓ = 1/3$
Per ottenere l' ottavo termine moltiplico il settimo termine per la ragione
Ottavo termine: $a_8 = ⅓ \cdot ⅓ = 1/9$
Per ottenere il nono termine moltiplico l'ottavo termine per la ragione
Nono termine: $a_9 = 1/9 \cdot ⅓ = 1/27$
Per ottenere il decimo termine moltiplico l'ottavo termine per la ragione
Decimo termine: $a_{10} = 1/27 \cdot ⅓ = 1/81$
Quindi la mia progressione, fino al decimo termine e':

243, 81, 27, 9, 3, 1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81

d) Conoscendo il termine di posto **h** e la ragione determinare il termine di posto **k**

In pratica e' l'inverso di quello che abbiamo fatto nella pagina precedente.
Vediamo, anche qui, sullo stesso esempio della pagina precedente, come procedere.
Supponiamo di conoscere il terzo termine $a_3 = 12$ e la ragione **2**, troviamo il settimo termine $a_7 = 192$.

Per ottenere il settimo termine partendo dal terzo devo moltiplicare il terzo per la ragione per 4 volte (7-3).
Quindi:

$a_7 = a_3 \cdot 2^4 = 12\cdot 16 = 192$

Adesso facciamo lo stesso ragionamento con due termini generici, in modo da avere la formula generale.

Supponiamo di conoscere il termine a_k e la ragione q
supponiamo, per semplicita' anche $k<n$
allora per ottenere a_k partendo da a_h, dovro' moltiplicare tale termine per la ragione q elevata all'esponente **(n-k)**

$$a_n = a_k \cdot q^{(n-k)}$$

(siccome se k>n la differenza n-k diventa negativa la formula e' comunque valida: infatti, essendo n-k un esponente negativo significa che devo moltiplicare per l'inverso, cioe' dividere, come vedi nell'esempio successivo).

Esempio: anche qui riferiamoci allo stesso esempio del paragrafo precedente.
Dato il sesto termine $a_6 = 96$ e la ragione $q = 2$ trovare il secondo termine a_2.
Applico la formula:
$a_2 = a_6 \cdot 2^{2-6} = 96 \cdot 2^{-4} = 96/2^4 = 96/16 = 6$ quindi $a_2 = 6$.

e) Somma di **n** termini di una progressione geometrica

La somma di n termini di una progressione geometrica e' alla base del calcolo di una rata, quindi fondamentale in matematica finanziaria ed attuariale.

Vogliamo sommare n termini di una progressione geometrica data, la somma sara' data da:
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Moltiplicando tutti i termini sia prima che dopo l'uguale per la ragione q ottengo:

$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots\dots\dots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$

Siccome ogni termine della progressione moltiplicato per q mi da' il termine successivo posso scrivere

$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots\dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q$
l'ultimo termine lo scrivo $a_n \cdot q$ invece che a_{n+1}

Adesso faccio la differenza fra questa uguaglianza e quella iniziale:

$$\begin{array}{l} S_n \cdot q = \quad a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots\dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q \quad - \\ S_n \quad = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ \hline S_n \cdot q - S_n = \quad -a_1 + a_n \cdot q \end{array}$$

Infatti gli altri termini si eliminano fra loro.
Adesso la tratto come un'equazione per calcolare S_n

Raccolgo S_n:
$S_n \cdot (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$

ma $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Ottengo:
$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1$

Cioe':
$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^n - a_1$

Raccolgo anche a_1:
$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$

Divido entrambe i membri per (q-1) ed ottengo la formula finale:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

o meglio:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

Esempio:

Calcoliamo la somma dei primi 10 termini della progressione geometrica:

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536

La ragione **q** vale **2** (per trovarla basta dividere il secondo termine per il primo 6:3=2): quindi applico la formula:

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 3 \cdot (2^{10} - 1) = 3 \cdot (1024 - 1) \ = \ 3(1023) \ = \ 3069$$

Quindi: **S_{10}= 3069.**

f) Somma dei termini di una progressione geometrica

Vediamo come e' possibile sommare tutti i termini di una progressione geometrica nel caso in cui la ragione sia inferiore ad 1 (se la ragione e' superiore ad 1 la progressione diverge)

Abbiamo visto la formula:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

Scriviamola, cambiando segno sia sopra che sotto, come:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Posso anche scrivere, suddividendo i numeratori in due frazioni:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} \cdot \frac{a_1 q^n}{1 - q}$$

Essendo **q** un numero inferiore ad 1, maggiormente cresce la sua potenza e minore e' il valore della frazione, cioe' possiamo dire:

$$\lim_{n \to \infty} - \frac{a_1 q^n}{1 - q} = - \frac{a_1 \cdot 0}{1 - q} = 0$$

Quindi posso scrivere la formula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Esempio:

Calcoliamo la somma dei termini della progressione geometrica:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \dots$$

La ragione e' **q = ½** ;quindi applico la formula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1/2} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$$

Quindi:

$S_\infty = 1 + ½ + ¼ + ... = 2$

g) Prodotto di n termini di una progressione geometrica

E' possibile calcolare il prodotto di n termini di una progressione geometrica con tutti i termini positivi.

Consideriamo la progressione:

$a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ...$

Vediamo come trovare una formula per calcolare, ad esempio, il prodotto dei primi **n** termini:

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot .... \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \cdot$

Prima osserviamo che vale la proprieta':

Data una progressione geometrica limitata il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi equivale al prodotto degli estremi.

Vediamolo su un esempio.

Considero la progressione geometrica limitata a 7 termini:

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192

Se io moltiplico gli estremi $3 \cdot 192$ ottengo 576

Se prendo 6 e 96 (secondo e sesto termine) che sono equidistanti dai due estremi anche il loro prodotto e' $6 \cdot 96 = 576$.

Infatti il secondo termine della progressione si ottiene dal primo moltiplicandolo per la ragione, mentre il penultimo termine si ottiene dall'ultimo dividendolo per la ragione;
Quindi il risultato e' identico.

Quindi se i termini che considero sono equidistanti dagli estremi il primo e' moltiplicato ed il secondo e' diviso per la ragione lo stesso numero di volte, di conseguenza, moltiplicandoli, ottengo sempre un risultato uguale al prodotto degli estremi:

$3 \cdot 192 = 576$
$6 \cdot 96 = 576$
$12 \cdot 48 = 576$
$24 \cdot 24 = 576$
$48 \cdot 12 = 576$
$96 \cdot 6 = 576$
$192 \cdot 3 = 576$

Considero il prodotto dei primi **n** termini:

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot .... \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \cdot$

Per la proprieta' commutativa del proidotto posso scrivere

$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot .... \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot$

Moltiplichiamo fra loro le due uguaglianze, usando al proprieta' associativa posso associare i termini in ordine

$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) .... \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$

per la proprieta' vista sopra ognuno dei prodotti entro parentesi vale $a_1 \cdot a_n$, quindi, essendo n tali prodotti, posso scrivere

$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$

e quindi, estraendo al radice quadrata, ottengo il risultato finale:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Esempio:
Calcoliamo il prodotto dei 7 termini della progressione geometrica precedente:
3, 6, 12, 24, 48, 96, 192

$P_7 = \sqrt{576^7} = 4.586.471.424$

(per fare i calcoli e' ottima la calcolatrice del computer)
cioe':
$3 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 96 \cdot 192 = 4.586.471.424$

C. *Successioni*

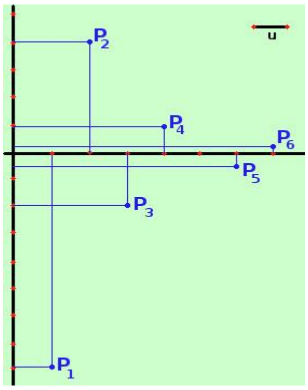
1. Definizioni sulle successioni

D'ora in avanti, senza specificare **N** oppure **Z,** diremo che la successione:
$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots a_n, a_{n+1}, \ldots\ldots$
e' una **successione di numeri reali** o, brevemente, **successione reale** se tutti i suoi termini sono numeri reali:
$a_k \in \Re$
Esempio:
1, 2, 3, 4, 5, ...n, n+1, ...
e' una successione reale.

Invece la successione:
$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots\ldots z_n, z_{n+1}, \ldots\ldots$
sara' detta **successione di numeri complessi** o, brevemente, **successione complessa** se i suoi termini sono numeri complessi
$a_k + ib_k = z_k \in C$
Esempio:
$1 + 2i,\ 2 + 4i,\ 3 + 8i,\ 4 + 16i,\ 5 + 32i, \ldots n + i\,2^n,\ (n+1) + i\,2^{n+1}, \ldots$
e' una succesione complessa.

2. Rappresentazione cartesiana di una successione

E' possibile dare una rappresentazione cartesiana ad una successione.
Consideriamo un sistema di assi cartesiani.
Sull'asse delle x consideriamo i punti 1, 2, 3, 4,...
sull'asse delle ordinate i valori $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
I punti del piano:
$P1 \equiv (1; a_1), P2 \equiv (2; a_2), P3 \equiv (3; a_3), P4 \equiv (4; a_4), \ldots$
si possono considerare come il grafico cartesiano della successione



Esempio:
se consideriamo la successione:
-8, +4, -2, +1, -½, +¼....
a destra vedi la rappresentazione grafica dei suoi primi sei valori, data dai punti blu.
Ho considerato nel diagramma cartesiano i punti:
P1≡(1; -8), P2≡(2; +4),P3≡(3; -2), P2≡(4; +1),P5≡(5; -½), P6≡(6; +¼),

3. Limiti di una successione numerica reale

In questa pagina consideriamo il concetto di limite relativamente alle successioni di numeri reali, concetto analogo a quello che viene considerato in analisi matematica per le funzioni

Definizione

Diremo che la successione:

$a_1, a_2, \dots\dots\, a_k, \dots\dots$

tende al limite **a** se, considerato in $\mathfrak{R}$ un intorno **U** di **a,** e' possibile determinare un intorno $V \subset N$ di ∞ tale che, non appena il termine a_k si trova nell'intorno **U** di **a,** l'indice **k** si trovi nell'intorno **V:**

$\lim_{k\to\infty} a_k = a \quad \Leftrightarrow \quad a_k \in U \Rightarrow k \in V$

In pratica significa che, se prendo un intorno di **a** ed un intorno di ∞, quando il primo intorno si "restringe", allora si restringe anche il secondo intorno.
Ho messo restringe fra virgolette perche' concettualmente e' un po' difficile considerare un intorno di infinito che si restringa.
Intendo che, per l'insieme **V** sulla retta reale, il bordo destro dell'insieme diventa sempre piu' grande, cioe' diventa sempre piu' grande il numero **k** bordo dell'insieme: chiariremo meglio il concetto.
Distinguiamo ora i due casi:

- limite finito di una successione
- limite infinito di una successione
- casi possibili

a) Limite finito di una successione

Quella che abbiamo dato nella pagina precedente e' una definizione mediante intorni ed e' valida sempre per ogni tipo di limite; ma e' possibile dare, per una successione convergente, una definizione di limite piu' "algebrica"che puo' essere meglio utilizzata negli esercizi.

Definizione

Diremo che la successione:

$a_1, a_2, \dots\dots\, a_n, \dots\dots$

tende al **limite finito a** se, considerato un numero ε positivo piccolo a piacere, esiste in sua corrispondenza un numero $k_\varepsilon \in N$ tale che quando $|a_n - a| < \varepsilon$ abbiamo $n > k_\varepsilon$

In simboli:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon \;\Rightarrow\; n > k_\varepsilon$

Intuitivamente significa che una successione

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\dots\, a_k, \dots\dots$

tende al limite finito **a** se preso un intorno piccolo di **a** (largo ε) da un certo termine a_k in poi tutti i termini della successione cadono dentro tale intorno

Esempio: considero la successione

$-8, +4, -2, +1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4} \dots\; (-\frac{1}{2})^{n-4}, \dots\dots$

Se vuoi vedere perche' il termine generico e' $(-\frac{1}{2})^{n-4}$. Ecco:

Come dal termine generico ricavo i termini della successione e viceversa

Abbiamo considerato la successione:
-8, +4, -2, +1, -½, +¼.... $(-½)^{n-4}$, ...
Considero il termine generico:
$a_n = (-½)^{n-4}$
mostriamo prima che sostituendo ad n i valori naturali nel termine generico possiamo ottenere i vari termini della successione

---

Nota: ti ricordo che per elevare una frazione a potenza negativa si puo' elevare l'inverso della frazione a potenza positiva e l'inverso di **½** e' **2/1** cioe' **2**

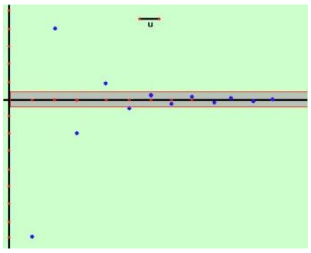
Poi facciamo il contrario, vediamo come dai primi termini possiamo costruire il termine generico

- Dal termine generico alla successione
  abbiamo il termine genrico **$a_n = - (-½)^{n-4}$**
  sostituiamo ad n i valori **1, 2, 3, 4,.....**
  sostituisco **1** $a_1 = (-½)^{1-4} = (-½)^{-3} = (-2)^3 = -8$
  sostituisco **2** $a_2 = (-½)^{2-4} = (-½)^{-2} = 2^2 = +4$
  sostituisco **3** $a_3 = (-½)^{3-4} = (-½)^{-1} = (-2)^1 = -2$
  sostituisco **4** $a_n = (-½)^{4-4} = - (-½)^0 = +1$
  ....
- Dalla successione al termine generico
  ho la successione
  -8, +4, -2, +1, -½, +¼....
  Noto che ogni termine si ottiene dividendo il precedente per **2**, quindi dovro' moltiplicare per **$½^k$**; inoltre i segni sono alternati, quindi ad ogni termine dovro' associare **$(-1)^k$** in modo che se **k** e' positivo il segno diventi positivo, mentre se **k** e' negativo ottengo il segno meno. Per semplicita' metto assieme **$½^k$** e **$(-1)^k$** scrivendo **$(-½)^k$**
  Siccome il primo termine deve risultare **-8**, per partire dal valore **k=1** metto come esponente **k-4** in modo che, quando **k=1** elevo la base **(-½)** a **-3** ed ottengo
  $(-½)^{1-4} = (-½)^{-3} = (-2)^3 = -8$
  quindi il termine generico sara'
  $a_k = (-½)^{k-4}$

  Naturalmente e' possibile trovare il termine generico in forme diverse, ma equivalenti: ad esempio, potevo considerare come termine generico
  $a_k = 8\cdot(-½)^k$
  oppure, se per i valori di **k** considero **k=0,1,2,...** allora il mio termine generico puo' diventare
  $a_k = -8\cdot(-½)^k$
  Io preferisco le forme forme semplici, in cui, per **k=1** si evidenzi bene il primo termine, nel nostro caso **-8**
  Comunque l'importante e' ottenere sempre gli stessi termini

---

Se guardi la figura a destra vedi che gia' prendendo come valore di **ε** sulle ordinate circa **±1/2** gia' il termine **1/4** della successione cade dentro la striscia colorata come tutti i termini successivi, che si avvicinano tanto a **0** che non posso nemmeno disegnarli



La successione tende a **0** perche' se considero un numero piccolo, tipo **1/1000** (un millesimo) esiste un termine della successione oltre il quale tutti i termini cadono a meno di un millesimo da **0**

tale termine sara' 1/512; il termine successivo 1/1024 e' piu' vicino a zero di un millesimo come tutti i termini seguenti

Ti scrivo i primi 15 termini della successione, cosi' puoi verificare da solo

$$-8, +4, -2, +1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, +\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, +\frac{1}{64}, -\frac{1}{128}, +\frac{1}{256}, -\frac{1}{512}, +\frac{1}{1024}, -\frac{1}{2048}, \ldots$$

Il tal caso diremo che il limite e' finito e scriviamo:
$\lim_{k\to\infty} a_k = a$
Nel nostro caso la successione considerata ha valore **0**
Poiche' possiamo indicarla come **$-8\cdot(-½)^{k-1}$** potremo scrivere:
$\lim_{k\to\infty} -8\cdot(-½)^{k-4} = 0$

Da notare che per indicare il termine generico dello sviluppo della successione uso la lettera **n**, mentre per fare il limite del termine generico uso la lettera **k**.
E' una pignoleria, pero' cosi' indico in modo diverso due cose diverse

b) Limite infinito di una successione

Diremo che una successione:
$a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_k, \ldots$
tende al limite infinito ∞ se preso un intorno di ∞ da un certo termine a_k in poi tutti i termini della successione cadono dentro tale intorno.

Anche qui e' possibile dare una definizione di limite piu' "algebrica"che puo' essere meglio utilizzata negli esercizi

Definizione
Diremo che la successione
$a_1, a_2, \ldots\ a_n, \ldots$
tende al **limite infinito** ∞ se considerato un numero **M** positivo grande a piacere, esiste in sua corrispondenza un numero $k_M \in N$ tale che quando $|a_n| > M$ abbiamo $n > k_M$
In simboli:
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| > M \ \Rightarrow \ n > k_M$

Esempio: considero la successione
¼, ½, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,..... 2^{n-3}, ...
Se vuoi vedere perche' il termine generico e' 2^{n-3}. Ecco:
Come dal termine generico ricavo i termini della successione e viceversa
Abbiamo considerato la successione:
¼, ½, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,..... 2^{n-3}, ...
Considero il termine generico:
$a_n = 2^{n-3}$
Anche qui mostriamo prima che sostituendo ad n i valori naturali nel termine generico possiamo ottenere i vari termini della successione poi facciamo il contrario, vediamo come dai primi termini possiamo costruire il termine generico

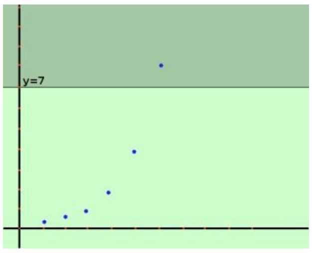
---

Nota: ti ricordo che per elevare una frazione a potenza negativa si puo' elevare l'inverso della frazione a potenza positiva e l'inverso di **2** e' **½**

- Dal termine generico alla successione
  abbiamo il termine generico $a_n = 2^{n-3}$
  sostituiamo ad n i valori **1, 2, 3, 4,.....**
  sostituisco **1** $\quad a_1 = 2^{1-3} = 2^{-2} = (½)^2 = ¼$
  sostituisco **2** $\quad a_2 = 2^{2-3} = 2^{-1} = ½^1 = ½$
  sostituisco **3** $\quad a_3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1$
  sostituisco **4** $\quad a_n = 2^{4-3} = 2^1 = 2$
  ....
- Dalla successione al termine generico
  ho la successione
  ¼, ½, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,.....
  Noto che ogni termine si ottiene moltiplicando il precedente per **2**, quindi dovro' moltiplicare per 2^k;
  Siccome il primo termine deve risultare **¼**, per partire dal valore **k=1** metto come esponente **k-3** in modo che, quando **k=1** elevo la base **¼** a **-2** ed ottengo
  $2^{1-3} = 2^{-2} = ½^2 = ¼$
  quindi il termine generico sara'
  $a_k = 2^{k-3}$

  Naturalmente e' possibile trovare il termine generico in forme diverse, ma equivalenti: ad esempio, potevo considerare come termine generico
  $a_k = ¼ \cdot 2^{k-1}$

Io preferisco le forme semplici e in cui, per **k=1** si evidenzi bene il primo termine, nel nostro caso **¼**
Comunque l'importante e' ottenere sempre gli stessi termini



Se guardi la figura a destra vedi che gia' prendendo come valore dell'intervallo sulle ordinate **y>7** gia' il termine **8** della successione cade dentro la striscia colorata come tutti i termini successivi, che si avvicineranno sempre piu' a **+∞**

La successione tende a **+∞** perche' se considero un numero grande, tipo **1000** esiste un termine della successione oltre il quale tutti i termini cadono oltre la striscia **y>1000**

Tale termine sara' 512; il termine successivo 1024 e' oltre 1000 come tutti i termini seguenti

Ti scrivo i primi 15 termini della successione, cosi' puoi verificare da solo

¼, ½, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 1024, 2048, 4096, 8192, ...

Il tal caso diremo che la nostra successione ha limite infinito e scriviamo

$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$

nel nostro caso la successione considerata converge al valore **+∞**
Poiche' possiamo indicarla come 2^{k-3} potremo scrivere

$\lim_{k\to\infty} 2^{k-3} = +\infty$

c) Casi possibili

Come abbiamo visto in analisi sul limite di funzioni, anche qui e' possibile catalogare un po' tutti i casi di convergenza e divergenza (intuitivamente, considerando solo i casi per x→∞, per avere alcuni casi potremo sostituire alla funzione un suo punto corrispondente ad intervalli regolari sull'asse delle x)
Come esercizio di logica proviamo a considerare i casi possibili con accanto il grafico relativo

- limite finito
- limite infinito

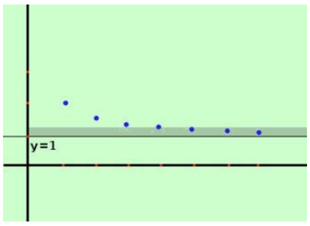
- Tipi di successioni a limite finito

Per capirci meglio nei grafici delle successioni introduciamo il concetto di asintoto orizzontale come retta orizzontale cui si avvicinano sempre piu' i termini della successione senza mai toccarla;
Per ogni esempio abbiamo varie possibilita': il limite **a** puo' essere positivo, negativo o nullo: l'asintoto orizzontale **y = a** sara' sopra, sotto oppure coincidera' con l'asse delle x: per avere ogni possibilita' bastera' alzare od abbassare la figura rispetto all'orizzontale

Distinguiamo i casi:

- **Successione decrescente con limite finito**

  Esempio: consideriamo



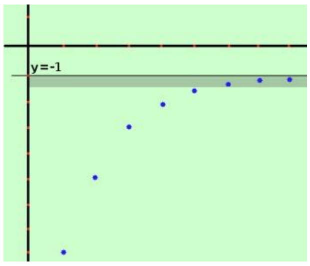
$2\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{4}{3}\,,\ \frac{5}{4}\,, \ldots\ldots\ \frac{n+1}{n}\,,\ \ldots$

Essa ha come limite il valore **1**: i suoi termini si avvicinano al valore **1** decrescendo

Da un certo momento in poi tutti i termini della successione sono contenuti nella striscia colorata (intorno superiore di **1** che posso restringere quanto voglio), quindi posso scrivere

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

- **Successione crescente con limite finito**
  Esempio: consideriamo



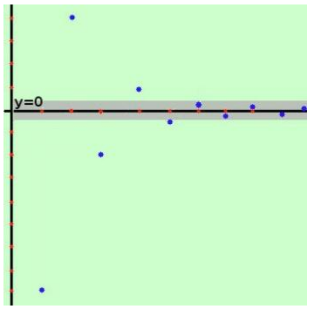
$-9,\ -5,\ -3,\ -2\,,\ -\frac{3}{2}\,,\ -\frac{5}{4}\,,\ -\frac{7}{8}\,, \ldots\ldots\ -(½)^{k-4}-1\,,\ \ldots$

Essa ha come limite il valore **-1**: i suoi termini si avvicinano al valore **-1** decrescendo

Da un certo momento in poi tutti i termini della successione sono contenuti nella striscia colorata (intorno inferiore di **-1** che posso restringere quanto voglio), quindi posso scrivere

$$\lim_{k\to\infty} -(½)^{k-4} -1 = -1$$

- **Successione oscillante a limite finito**

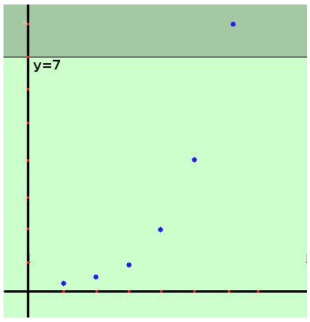


Esempio: prendiamo la successione gia' considerata

$-8, +4, -2, +1, -½, +¼\ldots\ (-½)^{n-4}, \ldots$

Essa ha come limite il valore **0**:
i suoi termini si avvicinano al valore **0** sia dall'alto che dal basso (oscillando)

Da un certo momento in poi tutti i termini della successione sono contenuti nella striscia colorata (intorno completo di **0** che posso restringere quanto voglio), quindi posso scrivere
$\lim_{k\to\infty} (-½)^{k-4} = 0$



- Tipi di successioni a limite infinito

Distinguiamo i casi

- **Successione crescente a limite infinito**

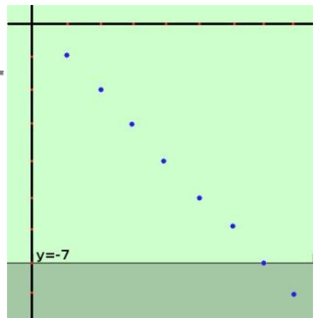
Esempio: consideriamo

$¼,\ ½,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots\ 2^{n-3}, \ldots$

Essa tende a **+∞**: i suoi termini si avvicinano al valore **+∞** crescendo

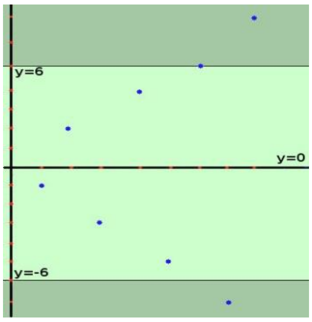
Da un certo momento in poi tutti i termini della successione sono contenuti nella striscia colorata (intorno di **+∞** che posso spingere verso l'alto quanto voglio: qui ho preso il valore +7 come bordo della striscia), quindi posso scrivere
$\lim_{k\to\infty} 2^{k-3} = +\infty$

- **Successione decrescente a limite infinito**
  Esempio: consideriamo la successione semplicissima



-1, -2, -3, -4, -5, ... -n, ...
Essa tende al valore **-∞**: i suoi termini si avvicinano al valore **-∞** decrescendo
Da un certo momento in poi tutti i termini della successione sono contenuti nella striscia colorata (intorno di **-∞** che posso spostare in basso quanto voglio: qui ho preso il valore -7 come bordo della striscia), quindi posso scrivere
$\lim_{k\to\infty} -k = -\infty$

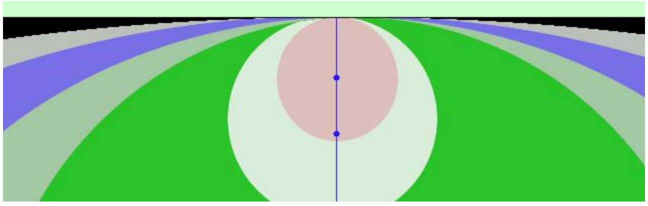
- **Successione oscillante tendente ad infinito**
  Esempio: prendiamo la successione
  -1, +2, -3, +4, -5, +6, -7, +8, ... n·(-1)ⁿ, ...
  Essa tende al valore **∞** (senza segno):
  i suoi termini si avvicinano al valore **∞** sia verso l'alto che verso il basso (oscillando)
  Da un certo momento in poi tutti i termini della successione sono contenuti nella striscia colorata (intorno completo di **∞** che posso spostare verso infinito quanto voglio), quindi posso scrivere
  $\lim_{k\to\infty} k\cdot(-1)^k = \infty$
  Approfondimento: perche' l'intorno di infinito (senza segno) e' fatto da due strisce, una verso l'alto ed una verso il basso. Ecco:



Perche' l'intorno di infinito (senza segno) e' fatto da due strisce, una verso l'alto ed una verso il basso

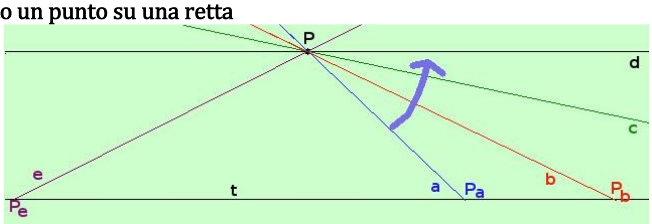
La cosa deriva da due fatti

1. **La retta puo' essere considerata come una circonferenza di raggio infinito**



Se prendo l'insieme delle circonferenze passanti per un punto e, tenendo fisso il punto ne aumento il raggio ottengo la figura qui sopra: la circonferenza che corrisponde al cerchio nero ha il raggio infinito e coincide con la retta tangente a tutte le circonferenze

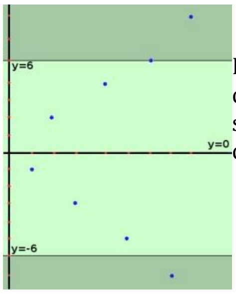
2. **∞ puo' essere considerato un punto su una retta**



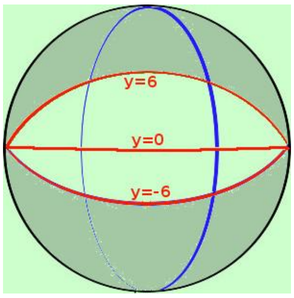
Considero la retta **t** ed il punto **P** esterno ad essa
Dal punto P posso tracciare delle rette come **a** che taglia **t** in P_a, se faccio ruotare la retta **a**otterro' ad esempio **b** che taglia **t** in P_b.
Continuando a ruotare vedo che il punto di intersezione si allontana verso destra finche' la retta diventa parallela ed il punto sparisce; ma basta che io ruoti ancora leggermete la retta parallela perche' il punto di intersezione ricompaia a sinistra: continuando a ruotare otterro' la retta **e** che taglia **t** in P_e

Per questo motivo si dice che due rette parallele hanno in comune un punto all'infinito, e chiamero' tale punto **∞**

Ne segue che ogni retta possiede un punto all'infinito



Da questi due fatti, per analogia con quanto fatto sulla retta, segue che, se considero un piano, esso puo' essere considerato come una superficie sferica di raggio infinito e le rette possono essere considerate come dei meridiani



Allora, quando considero un intorno di infinito ottengo tutta le sfera meno un fuso (la superficie di uno spicchio).
L'intorno di infinito nell'ultimo esempio della pagina precedente, qui riprodotto a sinistra e' la zona colorata in grigio nella figura di destra.

---

4. Successione infinitesima

Diremo che la successione:

$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$

e' **infinitesima** se ammette come limite **0**

cioe' ,se preso un numero **ε** piccolo a piacere, tutti i termini della successione distano da **0** per meno di **ε** per ogni **n** superiore ad un numero $k_\varepsilon \in N$ dipendente da **ε** .

In simboli:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| < \varepsilon \ \Rightarrow \ n > k_\varepsilon$

Esempio:

Verifico che la successione:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\cdots\ \frac{1}{2^n}\cdots$$

tende a zero.

Se considero un mumero piccolissimo **ε**, devo mostrare che esiste un legame fra **ε** e l'indice **n** tale che piu' diminuisce **ε** piu' aumenta **n.**

Dimostriamo che da un certo momento in poi, se **n** e' grande, vale:

$$\left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon$$

tolgo il modulo essendo l'altro termine certamente positivo come potenza di un numero positivo e l'espressione precedente equivale a:

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

mcm e tolgo il denominatore: essendo tutti i numeri positivi la disuguaglianza conserva il verso; ottengo:

$1 < \varepsilon \cdot 2^n$

Ricavo **n:**

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

per ricavare l'esponente passo ai logaritmi :

$$n = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$$

questa espressione e' equivalente alla prima.

Essendo **ε** molto piccolo segue che **1/ε** e' molto grande ed anche il logaritmo in base due di un numero molto grande e' molto grande e piu' diminuisce **ε** piu' aumenta il valore del logaritmo

come volevamo

Senza farne la dimostrazione diciamo che vale la seguente affermazione:

Se la successione

$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ldots\ldots\ldots \ a_n, \ \ldots\ldots$

converge al valore a allora la successione

a_1-a, a_2-a, a_3-a, a_4-a, ... a_n-a, ...
e' infinitesima

e vale anche il viceversa:

Se la successione
a_1-a, a_2-a, a_3-a, a_4-a, ... a_n-a, ...
e' infinitesima allora la successione
a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n, ...
converge al valore a

---

5. Convergenza di una successione

Diremo che la successione:
a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...
e' **convergente** se ammette limite finito.
Le espressioni "successione a limite finito" e "successione convergente" sono equivalenti: ma e' piu' semplice dire "convergente" piuttosto che"tende ad un valore finito", quindi d'ora in avanti useremo tale termine; cioe', se preso un numero **ε** piccolo a piacere, esiste in sua corrispondenza un numero **$k_\varepsilon \in N$** e dipendente da **ε** tale che quando i termini della successione distano dal limite **a** per meno di **ε** allora ogni **n** e'superiore a **k_ε**.
In simboli:
$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon \;\Rightarrow\; n > k_\varepsilon$
Se una successione non converge allora puo' divergere.
Pero' se non converge e non diverge diremo che la successione e' **indeterminata** .

Se la successione:
a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...
converge ad **a,** allora la successione:
a_1-a, a_2-a, a_3-a, ... a_n-a, ...
e' infinitesima.
Vale anche il viceversa.
Se la successione:
a_1-a, a_2-a, a_3-a, ... a_n-a, ...
e' infinitesima allora la successione:
a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...
converge ad **a.**

Esercizio:
verifichiamo che la successione:
$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$
converge ad 1.
Utilizzo la definizione di limite:
Se considero un numero piccolissimo **ε**, devo mostrare che esiste un legame fra **ε** e l'indice **n** tale che piu' diminuisce **ε** piu' aumenta **n.**
Dimostriamo che da un certo momento in poi, se **n** e' grande, vale:

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

Eseguo la somma dentro il modulo: m.c.m. = n:

$$\left|\frac{n+1-n}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

essendo n un numero naturale, considerato all'interno dei numeri reali e' certamente positivo e quindi posso togliere il modulo ed ottengo:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Utilizzo la proprieta' **Se in una disuguaglianza considero gli inversi allora la disuguaglianza cambia di verso** ed ottengo:

$$n < \frac{1}{\varepsilon}$$

Questa espressione e' equivalente alla prima.
Essendo ε molto piccolo segue che $1/\varepsilon$ e' molto grande ed, essendo $n>1/\varepsilon$ piu' diminuisce ε piu' aumenta il valore di **n.**
Come volevamo.

6. Divergenza di una successione

Diremo che la successione:
$a_1, \; a_2, \; a_3, \; ..... \; a_n, \; .....$
e' **divergente** se ammette limite infinito.
Le espressioni "successione a limite infinito" e "successione divergente" sono equivalenti: ma e' piu' semplice dire "divergente" piuttosto che"tende ad infinito", quindi d'ora in avanti useremo tale termine; cioe', se preso un numero positivo **M** grande a piacere, esiste in sua corrispondenza un numero $k_M \in N$ e dipendente da **M** tale che quando il valore (in modulo) dei termini della successione supera il valore **M,** allora ogni **n** e'superiore a k_M.
In simboli:
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| > M \;\Rightarrow\; n > k_M$

Se la successione:
$a_1, \; a_2, \; a_3, \; ..... \; a_n, \; .....$
e' divergente allora la successione inversa:

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$$

e' infinitesima.
Vale anche il viceversa; se la successione:
$a_1, \; a_2, \; a_3, \; ..... \; a_n, \; .....$
e' infinitesima, allora la successione inversa:

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$$

e' divergente.

Esempio 1 (successione crescente a limite piu' infinito)
Verifichiamo che la successione:

¼, ½, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,..... 2^{n-3}, ...
diverge a $+\infty$.
Utilizzo la definizione di limite:
Se considero un numero positivo molto grande **M**, devo mostrare che esiste un legame fra **M** e l'indice **n** tale che piu' aumenta **M** piu' aumenta **n.**
Da un certo momento in poi, se **n** e' grande, vale:
$|2^{n-3}| > M$
Il primo termine e' una potenza a base positiva e quindi e' certamente positivo; allora posso togliere il modulo:
$2^{n-3} > M$
per ricavare l'esponente passo ai logaritmi a base 2: essendo entrambe le funzioni monotone crescenti la disuguaglianza si conserva
$\log_2 2^{n-3} > \log_2 M$
Logaritmo e potenza si elidono
$n-3 > \log_2 M$
porto -3 dall'altra parte ed ottengo
$n > +3 + \log_2 M$
questa espressione e' equivalente alla prima
Essendo **M** molto grande segue che anche $3 + \log_2 M$ e' molto grande ed essendo $n > 3 + \log_2 M$ e piu' aumenta **M** piu' deve aumentare il valore di **n**
come volevamo

Esempio 2 (successione decrescente a limite meno infinito)
verifichiamo che la successione
-1, -2, -3,......,-n,.....
diverge a $-\infty$
(e' un esempio banale, facciamolo per vedere come comportarci, in generale, con il modulo)
Utilizzo la definizione di limite:
Se considero un mumero molto grande **M**, devo mostrare che esiste un legame fra **M** e l'indice **n** tale che piu' aumenta **M** piu' aumenta **n.**
Da un certo momento in poi, se **n** e' grande, vale:
$|a_n| > M$ cioe'
$|-n| > M$
Avendo un modulo posso scomporre la disequazione nell'insieme di disequazioni
$-n > M$ e $-n < -M$
Essendo **M** positivo la prima disequazione non ha soluzioni
La seconda (moltiplicando per -1, numero negativo, la disequazione cambia di verso) mi da'
$n > M$
quindi
Essendo **M** molto grande segue che anche **n** e' molto grande e piu' aumenta **M** piu' deve aumentare il valore di **n**
come volevamo

Esempio 3 (successione oscillante a limite infinito)
verifichiamo che la successione
-1, +2, -3, +4, -5, +6, -7, +8, ... $n\cdot(-1)^n$, ... diverge ad ∞
Utilizzo la definizione di limite:
Se considero un mumero positivo molto grande **M**, devo mostrare che esiste un legame fra **M** e l'indice **n** tale che piu' aumenta **M** piu' aumenta **n.**
Da un certo momento in poi, se **n** e' grande, vale:
$|n\cdot(-1)^n| > M$
Avendo un modulo posso scomporre la disequazione nell'insieme di disequazioni
$n\cdot(-1)^n > M$ e $n\cdot(-1)^n < -M$

- Considero la prima disequazione:
  $n\cdot(-1)^n > M$
  Essa e' valida solamente quando n e' un numero pari, essendo $(-1)^n=+1$, ed in tal caso posso sostituirla con
  $n > M$

- Considero la seconda disequazione:
  $n\cdot(-1)^n < -M$
  Essa e' valida solamente quando n e' un numero dispari, essendo $(-1)^n=-1$, ed in tal caso posso sostituirla con
  $-n < -M$

Considerando i risultati di entrambe le disequazioni ottengo un intorno completo di ∞
Quando **M** e' molto grande segue che sia **n** che **-n** sono molto grandi e piu' aumenta **M** piu' deve aumentare il valore assoluto di **n** cioe' **n** aumenta e **-n** diminuisce fornendo valori di a_n in un intorno completo di ∞ .
Come volevamo.
Per avere una rappresentazione grafica guarda la terza e quarta figura di questa pagina sostituendo al valore **6** il termine **M**

7. Successioni aventi lo stesso carattere

Data la successione:
$a_1, \; a_2, \; a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$
diremo che la successione:
$a_{n+1}, \; a_{n+2}, \; a_{n+3}, \ldots\ldots\ldots$
e' una successione avente lo stesso **carattere** della successione di partenza, cioe' un "togliendo" i primi termini ad una successione ottengo ancora una successione e le due successioni hanno lo stesso **carattere** nel senso che si conserva sia la convergenza ad un valore dato, sia la divergenza.
(Ammettono lo stesso limite)

Esempio: consideriamo la successione:
$\frac{1}{4}, \; \frac{1}{2}, \; 1, \; 2, \; 4, \; 8, \; 16, \; 32;, \ldots\ldots 2^{n-3}, \ldots$
la successione:
$1, \; 2, \; 4, \; 8, \; 16, \; 32;, \ldots\ldots 2^{n-1}, \ldots$
ottenuta dalla precedente eliminando i primi due termini ha lo stesso carattere della precedente, cioe', come la precedente tende a $+\infty$
$\lim_{n\to\infty} 2^{n-3} = +\infty = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}$
cosi' anche la successione:
$16, \; 32, \; 64, \ldots\ldots 2^{n+3}, \ldots$
ottenuta dalla prima eliminando i primi 6 termini ha lo stesso carattere della prima:
$\lim_{n\to\infty} 2^{n-3} = +\infty = \lim_{n\to\infty} 2^{n+3}$

8. Operazioni sulle successioni

Data la successione
$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \ldots\ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$
diremo che la sua **opposta** e' la stessa successione i cui termini sono cambiati di segno
$-a_1, \; -a_2, \; -a_3, \; -a_4, \ldots\ldots\ldots -a_n, \ldots\ldots$
Invece chiameremo **inversa** la successione i cui termini sono inversi dei termini della successione di partenza:
$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$$
Vediamo rapidamente le principali operazioni che possiamo fare sulle successioni:

a) Somma di successioni

Siano date la successione **a:**
$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \ldots\ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$
e la successione **b:**
$b_1, \; b_2, \; b_3, \; b_4, \ldots\ldots\ldots b_n, \ldots\ldots$
Chiameremo **successione somma** delle successioni **a** e **b** la successione **a+b** data da:
$a_1+b_1, \; a_2+b_2, \; a_3+b_3, \; a_4+b_4, \ldots\ldots\ldots a_n+b_n, \ldots\ldots$
Cioe' ogni termine e' la somma dei termini di posto corrispondente delle due successioni.
Enunciamo alcune proprieta':

- La somma di due successioni infinitesime e' ancora una successione infinitesima
- La somma di una successione divergente con una successione limitata e' una successione divergente
- Invece la somma di due successioni divergenti puo' essere una successione convergente, divergente od anche indeterminata
  Siccome il fatto non e' intuitivo facciamo degli esempi
  1. Sommando una successione divergente
     2, 4, 8, 16, ... 2^n, ...
     con una successione divergente (cambio di segno la precedente ed aggiungo 2)
     2-2, 2-4, 2-8, 2-16, ... $2-2^n$, ...
     la scrivo meglio
     0, -2, -6, -14, ... $2-2^n$, ...
     ottengo la successione costante
     2, 2, 2, 2, ...2, ...
     che, naturalmente, converge a **2**
  2. Sommando la successione divergente
     2, 4, 8, 16, ... 2^n, ...
     con la successione divergente
     1, 2, 3, 4, ...n, ...
     ottengo la succesione divergente
     3, 6, 11, 20, ... $n+2^n$, ...
  3. Sommando la successione divergente
     2, 4, 8, 16, ... 2^n, ...
     con la successione divergente
     -1, -2, -3, -4, ...2^n-n, ...
     ottengo la successione indeterminata:
     1, 2, 5, 12, ... 1, ...
     e' indeterminata perche' non so dire, per ora, se tende ad infinito o ad un valore finito

b) Differenza di successioni

Date la successione **a:**
a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n, ...
e la successione **b:**
b_1, b_2, b_3, b_4, ... b_n, ...
Chiameremo **successione differenza** delle successioni **a** e **b** la successione **a-b** data da:
a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, a_4-b_4, ... a_n-b_n, ...
Cioe' ogni termine e' la differenza dei termini di posto corrispondente delle due successioni.
Enunciamo alcune proprieta':

- la differenza fra due successioni aventi lo stesso limite e' infinitesima
  Cioe' se:
  $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = a$
  allora la successione:
  a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, a_4-b_4, ... a_n-b_n, ...
  e' infinitesima.
- La differenza di due successioni infinitesime e' ancora una successione infinitesima.
- La differenza di una successione divergente con una successione limitata e' una successione divergente.
- Invece la differenza di due successioni divergenti puo' essere una successione convergente, divergente od anche indeterminata.
  Facciamo anche qui degli esempi facendo riferimento a quelli sulla somma nella pagina precedente:
  1. Eseguendo la sottrazione fra la successione divergente:
     2, 4, 8, 16, ... 2^n, ...
     con la successione divergente (cambio di segno la precedente ed aggiungo 2):
     2-2, 2-4, 2-8, 2-16, ... $2-2^n$, ...
     la scrivo meglio:
     0, -2, -6, -14, ... $2-2^n$, ...
     ottengo la successione costante:
     -2, -2, -2, -2, ...-2, ...
     che, naturalmente, converge a **-2**
  2. Eseguendo la sottrazione fra la successione divergente:
     2, 4, 8, 16, ... 2^n, ...
     e la successione divergente:
     -1, -2, -3, -4, ...-n, ...

ottengo la successione divergente:
3, 6, 11, 20, ... 2^n+n, ...

3. Eseguendo la sottrazione fra la successione divergente:
-2, -4, -8, -16, ... -2^n, ...
e la successione divergente:
-1, -2, -3, -4, ... -n, ...
ottengo la successione indeterminata:
-1, -2, -5, -12, ...$n-2^n$, ...
e' indeterminata perche' non so dire, per ora, se tende ad infinito o ad un valore finito.

c) Prodotto di successioni

Date la successione **a:**
a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n, ...
e la successione **b:**
b_1, b_2, b_3, b_4, ... b_n, ...
Chiameremo **successione prodotto** delle successioni **a** e **b** la successione **a·b** data da:
$a_1 \cdot b_1$, $a_2 \cdot b_2$, $a_3 \cdot b_3$, $a_4 \cdot b_4$, ... $a_n \cdot b_n$, ...
Cioe' ogni termine e' il prodotto dei termini di posto corrispondente delle due successioni.
Enunciamo alcune proprieta':

- Il prodotto di due successioni infinitesime e' ancora una successione infinitesima
- Il prodotto di due successioni divergenti e' ancora una successione divergente
- il prodotto di una successione divergente con una successione limitata e' una successione divergente
- Invece il prodotto di una successione divergente con una successione infinitesima e' una successione indeterminata
  Nel senso che, per ora, non possiamo dire se converge, oppure diverge.

d) Quoziente di successioni

Date la successione **a:**
a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n, ...
e la successione (non infinitesima) **b:**
b_1, b_2, b_3, b_4, ... b_n, ...
Chiameremo **successione quoziente** delle successioni **a** e **b** la successione **a/b** data da:

$$\frac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{b_1}}, \frac{\mathbf{a_2}}{\mathbf{b_2}}, \frac{\mathbf{a_3}}{\mathbf{b_3}}, \frac{\mathbf{a_4}}{\mathbf{b_4}}, \dots, \frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_n}}, \dots$$

Cioe' ogni termine e' il quoziente dei termini di posto corrispondente delle due successioni.
Enunciamo alcune proprieta'.

E' indeterminato il risultato di questi diversi quozienti:

- quoziente di due successioni infinitesime
- Il quoziente di due successioni divergenti
- Il quoziente di una successione divergente con una successione infinitesima
  Sempre nel senso che, per ora, non possiamo dire se converge, oppure diverge,
  cioe' il quoziente e' indeterminato nei seguenti casi
  0/0 , ∞/∞ , ∞/**0** ,
  intendendo con **0** una successione infinitesima e con ∞ una successione divergente.

E' invece determinato il quoziente nei seguenti casi:

- il quoziente di una successione divergente con una successione limitata e' una successione divergente.
- Il quoziente di una successione limitata con una successione divergente e' una successione infinitesima.
- Il quoziente di una successione infinitesima con una successione limitata e' una successione infinitesima.
- Il quoziente di una successione infinitesima con una successione divergente e' una successione infinitesima.

9. Operazioni sui limiti finiti di successioni

Vediamo ora di approfondire il comportamento dei limiti delle successioni convergenti rispetto alle quattro operazioni.

a) Somma di limiti di successioni convergenti

Se le successioni:
$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\dots\dots a_n, \dots\dots$
e
$b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\dots\dots b_n, \dots\dots$
sono convergenti allora anche la loro somma converge e il limite della loro somma e' uguale alla somma dei limiti:
$\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

Per esercizio proviamo a dimostrarlo.
Supponiamo di avere:
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$
allora le successioni:
$a_1\text{-}a,\ a_2\text{-}a,\ a_3\text{-}a, \dots\dots a_n\text{-}a, \dots\dots$ e $b_1\text{-}b,\ b_2\text{-}b,\ b_3\text{-}b, \dots\dots b_n\text{-}b, \dots\dots$
sono infinitesime per la proprieta' gia' vista (Successione convergente)
Ma abbiamo anche visto che la somma di due successioni infinitesime e' infinitesima, quindi e' infinitesima la successione:
$a_1\text{-}a + b_1\text{-}b,\ a_2\text{-}a + b_2\text{-}b,\ a_3\text{-}a + b_3\text{-}b, \dots\dots a_n\text{-}a + b_n\text{-}b, \dots\dots$
per la proprieta' associativa posso scrivere:
$(a_1 + b_1) - (a+b),\ (a_2 + b_2) - (a+b),\ (a_3 + b_3 - (a+b), \dots\dots (a_n + b_n) - (a+b), \dots\dots$
essendo questa infinitesima ne deriva che la successione:
$(a_1 + b_1),\ (a_2 + b_2),\ (a_3 + b_3, \dots\dots (a_n + b_n), \dots\dots$
tende ad $a+b$, quindi $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = a+b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
Come volevamo.

Per essere proprio precisi dovremmo lavorare con i moduli per non aver problemi con i segni, ma, almeno per ora, accontentiamoci ....

b) Differenza di limiti di successioni convergenti

Se le successioni:
$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\dots\dots a_n, \dots\dots$
e
$b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\dots\dots b_n, \dots\dots$
sono convergenti allora anche la loro differenza converge e il limite della loro differenza e' uguale alla differenza dei limiti:
$\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$

Per la dimostrazione basta pensare che vale
$\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} [a_n + (-b_n)]$
e che vale anche
$\lim_{n\to\infty} (-b_n) = - \lim_{n\to\infty} b_n$

c) Prodotto di limiti di successioni convergenti

Se le successioni:
$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\dots\dots a_n, \dots\dots$
e
$b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\dots\dots b_n, \dots\dots$
sono convergenti allora anche il loro prodotto converge e il limite del loro prodotto e' uguale al prodotto dei limiti:
$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

Per esercizio, proviamo a dimostrarlo; pero' qui ci vogliono i moduli e precisamente il teorema sui moduli che dice:
il modulo di una somma e' minore od uguale alla somma dei moduli degli addendi:

$|x+y| \leq |x|+|y|$
Supponiamo di avere:
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$
Devo dimostrare che **ab** e' il limite di $a_n \cdot b_n$, considero:
$|a_n \cdot b_n - ab| =$
devo mostrare che e' infinitesimo; tolgo e aggiungo il termine ab_n
$|a_n \cdot b_n - ab| = |a_n \cdot b_n - a\, b_n + a\, b_n - ab|$
per il teorema sui moduli posso scrivere:
$|a_n \cdot b_n - a\, b_n + a\, b_n - ab| \leq |a_n \cdot b_n - a\, b_n| + |a\, b_n - ab| =$
posso raccogliere:
$= |b_n \cdot (a_n - a)| + |a \cdot (b_n - a)| =$
essendo **a** il limite di a_n allora $|a_n - a|$ e' infinitesima ed essendo $|b_n \cdot (a_n - a)|$ prodotto di una successione limitata (b_n) con una successione infinitesima allora e' infinitesimo.
Stesso ragionamento per l'addendo $a \cdot (b_n - a)$:
essendo **b** il limite di b_n allora $|b_n - b|$ e' infinitesima ed essendo **a** un limite finito allora il suo prodotto con una successione infinitesima e' infinitesimo,
quindi il termine $|a_n \cdot b_n - ab|$ essendo minore od uguale di due infinitesimi e' anche lui infinitesimo e ne consegue che **ab** e' il limite di $a_n \cdot b_n$,. Come volevamo.

d) Quoziente di limiti di successioni convergenti

Se le successioni:
$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ a_n, \ldots\ldots$
e
$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\ldots\ b_n, \ldots\ldots$
sono convergenti e la seconda successione non ha termini nulli e non e' infinitesima, allora anche il loro quoziente converge e il limite del loro quoziente e' uguale al quoziente dei limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

Al solito, siccome non possiamo dividere per zero dobbiamo supporre che il denominatore sia sempre diverso da zero.

Per la dimostrazione basta pensare che vale:
se
$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\ldots\ b_n, \ldots\ldots$
e' una successione limitata e non infinitesima e con tutti i termini diversi da zero, allora anche la successione:

$$\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{b_n}, \ldots\ldots$$

e' limitata.
allora vale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$$

Quindi posso rifarmi al teorema sul limite del prodotto di successioni limitate.

10. Teoremi sui limiti di successioni

Raccogliamo qui alcuni teoremi sui limiti di successioni.

a) Teorema dell'unicita' del limite

Vale il teorema:

Una successione numerica reale se converge non puo' divergere, se diverge non puo' convergere e, quando converge, ammette un unico numero reale come limite

---

Come esercizio dimostriamo che:

Una successione numerica reale convergente ammette un unico numero reale come limite

Dimostrazione (per assurdo).
Supponiamo, per assurdo, che la successione:
$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ldots\ a_n\ \ldots$
converga a due numeri, cioe':
$\lim_{x\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{x\to\infty} a_n = b$ con **a** e **b** distinti.
Se i due numeri sono distinti allora avremo che i due valori **a** e **b** distano, sulla retta reale, per un valore η(eta).
Ma questo va contro il fatto che per ε io possa scegliere un numero piccolo a piacere: infatti non posso scegliere come ε un numero minore di $\eta/2$, cioe' minore della meta' della distanza fra **a** e **b** perche' allora il termine a_n o cade nell'intorno di **a** oppure cade nell'intorno di **b** e questo e' assurdo: come volevamo.

b) Teorema della permanenza del segno del limite di una successione

Vale il teorema:

Se una successione numerica reale converge ad un numero positivo, allora da un certo termine a_k in poi tutti i termini della successione sono positivi

logicamente vale anche:

Se una successione numerica reale converge ad un numero negativo, allora da un certo termine a_k in poi tutti tutti i termini della successione sono negativi

---

Come esercizio, dimostriamo il primo.
Supponiamo che la successione:
$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ldots\ a_n\ \ldots$
converga ad $a > 0$, cioe':
$\lim_{x\to\infty} a_n = a$ con $a > 0$
allora, essendo **a** positivo, esiste, sulla retta reale, un intorno di **a** in cui tutti i punti hanno valore positivo.
Data la definizione di limite:
$\lim_{x\to\infty} a_n = a \iff |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow n > k_\varepsilon$
considerando come ε la distanza da **a** ad uno di tali punti avremo che a_n cade in tale intorno e quindi a_n e' positivo come tutti i suoi termini successivi.
Come volevamo.

c) Conseguenze del teorema della permanenza del segno

Come prima conseguenza possiamo dire che vale:

Se una successione numerica reale ammette limite maggiore di un numero reale c, allora, da un certo termine in poi, tutti i suoi termini sono maggiori di c

Facendo riferimento alla rappresentazione cartesiana e' come se,rappresentato il teorema della permanenza del segno, ci mettessimo una retta orizzontale y=c, vedi ad esempio i primi grafici della ***Nota sotto riportata***: c potrebbe essere il bordo non marcato della striscia grigio-azzurra
abbiamo due possibilita'

- la successione e' decrescente: allora si trova piu' in alto di **c** e quindi tutti i suoi termini sono maggiori di c
- la successione e' crescente: allora ha i primi termini minori di **c**, un termine che, se esiste, e' uguale a **c**, e quindi tutti i suoi termini successivi che sono maggiori di **c**

e vale, analogamente:

Se una successione numerica reale ammette limite minore di un numero reale c allora, da un certo termine in poi, tutti i suoi termini sono minori di c

---

Il teorema della permanenza del segno ci permette anche di enunciare il seguente teorema utile per il confronto fra successioni:

Se una successione numerica reale ammette limite ed ha tutti i termini non negativi allora essa converge ad un numero positivo o nullo

Logicamente vale anche:

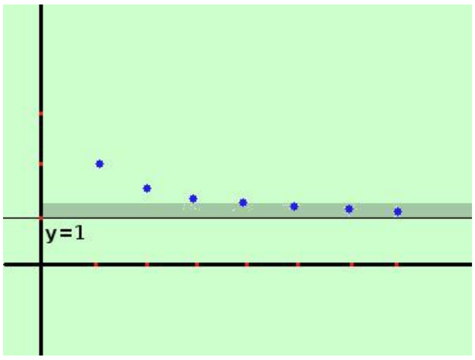
Se una successione numerica reale ammette limite ed ha tutti i termini non positivi allora essa converge ad un numero negativo o nullo

Infatti per il teorema della permanenza del segno i termini piu' "avanzati" della successione hanno lo stesso segno del limite e anche il limite deve avere lo stesso segno di tali termini; fa eccezione una successione che sia convergente a zero, perche' mentre tutti i termini "avanzati" della successione sono positivi (o negativi) il limite invece sara' zero che, notoriamente, non ha segno: Da qui la precisazione "positivo o nullo" ("negativo o nullo").

Nota: ***Tipi di successioni a limite finito***
Per capirci meglio, nei grafici delle successioni introduciamo il concetto di asintoto orizzontale come retta orizzontale cui si avvicinano sempre piu' i termini della successione senza mai toccarla.
Per ogni esempio abbiamo varie possibilita': il limite **a** puo' essere positivo, negativo o nullo: l'asintoto orizzontale **y = a** sara' sopra, sotto oppure coincidera' con l'asse delle x: per avere ogni possibilita' bastera' alzare od abbassare la figura rispetto all'orizzontale.

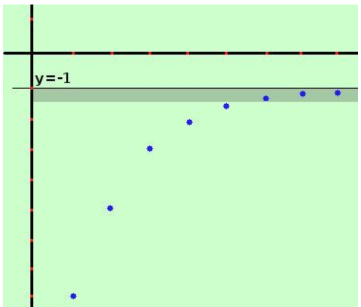
Distinguiamo i casi:

- *Successione decrescente con limite finito*

  Esempio. Consideriamo:
  $$\mathbf{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots}$$
  Essa ha come limite il valore **1**: i suoi termini si avvicinano al valore **1** decrescendo.
  Da un certo momento in poi tutti i termini della successione sono contenuti nella striscia colorata (intorno superiore di **1** che posso restringere quanto voglio), quindi posso scrivere:
  $$\mathbf{\log_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1}$$

- *Successione crescente con limite finito*
  Esempio. Consideriamo:

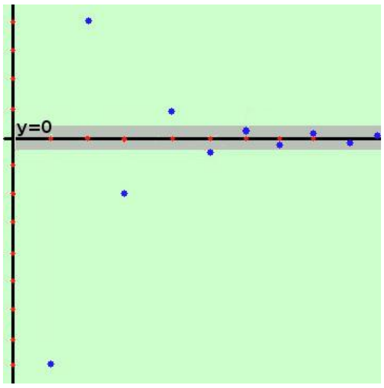
  

$$-9, -5, -3, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{8}, \dots, -(1/2)^{k-4} - 1, \dots$$

Essa ha come limite il valore **-1**: i suoi termini si avvicinano al valore **-1** decrescendo.
Da un certo momento in poi tutti i termini della successione sono contenuti nella striscia colorata (intorno inferiore di **-1** che posso restringere quanto voglio), quindi posso scrivere

$\lim_{k\to\infty} -(\frac{1}{2})^{k-4} - 1 = -1$

- *Successione oscillante a limite finito*



Esempio: prendiamo la successione gia' considerata
$-8, +4, -2, +1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4} \dots (-\frac{1}{2})^{n-4}, \dots$
Essa ha come limite il valore **0**:
i suoi termini si avvicinano al valore **0** sia dall'alto che dal basso (oscillando).
Da un certo momento in poi tutti i termini della successione sono contenuti nella striscia colorata (intorno completo di **0** che posso restringere quanto voglio), quindi posso scrivere:
$\lim_{k\to\infty} (-\frac{1}{2})^{k-4} = 0$

d) Teorema della minorante

Prima di enunciare il teorema introduciamo il concetto di **successione minorante** e **successione maggiorante.**
Date le successioni:
$a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots\dots \ a_n \ \dots\dots$ e $b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots\dots \ a_n \ \dots\dots$
se abbiamo:
$a_1 \le b_1 \quad a_2 \le b_2 \quad a_3 \le b_3 \quad \dots\dots \ a_n \le b_n \quad \dots\dots$
allora diremo che la prima successione e' una **minorente** della seconda e la seconda e' una **maggiorante** della prima.

Ora possiamo enunciare il teorema:

Consideriamo le due successioni $a_1, \ a_2, \ a_3, \dots\dots a_n, \dots$ e $b_1, \ b_2, \ b_3, , \dots\dots b_n \dots$ che abbiano limite finito; se la prima e' una minorante della seconda allora vale
$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

Per esercizio, dimostriamolo:
abbiamo le due successioni:
$a_1, \ a_2, \ a_3, \dots\dots a_n, \dots$ e $b_1, \ b_2, \ b_3, , \dots\dots b_n \dots$
tali che
$a_1 \le b_1 \quad a_2 \le b_2 \quad a_3 \le b_3 \quad \dots\dots \ a_n \le b_n \quad \dots\dots$
e sappiamo che vale
$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad$ con $a \ne b$
Se $a \ne b$ allora per definizione di limite posso trovare un ε abbastanza piccolo tale che i due intorni sulla retta reale $|a-\varepsilon|$ e $|b - \varepsilon|$ siano disgiunti quindi i termini "avanzati" di a_n si troveranno nel primo intorno ed i termini "avanzati" di b_n si troveranno nel secondo intorno quando l'indice $n > k_\varepsilon$ (essendo k_ε un numero naturale dipendente da ε).
Essendo i numeri reali del primo intorno minori dei numeri reali del secondo intorno ne segue la tesi

e) Teorema della maggiorante

analogamente possiamo dire:

Consideriamo le due successioni b_1, b_2, b_3, ... b_n, ... e a_1, a_2, a_3, , ... a_n .... che abbiano limite finito; se la prima e' una maggiorante della seconda allora vale
$\lim_{n\to\infty} b_n \geq \lim_{n\to\infty} a_n$

A cosa ci serve:
Quando abbiamo una successione c_n difficile da poter studiare, se riusciamo a trovarne una minorante a_n che converga ad **a** ed una maggiorante b_n che converga a **b**, allora sapremo che la successione c_n e' limitata ed il suo limite e' compreso fra **a** e **b**
$a \leq \lim_{n\to\infty} c_n \leq b$.

Possiamo comunque estendere tali teoremi alle successioni divergenti nel senso che, data una successione, se ne trovo una minorante che diverge a $+\infty$ allora anche la mia successione diverge a $+\infty$
Similmente se, data una successione, se ne trovo una maggiorante che diverge a $-\infty$ allora anche la mia successione diverge a $-\infty$.
Cosi' potremo verificare che la nostra successione e' divergente.

f) Teorema della minorante e maggiorante

Il seguente teorema e' l'equivalente del teorema "dei carabinieri" che viene studiato in analisi matematica.

Consideriamo le due successioni a_1, a_2, a_3, ... a_n, ... e b_1, b_2, b_3, , ... b_n .... che abbiano limite finito; considerata la successione c_1, c_2, c_3, ... c_n, ... tale che sia una maggiorante della prima ed una minorante della seconda allora avremo che anche questa successione converge e vale
$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$

In pratica quest'ultimo teorema sara' molto utile per gli esercizi: per mostrare che una successione converge ad un limite determinato bastera' (se ci riusciamo) trovarne una minorante ed una maggiorante che convergono a tale limite

11. Successioni monotone

Premettiamo i concetti:

- una successione e' **crescente in senso lato,** se abbiamo
$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ..... \leq a_n \leq ....$

- similmente una successione e' **decrescente in senso lato,** se abbiamo
$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ..... \geq a_n \geq ....$

- una successione e' **crescente in senso stretto,** se abbiamo
$a_1 < a_2 < a_3 < ..... < a_n < ....$

- similmente una successione e' **decrescente in senso stretto,** se abbiamo
$a_1 > a_2 > a_3 > ..... > a_n > ....$

Si definisce **monotóna crescente** una successione sempre crescente (in senso lato o in senso stretto)
Si definisce **monotóna decrescente** una successione sempre decrescente (in senso lato o in senso stretto)

Il seguente teorema ha un'importanza fondamentale.
Consideriamo l'insieme dei valori dei termini di una successione:

Una successione numerica reale monotona crescente tende verso l'estremo superiore dell'insieme numerico dato dal valore dei suoi termini

Questo comporta che se la successione e' limitata essa converge, se e' illimitata essa diverge positivamente
Naturalmente vale anche:

Una successione numerica reale monotona decrescente tende verso l'estremo inferiore dell'insieme numerico dato dal valore dei suoi termini

Questo comporta che, se la successione e' limitata, essa converge; se e' illimitata, essa diverge negativamente.

Come esercizio dimostriamo il primo teorema:
abbiamo la successione monotona crescente:
$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots$
e vale:
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$
Se la successione e' limitata ed **a** e' il suo limite allora dato **ε** si puo' trovare un numero naturale k_ε tale che $a_{k\varepsilon} > a-\varepsilon$
Ma se prendiamo un valore $n > k_\varepsilon$ avremo, essendo la successione monotona crescente, $a - \varepsilon < a_{k\varepsilon} < a_n \leq a$
sarebbe a dire che gli a_n cadono nell'intorno $(a - \varepsilon ; a]$.
Diminuendo il valore di **ε** ci avvicineremo quanto vogliamo all'estremo superiore che quindi coincide con il limite **a**.

12. Un esempio

Come esempio di applicazione di alcuni dei concetti finora sviluppati mostriamo che la successione:

$$(1+1)^1, (1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3 (1+\frac{1}{4})^4, \ldots, (1+\frac{1}{n})^n, \ldots$$

e' convergente e che il valore del suo limite e' compreso fra **2** e **3**
Per mostrare che e' convergente mostriamo che e' crescente in senso stretto e poi mostriamo che e' limitata, quindi, per il teorema della pagina precedente avremo che ammette limite uguale all'estremo superiore dell'insieme dei valori dei suoi termini.

Mostriamo che e' monotona strettamente crescente. Considero il termine n-esimo:

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

lo sviluppo come potenza di un binomio con la formula di Newton:

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0,1,\ldots,n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0,1,\ldots,n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =$$

Non ho scritto nell'ultimo passaggio 1^{n-k} perche' il suo valore e' sempre **1** e quindi, moltiplicando, non influisce.
Evidenzio il primo termine dello sviluppo, cioe' il termine per cui abbiamo **k= 0** e ottengo:

$$= 1 + \sum_{k=1,2,\ldots,n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} =$$

Adesso evidenzio il secondo termine cioe' il termine che abbiamo per **k=1**; facendo i calcoli, tale termine vale 1

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2,\ldots,n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} =$$

Suddivido i termini frazionari: pongo prima **1/k!**

$$= 2 + \sum_{k=1,2,\ldots,n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n!} =$$

Scompongo il termine frazionario calcoli:

$$= 2 + \sum_{k=2,\dots,n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots(1-\frac{k-1}{n})$$

Ora sviluppo il termine successivo a_{n+1}

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

Senza rifare tutti i calcoli bastera' nel risultato sostituire **n+1** al posto di **n**

Ottengo:

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = 2 + \sum_{k=2,\dots,n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots(1-\frac{k-1}{n+1})$$

adesso considero la disuguaglianza:

$$\sum_{k=2,\dots,n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=2,\dots,n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots(1-\frac{k-1}{n+1})$$

Questa disuguaglianza e' certamente valida; infatti, considerando termine a termine:

- a destra, nella sommatoria abbiamo un addendo in piu' rispetto a sinistra (il termine con **k=n+1**)
- considero i fattori a destra e sinistra per ogni addendo: dentro parentesi la frazione, aumentando il denominatore da **n** ad **n+1**, diminuisce di valore , quindi se tolgo da 1 il valore della frazione avro' un risultato maggiore a destra rispetto che a sinistra.

Ne segue che, essendo ogni termine minore del successivo, la mia successione e' strettamente monotona crescente.

Mostriamo ora che e' limitata superiormente, consideriamone un termine **n > 2**; partiamo dalla formula sopra:

$$a_n = 2 + \sum_{k=2,\dots,n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Ogni termine dentro parentesi e' inferiore ad **1** ed anche il loro prodotto e' inferiore ad **1**, quindi se li tolgo il valore dell'espressione aumenta e posso scrivere:

$$a_n < 2 + \sum_{k=2,\dots,n} \frac{1}{k!}$$

la successione $\mathbf{1/2^{k-1}}$ e' una maggiorante (per k>2) della successione **1/k!**, quindi scrivo [Vediamo perche' e' maggiorante]

$$a_n < 2 + \sum_{k=2,\dots,n} \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=2,\dots,n} \frac{1}{2^{k-1}} =$$

Ma quest'ultima e' una progressione geometrica di ragione ½ e posso scrivere (spezzo il **2** all'inizio):

$$1 + 1 + \sum_{k=2,\dots,n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right) = 1 + 2 = 3$$

Ho gia' [calcolato in questa pagina il valore] **2** della somma dei termini della progressione geometrica dentro parentesi e posso scrivere:

$a_n < 3$

Ma questo vale per ogni **n**, quindi la mia successione e' limitata ed il suo limite e' inferiore al valore **3**

Mostriamo infine che i suoi termini sono superiori al valore **2** (per n>2).

Partiamo dalla stessa disuguaglianza:

$$a_n = 2 + \sum_{k=2,\dots,n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Il valore dato dalla sommatoria e' certamente positivo e, se lo tolgo, ottengo:

$$a_n = 2 + \sum_{k=2,\dots,n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) > 2$$

cioe':

$a_n > 2$

quindi la mia successione (per n>2) ha tutti i termini maggiori del valore **2.**

Ne consegue cher il limite della mia successione e' un numero compreso fra **2** e **3**; in effetti il limite di tale successione e' il [numero **e** o numero di Nepero] (od anche di Eulero)

e = 2,71828182845.....

un numero decimale illimitato e non periodico di importanza fondamentale in molte parti della matematica

13. Studio della successione geometrica

In questa pagina studiamo una successione molto importante: la successione geometrica che abbiamo gia' utilizzato varie volte.
La successione geometrica e' una progressione geometrica di ragione uguale al suo primo termine.
Se chiamo **a** il primo termine posso scriverla come:
$a, \ a^2, a^3, a^4, \ldots a^n, \ldots$
la ragione e' $q = a$

Se $a > 1$ la successione diverge, per mostrarlo trovo una minorante che diverga: considero, come minorante, la successione:
$1, \ 2a-1, \ 3a-2, \ldots \ na-n+1, \ldots$
o meglio
$1, \ 2a-1, \ 3a-2, \ldots \ 1+n(a-1), \ldots$
Mostriamo che vale sempre, (per a>1 ed n>1)
$a^n > 1+n(a-1)$
Partiamo dalla disuguaglianza
$(1+b)^n > 1+nb$ sempre vera se b>1 ed n>1 [dimostrazione]
devo far comparire (1+b) anche al secondo termine, allora aggiungo +n e -n nel secondo termine
$(1+b)^n > 1+nb +n-n$
$(1+b)^n > 1+n(b+1) - n$
Pongo $(1+b) = a$, posso farlo perche' ho posto a>1
ottengo:
$a^n > 1+na-n$
cioe', raccogliendo n
$a^n > 1+n(a-1)$
come volevamo
Abbiamo, essendo a>1
$\lim_{n\to\infty} 1+n(a-1) = +\infty$
quindi, essendo la successione geometrica una maggiorante, avremo
$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$

Se $a = 1$ la mia successione diventa una successione costante
$1, \ 1^2, \ 1^3, 1^4 \ \ldots\ldots 1^n, \ldots$
o meglio
$1, \ 1, \ 1 \ \ 1 \ \ldots\ldots 1, \ldots$
e quindi
$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

Se $-1 < a < +1$, allora la successione inversa:
$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \ldots, \frac{1}{a^n}, \ldots$$
e' divergente come successione geometrica di base (1/a) maggiore di 1:
$$\log_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = +\infty$$
quindi la mia successione essendo inversa di una successione divergente e' infinitesima:
$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

Se $a = -1$ la mia successione diventa una successione oscillante di modulo costante 1:
$(-1)^1, \ (-1)^2, \ (-1)^3, (-1)^4 \ \ldots\ldots (-1)^n, \ldots$
o meglio
$-1, \ +1, \ -1 \ \ +1 \ \ldots\ldots (-1)^n, \ldots$
e non ammette limite

Se $a < -1$ la mia successione diventa oscillante ed avra' in modulo gli stessi termini della successione considerata sopra per a>1
$(-1)^1a^1, \ (-1)^2a^2, (-1)^3a^3, \ (-1)^4a^4, \ldots (-1)^na^n, \ldots$
o meglio
$-a, \ +a^2, \ -a^3, \ +a^4, \ldots (-1)^na^n, \ldots$
e divergera' ad infinito:
$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot a^n = \infty$

14. Criterio di convergenza di Cauchy

Vediamo infine, come ultimo argomento (per ora) sulle successioni, un criterio, cioe' una scorciatoia, che ci permetta senza dover fare tutti i calcoli, di vedere se una successione e' convergente o divergente.
Questo criterio permette di mostrare l'esistenza del limite di una successione senza conoscere il valore del limite stesso

---

Condizione necessaria e sufficiente perche' la successione
a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n, ...
sia convergente e' che, dato comunque un numero positivo ε, e' possibile trovare in sua corrispondenza un numero naturale k_ε dipendente da ε tale che per ogni coppia di numeri naturali p e q maggiori di k_ε di abbia $|a_p - a_q| < \varepsilon$

Cioe', intuitivamente, se considero termini della successione sempre piu' "avanzati" la loro differenza deve diventare sempre piu' piccola

---

La dimostrazione e' piuttosto complicata e, per ora, la saltiamo.
Una successione che segua tale criterio e' detta **successione di Cauchy**; quindi tutte e sole le successioni convergenti sono successioni di Cauchy.

D. Serie

1. Introduzione

Facciamo un giochetto:
supponiamo che io debba percorrere a piedi una certa distanza e che, partendo al mattino, il primo giorno io riesca a percorrere 20.000 metri (20 Km).

La notte un mago malefico mi trasforma in modo che in proporzione io diventi la meta': meta' altezza, quindi meta' lunghezza delle gambe, ed il secondo giorno percorrero' meta' distanza: 10.000 metri (10 Km).
Supponendo che il mago ogni notte mi dimezzi ed ogni giorno io percorra la distanza che posso, qual'e' la massima distanza cui potro' arrivare considerando da dove sono partito?

Questo sopra e' un buon esempio si serie numerica: infatti io percorrero' la distanza:
20.000m + 10.000m + 5.000m + 2.500m + 1.750m + ...
evidentemente e' una serie del tipo:
1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 +........
in cui ogni termine successivo si dimezza.
Considerando che tale serie tende al valore 2 potremo dire che la massima distanza cui potro' tendere, senza arrivarci mai, sara' **40.000** metri.

Le serie sono una cosa che associamo spesso al concetto di misura, ad esempio, se io voglio misurare la lunghezza di una stanza come faccio?
prima considero il metro e vedo quante volte il metro e' contenuto nella lunghezza supponiamo di ottenere **4**
poi considero il decimetro e vedo quante volte il decimetro e' contenuto nella lunghezza residua supponiamo di ottenere **5**
poi considero il centimetro e vedo quante volte il centimetro e' contenuto nella lunghezza residua supponiamo di ottenere **7**
poi considero il millimetro e vedo quante volte il millimetro e' contenuto nella lunghezza residua supponiamo di ottenere **6**
....
Quindi la lunghezza della stanza e' data da:
4m + 5dm + 7cm + 6mm + ...
o, meglio
$4m + 5 \cdot 10^{-1}m + 7 \cdot 10^{2}m + 6 \cdot 10^{-3}m + ...$
Anche questa e' una specie di serie (anche se e' una serie fisica piuttosto che matematica), cioe' un insieme di misure da sommare una all'altra per ottenere un risultato con la precisione voluta.

Essendo d'accordo che fisicamente una tal misura non ha molto significato perche' potrei arrivare a valori inferiori al diametro di un atomo, matematicamente invece essa mi permette di ottenere un valore approssimato con la precisione voluta

---

Quindi le serie, in matematica, mi permetteranno, applicando procedimenti ricorsivi, di poter arrivare a misurazioni precise quanto voglio (ricordiamo la frase: preso un ε piccolo a piacere...) nell'ambito delle funzioni e non solo: da questo la loro importanza fondamentale.

2. Definizioni

Chiamiamo **ridotta** di una successione la somma dei termini della successione sino ad un termine definito.
Esempio; l'insieme:
$a_1+a_2+a_3+a_4$
e' la ridotta di ordine 4 della successione
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ ......a_n,\ ....$

Consideriamo una qualunque successione di numeri reali:
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ ......a_n,\ ....$
Consideriamo le ridotte:
$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1+a_2$
$s_3 = a_1+a_2+a_3$
....
$s_n = a_1+a_2+a_3+.....+a_n$
....
La successione delle ridotte:
$s_1,\ s_2,\ s_3,\ ......\ s_n,\ ....$
si chiama **serie numerica.**

Naturalmente e' possibile, data la serie, "ritrovare" la successione generatrice; cioe':
Data la serie:
$s_1,\ s_2,\ s_3,\ ......\ s_n,\ ....$
la successione generatrice sara':
$s_1,\ s_2\text{-}s_1,\ s_3\text{-}s_2,\ ......\ s_n\text{-}s_{n-1},\ ....$
Infatti, avremo:
$s_1 = a_1$
$s_2\text{-}s_1 = a_2+a_1 \text{-}a_1 = a_2$
$s_3\text{-}s_2 = a_3+a_2+a_1 - (a_2+a_1) = a_3+a_2+a_1 - a_2\text{-}a_1 = a_3$
....
$s_n\text{-}s_{n-1} = a_n+ a_{n-1}+a_{n-2}+ ..... +a_3+a_2+a_1 - (a_{n-1}+ a_{n-2}+ ....+a_3+a_2+a_1) = a_n+ a_{n-1}+a_{n-2}+ ..... +a_3+a_2+a_1 - a_{n-1}\text{-}a_{n-2}\text{-} ....\text{-} a_3\text{-}a_2\text{-}a_1 = a_n$
....

Diremo che una serie s_k converge (o converge semplicemente) se converge la successione delle sue ridotte
$s_1,\ s_2,\ s_3,\ ......\ s_n,\ ....$
Se la serie
$a_1+a_2+a_3+a_4+.....$
converge allora il limite **s** si chiama anche **somma della serie** e vale
$s = a_1+a_2+a_3+......+a_n+........$
che indicheremo anche come:
$s = \sum^{\infty}_{n=1} a_n$
Se invece la serie diverge positivamente o negativamente avremo:
$\sum^{\infty}_{n=1} a_n = \pm\infty$

In pratica quindi una serie non e' altro che una successione e si potrebbero studiare concettualmente le serie come successioni, ma ormai e' nella tradizione studiare le serie come enti autonomi e presentare alcuni teoremi come teoremi sulle serie ed altri come teoremi sulle successioni ed altri ancora nella doppia forma.

Come esempio, vediamo un teorema sulle serie che ci fornisce un teorema sulle successioni.
Per il teorema generale di convergenza delle successioni avremo che, se la serie s_n converge (essendo una successione applico il criterio di convergenza di Chauchy) si ha:
$\lim_{n \to \infty} |s_n - s_{n-1}| = 0$
quindi, visto che, per l'osservazione sulle successioni generatrici, vale:
$s_n - s_{n-1} = a_n$
otteniamo:
$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
cioe' il termine generale a_n di una successione che genera una serie numerica convergente e' infinitesimo al divergere di n

Nota: la condizione e' necessaria, ma non sufficiente, cioe' se la serie e' convergente il termine generico e' infinitesimo, ma non vale sempre il viceversa: esistono successioni con termine generico infinitesimo che danno luogo a serie divergenti

3. Serie geometrica

Come esempio particolarmente importante di serie consideriamo la **serie geometrica:**
$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + ...$
Se $a = 1$, allora la serie diventa:
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ...$
e quindi diverge.
Se $a \pm 1$, allora la ridotta di ordine k e':
$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + ...a^{k-1}$
e, vista la formula per la somma dei primi **k** termini di una progressione geometrica abbiamo:
$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ ... + a^{k-1} = \frac{1 - a^k}{1 - a}$$
I termini sono k perche' partiamo da zero: infatti la ridotta, scritta come somma di potenze e':
$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + ...a^{k-1}$
Quindi, visto quanto abbiamo detto sulla successione geometrica:
se $a > 1$ la serie diverge;
se $0 > a > 1$ la serie converge;
se $a = -1$ la serie e' indeterminata e si puo' indicare come
$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ....$

Particolarmente interessante, come serie indeterminata, e' la serie geometrica di ragione i con i unita' complessa $i = \sqrt{(-1)}$
$i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 +$
ricordando che il prodotto delle i e' ciclico, cioe' si ripete ogni 4 fattori
$i^1 = i$
$i^2 = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^3 \cdot i = -\sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} = -(-1) = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = 1$
....
Quindi potremo scrivere la serie come:
$1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + ...$

4. Resto di una serie

Siccome la serie e' una successione i cui termini tendono ad una somma infinita diventa importante considerare, se considero un termine abbastanza avanzato della successione, cosa resta per arrivare al limite della successione e lo chiameremo **resto** della serie stessa, ma ora diamo la definizione matematica

Data la serie numerica:
$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$
chiameremo **resto k-esimo** della serie stessa la serie:
$a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + ... + a_{k+n} + ...$

5. Criterio generale di convergenza

Talvolta, soprattutto quando si vuol vedere la convergenza della serie stessa, diventa utile considerare le ridotte dei resti di una serie dette anche **ridotte parziali**; ad esempio, la ridotta parziale $r_{k,h}$ del resto **k-esimo** della serie sopra considerata sara':
$r_{k,h} = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + ... + a_{k+h}$
Ora il resto **k-esimo** della serie e' legato alle ridotte della serie dalla relazione:
$r_{k,h} = s_k - s_{k+h}$

Infatti, facendo la differenza fra le ridotte tutti i termini oltre l'indice **k+h** si elidono fra loro; infatti:
$s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_{k+h} + a_{k+h+1} + a_{k+h+2} + a_{k+h+3} + \dots$
$s_{k+h} = a_{k+h+1} + a_{k+h+2} + a_{k+h+3} + \dots$
Se faccio la differenza termine a termine, ottengo:
$s_k - s_{k+h} = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + ... + a_{k+h} = r_{k,h}$

Ma allora basta applicare il criterio di convergenza di Cauchy alla successione delle ridotte:
$s_{k+1}, \ s_{k+2}, \ s_{k+3}, ... s_{k+h}, \ s_{k+h+1}, \ s_{k+h+2}, \ ....$
per ottenere il criterio di convergenza per la serie stessa.

> La serie
> $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$
> converge se e solo se preso un numero reale ε piccolo a piacere risulta
> $|r_{k,h}| < \varepsilon$
> per ogni $k > k_\varepsilon$ (maggiore di un numero naturale opportuno dipendente da ε) e per **h** qualunque

Come conseguenza abbiamo che, se la serie converge, vale:
$\lim_{k\to\infty} r_{k,h} = 0$ essendo **h** un numero naturale fissato a piacere.
Siccome posso fissare **h** a piacere ne segue che il resto r_k di una serie convergente diventa infinitesimo al crescere di **k**, cioe' converge a **0.**
Possiamo dire che la serie ed i suoi resti hanno tutti lo stesso **carattere**, cioe' o sono tutti convergenti, o tutti divergenti o tutti indeterminati

6. Proprieta' di una serie

Per le serie possiamo parlare di proprieta' distributiva rispetto ad una costante e di proprieta' associativa: vediamole nei particolari e facciamone un esempio per ciascuna

a) Proprieta' distributiva rispetto ad una costante

Considero la serie convergente ad **s**:
$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...$
se considero la serie:
$ca_1 + ca_2 + ca_3 + ca_4 + ...$
essendo **c** un numero dato, essa converge verso $c \cdot s$.

Chiamiamo, per ora **h** la serie; per ogni sua ridotta posso scrivere:
$h_1 = ca_1 = c \cdot s_1$

$h_2 = ca_1 + ca_2 = c(a_1 + a_2) = c \cdot s_2$
$h_3 = ca_1 + ca_2 + ca_3 = c(a_1 + a_2 + a_3) = c \cdot s_3$
$h_4 = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ca_4 = c(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = c \cdot s_4$
....
Quindi, d'ora in avanti, chiameremo tale serie **cs.**

Possiamo inoltre dire che, se $c \neq 0$, le serie **s** e **cs** hanno lo stesso carattere, cioe' entrambe le serie convergono oppure divergono oppure sono indeterminate.
Quindi possiamo dire che, per le serie numeriche, sussiste la proprieta' distributiva rispetto alla moltiplicazione per un numero, cioe':
$c \cdot s = c(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots) = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ca_4 + \dots = cs$

Esempio: studiare il carattere della serie:
$\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots$
e, se converge, calcolarne il valore.
Vista la proprieta' distributiva sopra considerata, la nostra serie si puo' pensare come:
$3 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots)$
cioe' come prodotto fra **3** e la serie geometrica di ragione ½ privata del primo termine,e la somma di questa serie vale **1** (fare link), quindi:
$3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = 3$
Quindi la nostra serie converge e la sua somma vale **3.**

b) Proprieta' associativa

Considero la serie convergente ad **s:**
$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$
Se considero la serie formata dalle ridotte $s_{kh,kh+1}$ della serie iniziale:
$s = s_{1,k1} + s_{k1+1,k2} + s_{k2+1,k3} + \dots$
con $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ numeri naturali.
Tale serie e' una sottosuccesione delle ridotte della serie iniziale e, se convergente o divergente, ha lo stesso carattere della serie iniziale e questo ci porta a dire che, per le serie numeriche vale la proprieta' associativa.

La proprieta' non vale per le serie indeterminate perche' se, ad esempio, considero la serie indeterminata:
$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$
e sommo i termini 2 a due, ottengo la serie convergente:
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$

Esempio: associare 4 a 4 i termini della serie numerica:
$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + \dots$
otteniamo la serie:
$s = (1 + 2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7 + 8) + (9 + 10 + 11 + 12) + \dots$
$= 10 + 26 + 42 + \dots$
tale serie diverge come divergeva la serie iniziale.

7. Criteri di convergenza e divergenza

a) Serie a segno costante

(1) Serie a termini tutti positivi o tutti negativi

Consideriamo una serie i cui termini siano tutti positivi:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$
Allora tale serie o converge oppure diverge e non puo' essere indeterminata.

Infatti, se i termini sono tutti positivi, allora la successione delle ridotte:

$s_1, \ s_2, \ s_3, \ s_4, \ldots\ldots.$

e' una successione crescente in senso stretto e quindi o diverge a $+\infty$ oppure converge all'estremo superiore del proprio codominio.

Analogamente, se la serie considerata ha i termini tutti negativi, allora la successione delle ridotte e' un successione decrescente in senso stretto e quindi o tende a $-\infty$ oppure e' convergente e tende al valore inferiore del proprio codominio.

Una serie a termini tutti positivi oppure tutti negativi sara' chiamata **serie a termini di segno costante**

Esempio: la serie

$(-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + \ldots\ldots.$

diverge a $-\infty$

Mentre la serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} + \ \ldots$$

converge a 1; infatti, se considero le ridotte:

$s_1, \ s_2, \ s_3, \ s_4, \ldots\ldots.$

essendo:

$s_1 = 1/2$

$s_2 = 1/2 + 1/4 = 3/4$

$s_3 = 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$

$s_4 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 15/16$

....

avro' la successione:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots \frac{n-1}{n}, \ldots$$

che converge al valore **1**

(2) Conseguenze sulle ridotte

Come conseguenza, possiamo dire che le ridotte di una serie numerica reale convergente non superano mai la somma della serie se i termini sono tutti positivi e non ne sono mai superate se i termini sono tutti negativi.

Esempio. Consideriamo la serie:

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ \ldots$$

e le ridotte:

$s_1, \ s_2, \ s_3, \ s_4, \ s_5, \ldots\ldots.$

Queste ridotte sono tutte inferiori ad **s**, infatti:

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + 1/2 = 3/2$

$s_3 = 1 + 1/2 + 1/4 = 7/4$

$s_4 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 15/8$

$s_5 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 31/16$

....

Ottengo una successione i cui termini sono strettamente crescenti e tendono al valore 2:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots$$

(3) Serie armonica

Mostriamo ora, come applicazione, che la serie armonica e' divergente.

Si definisce **serie armonica** la serie dei reciproci dei numeri naturali:

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ \ldots$$

Essendo la serie tutta a termini positivi, non puo' essere indeterminata, ma puo' essere solamente convergente oppure divergente.

Considero la ridotta parziale $s_{k,\,2k}$ del resto k-esimo della serie:

$$s_{k,2k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ \ldots + \frac{1}{k+k}$$

e' la somma di k termini ed e' sempre maggiore di ½; infatti:

$$s_{k,2k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ \dots + \frac{1}{k+k} > \frac{k}{k+k} = \frac{1}{2}$$

Infatti i **k** termini sono decrescenti **1/k < 1/(k+1) < 1/(k+2) < 1/(k+3)...** (se aumenta il denominatore il valore della frazione diminuisce) e quindi la loro somma e' maggiore della somma di **k** volte il termine piu' piccolo **1/(k+k)** che vale **k/(k+k) = k/2k = ½.**

Ora, per il criterio generale di convergenza , se il resto k-esimo non tende a zero la serie non e' convergente, e quindi e' divergente, come volevamo mostrare.

(4) Criterio del confronto

Prima di introdurre il criterio del confronto fra serie a termini tutti positivi o tutti negativi parliamo di maggiorante e di minorante di una serie numerica.

Definizione.
Date le serie:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$
e
$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots$
diremo che la prima serie e' una **maggiorante** della seconda se vale
$a_h \geq b_h \ \forall \ h \in N$
Similmente diremo che la seconda serie e' una **minorante** della prima.

Il criterio del confronto fra serie numeriche dice semplicemente che:
Se le serie sono a termini tutti positivi, la maggiorante di una serie numerica divergente e' anch'essa divergente, mentre la minorante di un a serie numerica convergente e' convergente.
Similmente diremo:
Se le serie sono a termini tutti negativi, la minorante di una serie numerica divergente e' anch'essa divergente, mentre la maggiorante di una serie numerica convergente e' convergente.

Esempio 1
Consideriamo la serie:

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ \dots$$

una serie minorante e':

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \ \dots$$

Infatti, in ogni addendo della seconda il denominatore della frazione e' maggiore di 1 del corrispondente della prima:

$$s_2 = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{8+1} + \frac{1}{16+1} + \ \dots$$

e quindi le frazioni della seconda serie hanno un valore minore degli addendi corrispondenti nella prima serie.
Essendo la prima serie convergente, ne segue che anche la seconda e' convergente.

In pratica, negli esercizi, rovesciando il ragionamento, per mostrare che una serie a termini positivi e' convergente bastera' trovare una sua maggiorante che sia convergente; oppure, per mostrare che e' divergente troveremo una minorante che sia divergente.

Esempio 2
Mostriamo che e' divergente la serie:

$$s_1 = 2 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \ \dots$$

Scriviamola come:

$$s_1 = (1+1) + \frac{1+1}{2} + \frac{1+1}{3} + \frac{1+1}{4} + \frac{1+1}{5} + \frac{1+1}{6} + \frac{1+1}{7} + \ \dots$$

Una sua serie minorante e' la serie armonica:

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ \dots$$

Infatti, ogni termine della prima ha il numeratore aumentato di 1 rispetto al termine corrispondente della serie armonica e quindi ogni addendo della prima ha valore maggiore del corrispondente addendo della seconda; essendo la serie armonica divergente, ne segue che anche la prima serie e' divergente.

b) Serie a segno alterno

Vediamo ora cosa possiamo dire per le serie a termini di segno alterno.

(1) Convergenza della serie a termini a segno alterno

Una serie si dice **serie di termini a segno alterno** se i suoi termini di posto dispari (primo, terzo, quinto..) sono tutti positivi, mentre i suoi termini di posto pari (secondo, quarto, sesto,...) sono tutti negativi o viceversa.
Considerando i termini a_i tutti positivi, possiamo scrivere:
$s = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + ...$
o, viceversa
$s = - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - ....$
Per la convergenza della serie a termini di segno alterno vale il **teorema di Leibniz**.
Un serie a termini di segno alterno:
$s = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + ...$
e' convergente, se la successione
$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; a_5, \; a_6, ...$
e' monotona ed infinitesima.

Dimostriamolo come esercizio.
Supponiamo sia crescente, e che siano positivi i termini di posto dispari.
Per ipotesi sappiamo che la successione e' infinitesima, inoltre e' monotona; mostriamo che e' convergente
Se e' monotona vale
$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \geq ....$
sia s_k e' la ridotta k-esima; risulta
per la ridotta 2k+2 (posto pari), vale
$s_{2k+2} = s_{2k} + a_{2k+1} - a_{2k-2} \geq s_{2k}$ (infatti siccome sommo a_{2k+1} che e' piu' grande e tolgo a_{2k+2} che e' piu' piccolo il risultato e' maggiore)
per la ridotta 2k+1 (posto dispari), vale
$s_{2k+1} = s_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} \leq s_{2k-1}$ (infatti siccome tolgo a_{2k} che e' piu' grande e sommo a_{2k+1} che e' piu' piccolo il risultato e' minore)
inoltre ho
$s_{2k+2} = s_{2k+1} + a_{2k+2} \leq s_{2k+1}$ (infatti siccome sommo a_{2k+2} che e' positivo il risultato e' minore)
Da queste relazioni abbiamo che:

- la successione delle ridotte pari
  $s_2, \; s_4, \; s_6, \; s_8, \; ....$
  e' crescente e limitata superiormente, quindi convergente
- la successione delle ridotte dispari
  $s_1, \; s_3, \; s_5, \; s_7, \; ....$
  e' decrescente e limitata inferiormente, quindi convergente

Se adesso consideriamo le differenze
$s_{2k+1} - s_{2k} = + a_{2k+1}$
$s_{2k} - s_{2k-1} = - a_{2k}$
esse per ipotesi sono infinitesime al crescere di k, e la loro differenza puo' essere resa picola a piacere, quindi la serie e' convergente ed il teorema e' valido. Come volevamo

(2) Applicazioni alle ridotte

Consideriamo la serie a segni alterni:
$s = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + ...$
con i termini a_k tutti positivi.
Come conseguenza di quanto visto nella pagina precedente possiamo dire che tra le ridotte e la somma **s** della serie valgono le relazioni.

- le ridotte $s_1, \; s_3, \; s_5, \; s_7, ...$ superano sempre **s**
- le ridotte $s_2, \; s_4, \; s_6, \; s_8, ...$ sono sempre inferiori ad **s**

e risultano le relazioni:
$s - s_{2k} \leq s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1}$ (s_{2k+1} e' dispari quindi supera , da qui il $\leq$)
$s_{2k-1} - s \leq s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k}$ (s_{2k} e' pari quindi e' minore di **s**, e togliendo un valore minore otteniamo un risultato maggiore, da qui il $\leq$).
In pratica queste relazioni mostrano che possiamo approssimare la somma **s**, sia per eccesso che per difetto,

con la precisione che vogliamo.
(meglio sarebbe dire maggioriamo, con la precisione che vogliamo, l'errore di approssimazione)

(3) Un esempio

Come conseguenza, abbiamo che la serie armonica a segni alterni e' convergente:

$$\mathbf{s} = +1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ \dots$$

E' convergente per il teorema di Leibniz; infatti la successione dei suoi termini (senza tener conto dei segni) e':

$$\mathbf{s} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

e questa e' una successione monotona (decrescente) ed a termini tendenti a zero.

Come esercizio maggioriamo e minoriamo la serie con una ridotta che la approssimi con precisione superiore ad almeno 1/1000. Consideriamo la successione delle ridotte dispari:

$\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_3}$, $\mathbf{s_3}$, $\mathbf{s_7}$, ...

con:

$$\mathbf{s_1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ \dots$$

$$\mathbf{s_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ \dots$$

$$\mathbf{s_5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ \dots$$

....

$$\mathbf{s_{2k+1}} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} + \frac{1}{2k+7} + \ \dots$$

....

Consideriamo anche la successione delle ridotte pari:

$\mathbf{s_2}$, $\mathbf{s_4}$, $\mathbf{s_6}$, $\mathbf{s_8}$, ...

con:

$$\mathbf{s_2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \ \dots$$

$$\mathbf{s_4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \ \dots$$

$$\mathbf{s_6} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \ \dots$$

....

$$\mathbf{s_{2k}} = -\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+4} - \frac{1}{2k+6} - \ \dots$$

....

Per essere sicuri di avere un'approssimazione superiore ad 1/1000 scegliamo k = 1000, cosi' 2k sara' 2000 e 2k+1 sara' 2001; abbiamo:

$$\mathbf{s_{2000}} = -\frac{1}{2000} - \frac{1}{2002} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2006} - \ \dots$$

$$\mathbf{s_{2001}} = \frac{1}{2001} + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2007} - \ \dots$$

- approssimiamo per eccesso: vale la formula
  $\mathbf{s - s_{2k} \leq a_{2k+1}}$
  cioe'
  $$\mathbf{s - s_{2000}} \leq \frac{1}{2001}$$
  cioe'
  $$\mathbf{s} \leq \mathbf{s_{2000}} + \frac{1}{2001}$$
  quindi la somma della ridotta $\mathbf{s_{2000}}$ (che e' negativa) approssima la somma della serie per meno di **1/2001 ≤ 1/1000.**
- approssimiamo per difetto: vale la formula
  $\mathbf{s_{2k-1} - s \leq a_{2k}}$
  o meglio, adottandola ai resti che abbiamo preso

$s_{2k+1} - s \leq a_{2k+2}$
cioe'

$$s_{2001} - s \leq \frac{1}{2002}$$

cioe':

$$s \geq s_{2001} - \frac{1}{2002}$$

quindi la somma della ridotta s_{2001} (che e' positiva) approssima la somma della serie per piu' di **-1/2001 ≥ -1/1000**

Per finire vediamo un modo di approssimare la somma della serie.
Consideriamo il primo termine e la successione e la somma del primo termine e delle ridotte parziali:
a_1, $a_1 + r_{1,1}$, $a_1 + r_{1,2}$, $a_1 + r_{1,3}$, $a_1 + r_{1,4}$, ...
cioe' il primo termine, la somma del primo e del secondo termine, la somma dei primi 3 termini, la somma dei primi 4 termini,...
Approssimo alla terza cifra decimale:
$a_1 = 1{,}00$
$a_1 + r_{1,1} = 1 - 1/2 = 1/2 = 0{,}500$
$a_1 + r_{1,2} = 1 - 1/2 + 1/3 = 5/6 = 0{,}833$
$a_1 + r_{1,3} = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 = 7/12 = 0{,}583$
$a_1 + r_{1,4} = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 = 47/60 = 0{,}783$
$a_1 + r_{1,5} = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 = 37/60 = 0{,}617$
$a_1 + r_{1,6} = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 - 1/7 = 319/420 = 0{,}760$
$a_1 + r_{1,7} = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 = 533/840 = 0{,}635$
....
Posso suddividere in due successioni, una crescente
0,500 0,583 0,617 0,635 0,646 0,653 0,659 0,663 ......
ed una decrescente
1,00 0,833 0,783 0,760 0,746 0,737 0,730 0,725 .....
(Calcoli fatti con la calcolatrice)
E' logico che, reiterando il procedimento, possiamo avvicinarci quanto vogliamo al valore della somma che, visto i dati trovati, si trova fra **0,663** e **0,725.**

c) Convergenza assoluta

Abbiamo visto che, nelle serie a termini alterni, ci e' servito considerare la serie dei termini con segni tutti positivi. Ampliamo l'argomento parlando di convergenza assoluta, cioe' di convergenza di una serie in modulo

(1) Definizione di convergenza assoluta

Definizione. La serie numerica:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$
converge assolutamente se converge la serie
$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \dots$
cioe' se converge la serie dei suoi moduli. se vuoi ripassar il concetto di modulo

---

Come esempio possiamo dire che la serie armonica a segni alterni:

$$s_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

non converge assolutamente; infatti, mentre questa serie converge, la serie dei moduli, che coincide con la serie armonica, diverge.

(2) Proprieta' della convergenza assoluta

Premettiamo che la convergenza assoluta della serie **s:**
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$
equivale alla convergenza assoluta di qualunque suo resto s_k
$a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} + \dots$

Infatti le serie: $|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \dots$
ha lo stesso carattere della serie:
$|a_{k+1}| + |a_{k+2}| + |a_{k+3}| + |a_{k+4}| + \dots$

Vale il teorema:
Se una serie converge assolutamente, allora essa converge

Cioe' la convergenza assoluta implica la convergenza; pero' non vale il viceversa: nella pagina precedente hai visto che la serie armonica a segni alterni converge semplicemente mentre non converge assolutamente

---

Come esercizio, dimostriamo il teorema.
Supponiamo che converga la serie:
$s_a = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \dots$
Mostriamo che allora converge la serie:
$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$
Consideriamo le ridotte parziali $r_{sk,h}$ ed $r_{k,h}$ delle due serie **s** ed s_a
$r_{sk,h} = |a_{k+1}| + |a_{k+2}| + |a_{k+3}| + \dots + |a_{k+k}|$
$r_{k,h} = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_{k+h}$
risulta:
$|r_{k,h}| \leq r_{sk,h}$
perche' il modulo di una somma e' sempre minore od uguale alla somma dei moduli
Inoltre, per il criterio di convergenza della serie s_a abbiamo che per **k** ed **h** abbastanza grandi avremo:
$r_{sk,h} \leq \varepsilon$
ma allora abbiamo:
$|r_{k,h}| \leq r_{sk,h} \leq \varepsilon$
cioe', per la proprieta' transitiva:
$|r_{k,h}| \leq \varepsilon$
e siccome ogni numero e' minore od uguale al suo modulo avremo:
$r_{k,h} \leq |r_{k,h}| \leq \varepsilon$
e, per la proprieta' transitiva:
$r_{k,h} \leq \varepsilon$
e questo e' il criterio di convergenza che ci mostra che la serie **s** e' convergente. Come volevamo.

d) Cenni su altri criteri di convergenza

Siccome di solito non e' facile mostrare che una serie converge, allora sono stati trovati vari criteri (scorciatoie) che talvolta ci permettono di aggirare l'ostacolo. Passiamo in rassegna alcuni dei criteri piu' famosi ed utilizzati.

(1) Criterio della radice

Consideriamo la serie:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$
Essa converge assolutamente se vale:
$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \alpha < 1$ essendo α un numero reale positivo e la determinazione della radice quella positiva.

Ad esempio, nelle serie armonica:
$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n + \dots$
se faccio:
$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k}\right|}$ ottengo **1**
e quindi la serie armonica non converge assolutamente (come abbiamo gia' visto)

Intuitivamente, se faccio, radici sempre piu' grandi e trovo che i valori di tali radici "sono abbastanza lontani" da 1, allora la serie converge assolutamente, cioe' converge la serie dei suoi moduli:
$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \dots$
cioe' se, ad esempio, considerata la serie armonica:
$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$
faccio:

$$\sqrt[100]{\left|\frac{1}{100}\right|} = 0,954992586$$

$$\sqrt[1000]{\left|\frac{1}{1000}\right|} = 0,993116048$$

$$\sqrt[10000]{\left|\frac{1}{10000}\right|} = 0,999309463$$

Ottengo valori sempre piu' vicini ad 1 e che non "sono abbastanza lontani" da 1
Per calcolarli ho impostato sulla calcolatrice del computer $1/n^{(1/n)}$ e con n = 100.000 gia' la calcolatrice si rifiuta di calcolare il risultato.

Essendo la dimostrazione abbastanza semplice questa la dimostriamo.
Devo dimostrare che se vale:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \alpha < 1$$

allora converge la serie:

$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + ...$

Se l'ipotesi e' vera allora posso trovare un numero β positivo tale che sia compreso fra α ed 1

$\alpha < \beta < 1$

e quindi:

$$\sqrt[k]{|a_k|} < \beta$$

Elevando a k entrambe i membri, se k e' abbastanza grande avremo:

$|a_k| \leq \beta^k$

Se β e' positivo e minore di 1 allora la serie geometrica $\beta^k + \beta^{k+1} + \beta^{k+2} ...$ e' convergente.
Ma tale serie e' una maggiorante della serie:

$|a_{k+1}| + |a_{k+2}| + |a_{k+3}| + ...$

che quindi converge. Come volevamo.

(2) Criterio del confronto

Consideriamo la serie:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...$

essa converge assolutamente se vale:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \alpha < 1$$

Cioe', se faccio il limite del rapporto di due termini consecutivi al tendere degli indici all'infinito e trovo che esso e' un numero positivo inferiore ad 1, allora la serie converge assolutamente, cioe' converge la serie dei suoi moduli:

$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + ...$

Esempio. Prendiamo la serie geometrica di ragione ½:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ ... + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ ...$$

mostriamo che obbedisce al criterio, cioe' mostriamo che vale meno di 1 il limite:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{1} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{2^k}{2 \cdot 2^k} = \frac{1}{2} < 1$$

essendo i termini positivi ho tralasciato i moduli; essendo il limite minore di 1 la serie geometrica converge assolutamente.
Mostriamo che, invece, la serie armonica non obbedisce al criterio:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ ... + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ ...$$

Essendo tutti i termini della serie positivi, tralascio i moduli.
Applicando il criterio ho:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

intuitivamente, se k tende ad ∞, allora k e k+1 diventano indistinguibili perche' 1 e' trascurabile e quindi sono semplificabili e il loro rapporto vale 1; essendo il limite del rapporto uguale ad 1, la serie armonica non converge assolutamente.

Per esercizio, facciamo la dimostrazione del criterio.
Data la serie:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...$
devo dimostrare che se vale:
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \alpha < 1$$
allora converge la serie:
$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + ...$
Supponiamo che valga il criterio allora posso trovare un numero **β** positivo tale che sia compreso fra **α** ed **1**
$\alpha < \beta < 1$
e quindi, per un valore **k** abbastanza grande avremo:
$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < \beta$$
Otteniamo:
$|a_{k+1}| < |a_k| \cdot \beta$
Se ora lo facciamo per **k+2** otteniamo: $|a_{k+2}| < |a_{k+1}| \cdot \beta < |a_k| \cdot \beta^2$
Se lo facciamo per **k+3** otteniamo: $|a_{k+3}| < |a_{k+2}| \cdot \beta < |a_{k+1}| \cdot \beta^2 < |a_k| \cdot \beta^3$
Se lo facciamo per **k+4** otteniamo: $|a_{k+4}| < |a_{k+3}| \cdot \beta < |a_{k+2}| \cdot \beta^2 < |a_{k+1}| \cdot \beta^3 < |a_k| \cdot \beta^4$
....
Quindi la serie:
$|a_{k+1}| + |a_{k+2}| + |a_{k+3}| + |a_{k+4}| + ...$
ha come maggiorante la serie:
$|a_k| \cdot \beta + |a_k| \cdot \beta^2 + |a_k| \cdot \beta^3 + |a_k| \cdot \beta^4 + ...$
cioe':
$|a_k| \cdot (\beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + ...)$
che e'prodotto fra un termine finito positivo ed una serie geometrica di ragione **β** con **β** positivo e minore di 1 e quindi e' convergente.
Ne segue che anche la minorante:
$|a_{k+1}| + |a_{k+2}| + |a_{k+3}| + |a_{k+4}| + ...$
e' convergente, ma essa e' una ridotta della serie:
$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + ...$
che quindi e' convergente. Come volevamo.

(3) Criterio di Raabe

Consideriamo la serie:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...$
essa converge assolutamente se vale:
$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} - 1 \right\} \cdot k > 1$$
Cioe', se l'espressione qui sopra o diverge o converge ad un numero reale maggiore di **1**, allora la serie dei suoi moduli
$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + ...$
e' convergente.
La dimostrazione e' abbastanza complicata e, per ora, la saltiamo.

8. Operazioni sulle serie

Vediamo, infine, quali operazioni son possibili da definire fra le serie e sotto quali condizioni e' possibile farlo.

a) Somma fra serie

Consideriamo la serie:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...$
ed anche la serie:

$\mathbf{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...}$

Definiamo serie somma delle due serie date la serie:

$\mathbf{(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + (a_4 + b_4) + ...}$

cioe' la serie i cui termini sono la somma dei termini di uguale posto nelle serie addendi.

Se le due serie componenti sono convergenti allora anche la loro somma e' convergente; e se le due serie convergono assolutamente allora anche la loro somma converge assolutamente

anche se una delle due e' convergente e l'altra e' divergente possiamo ancora fare la somma ed otteniamo una serie divergente;

inoltre: se entrambe le serie componenti sono divergenti positivamente (divergenti negativamente) allora la loro somma diverge positivamente (diverge negativamente)

Esempio. Sommando la serie armonica che e' divergente:

$$s = +1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ \dots$$

con la serie armonica a segni alterni che e' convergente:

$$s = +1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ \dots$$

otteniamo la serie divergente:

$$s = (1+1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) + \ \dots$$

$$s = 2 + 0 + \frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{5} + 0 + \frac{2}{7} + \ \dots$$

Per mostrare che e' divergente mostriamo che maggiora la serie armonica: infatti sommando i termini due a due otteniamo per la nostra serie:

$$s = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \ \dots$$

che posso scrivere anche come:

$$s = (1+1) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) + \ \dots$$

e per la serie armonica otteniamo:

$$s = \left(+1 + \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ \dots$$

Essendo il secondo termine dentro ogni parentesi inferiore al primo termine ogni espressione entro parentesi e' inferiore alla corrispondente espressione della serie sopra: infatti sopra ogni espressione entro parentesi e' scomposta nella somma di due termini uguali tra loro ed uguali al primo termine dell'espressione sotto.

Quindi la serie armonica e' minorante della nostra serie che, di conseguenza, diverge.

b) Differenza fra serie

Consideriamo la serie:

$\mathbf{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...}$

ed anche la serie:

$\mathbf{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...}$

Definiamo serie differenza delle due serie date la serie:

$\mathbf{(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + (a_4 - b_4) + ...}$

cioe' la serie i cui termini sono la differenza dei termini di uguale posto nelle serie addendi.

Se le due serie componenti sono convergenti allora anche la loro differenza e' convergente; anche se una delle due e' convergente e l'altra e' divergente, possiamo ancora fare la differenza ed otteniamo una serie divergente.

La differenza fra una serie divergente a segni tutti positivi ed una serie a termini tutti negativi diverge positivamente.

La differenza fra una serie divergente a segni tutti negativi ed una serie a termini tutti positivi diverge negativamente.

Niente invece possiamo dire sulla serie differenza se entrambe le serie componenti sono divergenti dello stesso degno.

Esempio. Sottraendo la serie armonica a segni alterni che e' convergente:

$$s = +1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ \dots$$

dalla serie armonica che e' divergente:

$\mathbf{s = +1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ \dots}$
otteniamo la serie divergente:
$\mathbf{s = (1-1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\right) + \ \dots}$

$\mathbf{s = 0 + 1 + 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \cdots}$
E' divergente perche' la somma coincide con quella della serie armonica.

c) Prodotto fra serie secondo Cauchy

Consideriamo le serie:
$\mathbf{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots}$
e
$\mathbf{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots}$
Definiamo **serie prodotto** (secondo Cauchy) delle due serie date la serie:
$\mathbf{(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + (a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1) + \dots}$
In pratica moltiplico ogni termine della prima serie per ogni termine della seconda:
$\mathbf{a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_1 b_4 \dots + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + a_2 b_4 \dots + a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_3 b_4 \dots}$
ma li associo in questo modo: dentro le parentesi, che rappresentano ognuna un termine della serie, gli indici delle **a** aumentano fino a raggiungere l'indice del termine del prodotto mentre gli indici delle **b** diminuiscono.
Ad esempio nel quarto termine:
$\mathbf{(a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1)}$
gli indici di **a** aumentano da 1 a 4 mentre gli indici di **b** diminuiscono da 4 ad 1
nel decimo termine gli indici di **a** aumenteranno da 1 a 10 mentre quelli di **b** diminuiranno da 10 ad 1
$\mathbf{(a_1 b_{10} + a_2 b_9 + a_3 b_8 + a_4 b_7 + a_5 b_6 + a_6 b_5 + a_7 b_4 + a_8 b_3 + a_9 b_2 + a_{10} b_1)}$

Vale il teorema di Abel:
se convergono sia le serie componenti che la serie prodotto, allora la somma della serie prodotto e' uguale al prodotto delle somme delle serie componenti.

Per finire, possiamo dire (senza dimostrarlo) che il prodotto di due serie assolutamente convergenti e' ancora una serie assolutamente convergente, mentre il prodotto di due serie semplicemente convergenti non sempre e' convergente: cioe' il prodotto conserva la convergenza assoluta, ma non la convergenza semplice

9. Conclusioni (utilizzo delle serie)

Facendo il punto, devo mettere l'accento sull'importanza delle serie nel calcolo di un valore approssimato. Questo sara'importante per sostenere l'esame di maturita' scientifica: capita spesso all'esame di dover costruire un programma (e quindi una serie) che ci permetta di calcolare un valore approssimato ad una certa cifra decimale.
Ma e' importante anche per la scienza: in analisi puoi vedere come, mediante le serie di Taylor e Mc Laurin e' possibile approssimare il valore di una funzione in un punto ed anche come, con una serie, puoi trovare il valore di **e** con la precisione che vogliamo, ma e' possibile farlo anche per **π**, **√2**,....
Terminiamo comunque qui lo studio delle serie, per noi e' sufficiente, il resto lo vedrai all'universita'.